Conditions et contraintes de l'enseignement de la statistique en classe de seconde générale. Un repérage didactique.

Floriane Wozniak

N° d'ordre 210-2005 Année 2005

THÈSE

présentée

devant l'UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD - LYON 1

pour l'obtention

du DIPLÔME DE DOCTORAT

(arrêté du 25 avril 2002)

présentée et soutenue publiquement le

26 novembre 2005

par

FLORIANE MATHIEU-WOZNIAK

TITRE

CONDITIONS ET CONTRAINTES DE L'ENSEIGNEMENT DE LA STATISTIQUE EN CLASSE DE SECONDE GÉNÉRALE. UN REPÉRAGE DIDACTIQUE

Directeur de thèse :

YVES CHEVALLARD

JURY : M. Jean-Luc Dorier, Président

Mme Michèle Artaud

Mme Marianna Bosch, rapporteure

M. Yves Chevallard

M. Thierry Fack

Mme Maggy Schneider, rapporteure

Remerciements

Étudier les conditions et contraintes auxquelles les enseignants sont soumis conduit à interroger le réel et regarder comme objet d'étude diverses institutions dont nous sommes parfois nous-mêmes les sujets. La mise à distance que ce type de travail appelle, requiert une certaine acuité dans le regard, nécessairement nourrie d'un esprit critique et curieux et d'une culture très diverse, parce que l'altérité dit tout à la fois la singularité et la généricité. Ce fut pour moi une chance réelle que d'être accompagnée par *Yves Chevallard* sur ces chemins souvent escarpés. Le temps de rédaction d'une thèse, qu'il conçoit comme un compagnonnage, s'il n'est pas toujours conciliable avec les temps institutionnel et personnel, m'a appris plus que je ne saurai le dire. Je l'en remercie très chaleureusement. Sa probité et son niveau d'exigence sans concessions sont un exemple que j'espère ne pas oublier.

Je remercie *Marianna Bosch* et *Maggy Schneider* d'avoir accepté d'être les rapporteures de ce travail, leurs commentaires sont autant d'encouragements à poursuivre ma tâche.

Je suis reconnaissante à *Jean-Luc Dorier* d'avoir assumé la présidence de mon jury de soutenance de thèse et je remercie *Michèle Artaud* – à qui je dois ma rencontre avec Yves Chevallard et dont le soutien tout au long de cette thèse fut sans faille –, et *Thierry Fack* – dont l'intérêt qu'il porte à la didactique des mathématiques est un soutien précieux à notre communauté – d'avoir accepté d'en être membres.

Je remercie l'INRP pour m'avoir aidée en m'accordant une décharge d'enseignement durant l'année de rédaction de ma thèse rendant ainsi plus compatibles mes vies professionnelle, étudiante et familiale.

Je remercie vivement tous ceux qui, d'une manière ou d'une autre, et à des degrés divers, m'ont aidée :
Les collègues qui ont accepté de répondre aux questionnaires, *Michel Julien* et *Yvette Massiera* qui m'ont fourni les cahiers d'élèves, ceux qui m'ont donné une référence ou prêté un document, en particulier *Gisèle Cirade* qui a eu la générosité de me fournir les questions des PCL1 relatives à la statistique qu'elle a collectées pour sa thèse.

Mais aussi,
mes collègues de l'IUFM de Lyon qui ont eu à supporter le surcroît de travail occasionné par ma décharge d'enseignement, alors que je rejoignais à peine leur équipe. En particulier, *Viviane Durand-Guerrier* dont l'indéfectible soutien me fut très précieux ;

mes collègues de l'IUFM d'Aix-Marseille qui m'ont toujours encouragée, notamment en veillant à ce que mon emploi du temps de Pr. Ag me laisse quelques libertés pour mon activité de recherche, beaucoup d'entre eux en m'offrant leur amitié m'ont aidée plus qu'ils ne l'imaginent ;

mes amis, dont l'inévitable question « alors, et ta thèse ? » exprimait autant leur impatience que l'intérêt qu'ils me portent ;

mes parents, ravis de m'avoir eu « en pension » le temps d'une rédaction estivale ;

Hervé, qui partage mes joies, mes peines, mes doutes et mes enthousiasmes depuis quelques temps déjà,
et puis, nos enfants qui ne savent que trop ce que absence i*n presentia* veut dire …

Gwenaëlle, Anne-Laure, Thibault, sortez les vélos, « quand j'aurai fini ma thèse », c'est maintenant !

Tables des matières

Introduction

Un repérage didactique

Le travail que nous présentons se situe au croisement de deux ordres de développement. Nous avons soutenu notre mémoire de DEA en septembre 2000, sous le titre *Les mathématiques du repérage dans la scolarité obligatoire* [1]. Ce travail, qui portait sur un thème minoré dans l'enseignement des mathématiques contemporain, mais auquel le nouveau programme de seconde qui allait s'appliquer à la rentrée 2000 pouvait donner une vigueur nouvelle, participait d'un intérêt plus large pour ce qui est, croyons-nous, l'un des grands problèmes dont pâtit l'enseignement français des mathématiques au secondaire : le repliement obstiné de la classe de mathématiques sur les objets réputés « purement mathématiques », les autres objets éventuellement présents faisant partie du décorum et restant en réalité extérieurs à l'élaboration de la connaissance. Le travail accompli sur la question du repérage aurait, certes, pu se poursuivre. Mais deux sortes de considérations nous ont fait alors opter pour un autre choix – au lieu du repérage, la *statistique*. Une première raison de changer tenait à l'objet lui-même. Le repérage renvoie à des savoirs et savoir-faire dont, dans la culture française d'aujourd'hui, la diffusion reste relativement confidentielle, confinés qu'ils sont dans des pratiques sociales « spéciales », certes sympathiques ou utiles, telles la navigation ou la randonnée, par exemple, mais qui n'ont pas actuellement un pouvoir mobilisateur permettant d'espérer, à leur égard, davantage qu'une attention érudite ou un intérêt tout pratique. Pour le dire autrement, la question du repérage est aujourd'hui ressentie comme moins *vive* qu'une autre question dont le nouveau programme de seconde se faisait le héraut : la statistique. Cette différence de valorisation dans la société [2] apparaissait alors concomitante d'une différence

---

[1] Wozniak (2000).

[2] L'intérêt « citoyen » pour le bon usage des statistiques et l'attention critique à leurs mésusages s'étaient notamment manifestés, en France, par une certaine activité éditoriale : voir ainsi Klatzmann (1996, 1re édition 1985) ou Gasquet-More (1999). L'association Pénombre, créée en 1993 « pour développer un espace public de

attendue de valorisation dans le travail des classes de seconde. On pouvait penser alors – à bon droit – que nombre de professeurs méconnaîtraient l'invitation somme toute discrète à travailler sur le repérage dans le plan, voire – dans le cadre des « thèmes d'étude » libres – sur la sphère, « avec application à la géographie et à l'astronomie ». Même si le programme de seconde soulignait qu'on y mettait « nettement l'accent sur la notion de repérage », on pouvait s'attendre, faute d'un accompagnement plus important, à ce que le travail consistant à repérer « des cases d'un réseau carré ou rectangulaire », à « interpréter des cartes et des plans », à « réfléchir aux avantages des divers types de repérage », à comparer « les repérages sur la droite, dans le plan (voire sur la sphère ou dans l'espace) » en évoquant à cette occasion « la notion de dimension », on pouvait s'attendre, donc, à ce que ce travail fût léger. Il en allait autrement s'agissant de la statistique. Dans ce cas, à une notoriété culturelle, scientifique, voire mathématique de bien plus grande intensité s'ajoutait un effort d'accompagnement sans précédent, en appui à un programme relativement substantiel, comportant notamment une innovation absolue, la *simulation*, et, plus largement, une problématique largement renouvelée, qui manifestait une tentative de ré-articuler le savoir enseigné aux pratiques et aux savoirs « savants » en la matière. Les enjeux étaient donc, subjectivement, scientifiquement, socialement, plus élevés. L'espoir que quelque chose allait se passer tant dans les classes de seconde que dans leur noosphère paraissait plus certain dans un cas que dans l'autre. C'est ainsi que, d'emblée, les professeurs avaient réclamé, souvent avec insistance, « de la formation » en statistique. Il ne semble pas qu'une demande analogue ait été formulée à propos du repérage ! Une large perspective s'ouvrait donc, s'agissant de la statistique, sur un ensemble de manifestations prévisibles, engendrées par la commotion imprimée au curriculum par le nouveau programme. Ces manifestations allaient pouvoir être observées tant dans les classes de seconde que dans la formation initiale et continue des professeurs, sans oublier les interventions et polémiques savantes et demi-savantes en matière statistique ou didactique au sein de la noosphère.

Tout un ensemble de travaux, dont notre propre travail de DEA, conduits dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique [3], s'étaient articulés à une notion ancienne et

---

réflexion et d'échange sur l'usage du nombre dans les débats de société », a ainsi développé un site Internet (http://www2.unil.ch/penombre/index.htm) et publié sous son nom tout un ouvrage (1999). Rappelons ici la prédiction de Herbert George Wells (1866-1946) si souvent citée dans la littérature en anglais sur la statistique : *Statistical thinking will one day be as necessary for efficient citizenship as the ability to read and write.*

[3] Sur cette approche théorique et ses principaux concepts (praxéologie, type de tâches, technique, technologie, théorie, etc.), voir par exemple Chevallard (2005).

quelque peu oubliée, celle de mathématiques *mixtes*, pour penser et approfondir la résistance de l'enseignement des mathématiques à la mixité objectale et au métissage épistémologique [4]. De ce point de vue, le renouvellement de l'étude de la statistique en seconde allait une fois de plus mettre en scène l'antique refus, quasiment consubstantiel à notre enseignement des mathématiques, d'entretenir un commerce vivant avec des réalités tenues pour non mathématiques. Dans la mesure, en effet, où on définit la statistique comme la science de la variabilité, dans la mesure où cette variabilité est celle des phénomènes naturels et sociaux du monde qui nous entoure, le problème ne pouvait manquer de surgir de l'organisation des rapports de l'enseignement donné avec l'univers des « grandeurs variables » concrètes dont la statistique fait normalement son objet. De ce point de vue, le travail que nous avons alors envisagé de faire – et que nous présentons ici – a eu pour ambition d'ouvrir à l'analyse didactique de type anthropologique un domaine qui n'avait pas récemment été travaillé dans cette perspective [5].

Le corpus des mathématiques enseignées dans le secondaire se présente presque naturellement comme divisé en trois grands domaines, dont deux forts anciens. On a pu définir autrefois les mathématiques comme la science de la *quantité* et de l'*étendue*. L'étendue ou, comme nous le dirons, la « spatialité », est l'objet des sciences géométriques – disons, pour faire court, de la géométrie. La quantité, que l'on pourrait appeler aussi la « numérosité », est l'objet des sciences arithmétiques. Le troisième domaine, inconnu des mathématiques il y a quelques siècles, est celui de la *variabilité* : il est l'objet propre de la statistique. Bien entendu, en chaque domaine, l'objet premier, primordial – spatialité, numérosité, variabilité – va s'augmenter, avec les progrès de la connaissance mathématique, d'objets construits, internes au mouvement de mathématisation (et regardés pour cela comme « purement » mathématiques), qui vont donner aux mathématiques leur puissance d'intelligibilité et leur opérativité. C'est ainsi que, en géométrie, grâce à la création des calculs vectoriel, barycentrique, etc., on apprendra tardivement – à partir du XIXe siècle, pour l'essentiel – à calculer sur des objets sur lesquels on n'avait su longtemps que raisonner. Sur la base de l'arithmétique primitive se construiront, de même, différents calculs – algébrique, différentiel, intégral, etc. C'est là sans doute que ces deux domaines traditionnels – le

---

[4] Sur ce thème, voir Chevallard (2001b).

[5] Dans le cadre d'une recherche menée conjointement à l'IREM de l'académie d'Aix-Marseille et au CNAM à Paris, Yves Chevallard avait, en 1977-1978, rédigé quelque 430 pages de notes internes intitulées *Didactique de la statistique*, ainsi qu'une série de neuf fascicules intitulée *Didactique des tests statistiques* comptant au total près de 300 pages.

géométrique et le numérique – se différencient sensiblement, par leur état historique actuel de développement, du domaine de l'aléatoire : un long travail d'épuration a en effet séparé l'espace « pur » et la quantité « pure » des situations spatiales ou numériques concrètes et, en un sens, forcément « métissées ». De là est sortie la géométrie déductive, qui ne compte guère que sur elle-même, si l'on peut dire, et dont le succès scolaire ne s'est, jusqu'à aujourd'hui, pas démenti [6]. De là est sorti également un abord de la quantité qui a, plus récemment sans doute, refoulé profondément le lien du nombre à la grandeur qu'il permet de mesurer ou de nombrer [7]. De cette séparation par épuration, la distinction des mathématiques *pures* et des mathématiques *mixtes* (qui deviendra après 1800 celles des mathématiques pures et des mathématiques *appliquées*) s'est, pendant plus de deux siècles, fait l'écho. Par rapport à ce long processus historique, la statistique, saisie dans son état primordial, celui de l'étude aussi naïve qu'on voudra de la variabilité, apparaît aujourd'hui encore – hormis lorsqu'elle se fait *statistique mathématique* au sens des spécialistes de cette discipline [8] – comme un domaine des mathématiques « mixtes » où le processus d'épuration ontologique n'a pas encore trouvé sa formule, sauf à prendre le risque de tuer la statistique en lui substituant un calcul des probabilités élémentaires où, comme on le sait, le « métissage » ontologique se réduit à peu près à l'évocation de pièces, de dés et d'urnes. Nous savons pourtant, aujourd'hui, cinq ans après l'entrée en vigueur du nouveau programme de seconde, qu'une voie d'épuration a été trouvée, que l'on a commencé à pratiquer : celle de la *simulation*, dont nous verrons qu'elle permet subrepticement, mais réellement, de refouler le réel extramathématique hors de la classe de mathématiques, en découvrant au fil de notre enquête en quoi cette ébauche spontanée de résolution des tensions entre « mathématique » et « non-mathématique » ne peut guère être regardée comme anodine.

D'une façon générale, l'enseignement secondaire des mathématiques, en ses trois domaines, souffre du rejet persévérant de l'objet même – les faits de spatialité, les faits de numérosité, les faits de variabilité – qu'il s'agirait pourtant, en principe, de mathématiser afin de parvenir avec eux à un commerce fait d'intelligence conceptuelle et d'efficacité pratique. Mais quand on s'interroge, comme doit le faire le didacticien, sur les raisons de ce rejet et sur les voies d'une levée possible de l'interdit, quand on le fait en tout cas en un travail outillé par la théorie anthropologique du didactique, il devient rapidement évident que la manière la plus

---

[6] Voir Chevallard (2004b).

[7] Voir Chevallard & Bosch (2001).

[8] Voir par exemple Raoult (1975).

commune de poser ce problème échoue à en percevoir la complexité, en sorte que les solutions qu'on prétend lui apporter peuvent malheureusement se résumer, pour le dire crûment, en une suite de « y a qu'à » et de « faut qu'on ». Quelle qu'en soit la générosité, l'abord confiant et sans façon des choses didactiques rend un son incontestablement naïf. Par contraste, l'ambition nécessairement et volontairement limitée de notre travail a été de reconnaître et, espérons-le, par là, de faire reconnaître, toute l'épaisseur du système des contraintes et des conditions qui déterminent, surdéterminent mais parfois aussi, heureusement, sous-déterminent l'état du projet social de diffuser les connaissances et savoirs statistiques jugés utiles. Tout enseignement, nous semble-t-il, doit être abordé comme ce que Marcel Mauss (1873-1950) appelait *un fait social total* [9]. C'est ce que nous avons tenté de faire.

[9] À ce propos, un auteur contemporain a pu écrire ceci, que nous faisons nôtre (Tarot, 1999, p. 663) : « Le fait social total n'est sûrement pas la totalité exhibée d'une société, car qui a jamais pu saisir pareille totalité, même dans la meilleure des monographies ? Il est cette propriété unique des faits qui sont l'objet même de la science de l'homme, d'être signifiants, c'est-à-dire partiels, contingents, arbitraires et cependant reliés, rattachés, dépendants toujours de quelque chose qui est en eux, à la fois manifesté et caché par eux. »

Chapitre 1

Enseignements de la statistique

1. Des débuts hésitants

L'histoire de l'enseignement de la statistique en France a été ébauchée par plusieurs auteurs [1] dont nous tirerons ici certains matériaux pour situer notre propos, sans entrer pour autant dans le détail d'un panorama dont nous soulignerons surtout les principales lignes de force. Notons d'emblée un fait essentiel : le retard tant absolu que relatif (notamment par rapport à l'Allemagne) du développement d'un enseignement de la statistique ayant pignon sur rue. Longtemps en effet, au XIXe siècle et encore dans le premier tiers du XXe, l'enseignement de la statistique ne fait l'objet que de tentatives qui, quels que soient l'engagement et le pouvoir de conviction de leurs auteurs, apparaissent soit très limitées, soit promises à un échec rapide [2]. Nommé en 1876 professeur de démographie à l'école d'anthropologie de Paris (créée en 1875 par Paul Broca), Louis-Adolphe Bertillon (1812-1883) y consacre quelques conférences chaque année à l'enseignement des méthodes statistiques [3]. Semblablement, Émile Cheysson (1836-1910) donne un enseignement sous forme de conférences à l'École des ponts et chaussées à partir de 1881. D'autres tentatives échoueront platement. Dans tous les cas, le nombre d'auditeurs est très restreint : la statistique ne fait pas recette ! Les militants de cette

[1] Armatte (1991), Bédarida (1977), Desrosières (1993), Desrosières *et al.* (1977), Le Van-Lemesle (2004), Meusnier (2004), Morrisson (1987), Pressat (1987).

[2] Pour des exemples de ces tentatives infructueuses, voir Meusnier (2004).

[3] Bertillon est un militant de la « méthode statistique ». Dans la préface d'un ouvrage publié en 1857, qu'il consacre à la question de la « vaccine » – la vaccination –, il écrit notamment : « … une source de découvertes vaut mieux qu'une découverte, comme une mine d'or vaut mieux qu'un morceau d'or. Selon nous, la vaccine est le morceau d'or, mais la statistique est la mine d'or. C'est donc surtout le désir de mettre en honneur la statistique négligée qui nous a soutenu dans le travail ; c'est l'espoir de faire sentir la puissance de cette méthode de recherche et d'analyse à ceux que leurs études et leur profession mettent à même dans retirer le plus grand fruit. »

discipline, qui ne ménagent pas leurs efforts, se prévalent de l'exemple allemand. Un séminaire de statistique, créé dès 1862 à Berlin pour la formation des fonctionnaires du Bureau de statistique, compte vers 1890 de 45 à 60 élèves. La plupart des universités allemandes possèdent dès cette époque des chaires de statistique, alors qu'en France la première chaire ne sera créée (pour Fernand Faure, à la faculté de droit de Paris) qu'en 1892. Dans un ouvrage paru en 1883, Émile Levasseur (1828-1911) dresse le bilan suivant :

> Elle [la statistique] n'a pourtant dans l'enseignement officiel qu'une seule chaire qui lui soit consacrée, celle du Conservatoire des Arts et Métiers, et une chaire où, de temps à autre, elle a accès, celle d'histoire et géographie économiques du Collège de France ; il faut y ajouter le cours d'anthropologie, les conférences de l'école des Ponts et Chaussées et le cours de statistique de l'École des sciences politiques. Ce n'est pas suffisant pour former non seulement des hommes de science, mais des fonctionnaires munis des connaissances qui leur permettent de se servir de la statistique et d'en faire avec intelligence.

L'itinéraire de Levasseur mérite qu'on s'y arrête un instant [4]. Normalien de la promotion 1849, il enseigne d'abord en lycée[5] de 1852 à 1868, date à laquelle il est élu membre de l'Académie des sciences morales et politiques dans la section d'économie politique, statistiques et finances. La même année il est chargé du cours d'*histoire des faits et doctrines économiques* au Collège de France. L'année 1871 le consacre comme enseignant : son cours au Collège de France est transformé en chaire sous le nom de *géographie et histoire économiques*. Cette même année il participe à la création de l'École libre des sciences politiques en prenant en charge, quasiment jusqu'à sa mort (huit jours avant de disparaître, à 82 ans, il faisait encore passer des examens), le cours d'initiation à la statistique [6]. En décembre 1877, il devient titulaire de la chaire d'économie politique et de législation industrielle au CNAM, où il restera jusqu'en 1907. Le rôle et la place qu'il assigne à la

---

[4] Nous suivons ici Le Van-Lemesle (1994).

[5] Professeur de rhétorique au lycée Saint-Louis à Paris, Levasseur eut parmi ses élèves de seconde, durant l'année scolaire 1857-1858, le jeune Émile Zola (1840-1902), qui arrivait d'Aix. Un ancien condisciple – Paul Alexis (1847-1901), aixois comme lui – racontera plus tard la scène suivante : « Un jour, le sujet de la narration donnée était celui-ci : *Milton aveugle, dictant à sa fille aînée, tandis que sa seconde fille joue de la harpe*. J'ignore quelles fioritures de style dut broder le jeune lycéen sur ce thème académique. Mais le professeur, M. Levasseur, aujourd'hui membre de l'Académie des Sciences morales et politiques, fut si enchanté qu'il lut la narration devant toute la classe, et fit solennellement la prédiction à l'élève Zola d'un talent futur. » (Voir http://paul_henri.clavier.club.fr/biographiezola.htm).

[6] Levasseur lui-même précise que, jusqu'en 1877, ce cours inclura la statistique de la population, de l'agriculture et de l'industrie. Après 1877, il se limitera à la démographie.

statistique dans son enseignement sont ainsi décrits dans un article qu'il publie en 1901 sous le titre *L'enseignement de l'économie politique au CNAM* :

> L'histoire et la statistique contribuent à donner une notion plus souple, et partant plus réelle et plus vivante des principes. Elles montrent dans quels milieux et dans quelle succession se sont produits des phénomènes économiques… Les lois qui en dérivent au lieu de se poser comme des dogmes absolus, apparaissent comme une conséquence naturelle ou comme une condition du développement de la société ; ce que le principe perd en rigidité il le gagne en vérité.

Même si son œuvre est très loin de se réduire à cela, Levasseur fut un ardent propagandiste de la statistique. Son ouvrage de démographie, *La population française*, qui paraît en 1889, contient ainsi une introduction de quelque 75 pages consacrées à la statistique. Membre actif de la Société de statistique de Paris, il participe aux neuf congrès internationaux de statistique tenus de 1855 à 1876. Membre fondateur de l'Institut international de statistique en 1885, il sera chargé de la grande enquête statistique sur l'enseignement primaire en 1871 et rédigera en 1898 la notice sur la statistique dans le *Nouveau dictionnaire d'économie politique*.

En dépit d'un tel engagement, les choses n'avancent que fort lentement. Se référant aux pays circonvoisins de la France dans un « Rapport sur l'enseignement de la statistique et les programmes d'examen d'admission dans les administrations publiques », Faure, qui avait créé un cours de statistique à la faculté de droit de Bordeaux dès 1889, écrira en 1894 : « On ne peut, sans quelque humiliation, comparer à ce qui existe dans ces pays, ce qui existe en France ». La plainte contre le faible écho soulevé par l'offre d'enseignement de la statistique se complète, chez les militants de cette discipline, d'une mise en cause institutionnelle : la « voie statistique » dans les administrations reste virtuelle car, soulignent-ils, elle ne conduit à rien de bien glorieux ! Un membre du Conseil supérieur de la statistique [7] s'exclame ainsi en 1889 : « Les bureaux de statistique seraient un bien mauvais choix pour un jeune homme qui désire s'élever dans la carrière administrative. » La distribution des connaissances statistiques dans la société paraît alors particulièrement contrastée. D'une manière générale, les travaux pour lesquels d'aucuns réclament une formation expresse en la matière sont largement considérés comme n'appelant pas une telle expertise. Dans une préfecture, ainsi, c'est le préfet qui répartit les travaux statistiques entre les employés ; le Conseil supérieur de la statistique ayant suggéré que celui-ci confie toujours aux mêmes personnes ces travaux spécialisés et que ces personnes suivent à Paris des stages de formation, on lui répond qu'une

[7] Ce conseil, créé le 22 février 1885, est une instance de consultation sur l'organisation des travaux statistiques dans les administrations.

telle restriction nuirait à l'indépendance des préfets ! De fait, la statistique semble ne vivre vraiment que dans la proximité de travaux savants qui, depuis parfois longtemps, font appel à ses services et auxquels celle-ci reste ainsi attachée. Au Collège de France, Émile Levasseur tente d'organiser un enseignement des méthodes statistiques en démographie mais devra bientôt renoncer devant la pénurie d'auditeurs. De même, la Société de Statistique de Paris [8], qui compte alors plusieurs centaines de membres, lance en 1883 des conférences qu'elle interrompt dès 1885, pour des raisons analogues [9]. S'il a existé et s'il existe parfois un véritable engouement pour le recueil de données statistiques [10], il n'existe guère, apparemment, de curiosité véritable pour les outils de la statistique : l'impression prévaut que, là comme en d'autres domaines, la culture commune postule qu'il n'y a « rien à savoir » pour agir convenablement. Devant cette réticence, les promoteurs des savoirs statistiques tentent des manœuvres palliatives : le Conseil supérieur de la statistique souhaite ainsi que les concours de recrutement des rédacteurs des administrations centrales fassent une place à des notions élémentaires de statistique avec, en outre, attribution de points supplémentaires pour les candidats munis du diplôme de la Société de statistique de Paris. Dans un « Rapport sur l'enseignement de la statistique » daté de 1890, Cheysson écrit ainsi sans détour : « L'attrait du sujet (la statistique et ses méthodes) ne suffit pas : il faut y ajouter l'incitation des examens et mettre en jeu l'intérêt du candidat ».

[8] La Société de Statistique de Paris (SSP) est créée le 5 juin 1860 par des « statisticiens » du Bureau de la statistique de France, des économistes, des sociologues, des médecins (dont L.-A. Bertillon). Elle succède à la Société de statistique universelle fondée le 23 novembre 1829 à Paris par Claude Moreau, précédemment ambassadeur de France à Londres, et comptera sept ans plus tard 1055 membres, dont Quételet. La SSP a été fusionnée en 1997 avec l'Association pour la Statistique et ses Utilisations (ASU), créée en 1969, et la Société Statistique de France (SSF) créée en 1974, au sein de la Société Française de Statistique (SFdS), association loi 1901 reconnue d'utilité publique en 1998. Voir Rosenfeld (1997).

[9] La Société de statistique universelle de Claude Moreau, dont l'objectif était d'abord de « susciter dans les milieux les plus divers un intérêt pour les recherches statistiques, encourager ces recherches parmi ses membres et les faire connaître », se proposait en outre de « fonder une chaire de statistique comparée, enseignement entièrement nouveau en France, et qu'elle considère comme indispensable au succès de sa mission ».

[10] François Bédarida (1977) illustre cet engouement dans les termes suivants : « … en 1850 le secrétaire de la *National Philanthropic Association* avait proposé à la Société de Statistique de Londres d'entreprendre une enquête pour calculer la quantité de crottin quotidiennement déposée dans les rues de la capitale ».

2. Un choix sous contraintes

L'organisation de la diffusion des savoirs statistiques comme celle des autres savoirs doit en passer, dans la société française d'alors, par les contraintes qu'impose une configuration institutionnelle où l'on peut distinguer trois grandes traditions. L'institution sans doute la plus typiquement française est liée à l'organisation des agents de l'État en grands corps (ingénieurs, officiers, etc.), à chacun desquels se trouvent associées une ou plusieurs écoles de formation – écoles d'ingénieurs, écoles d'officiers, etc. Ajouter un nouveau corps savant et une nouvelle « école du gouvernement » est sans nul doute ce que nombre de responsables de haut niveau ont en tête s'agissant de la statistique. Ce scénario « par le haut » se réalisera tardivement, par la création du corps des administrateurs civils de l'INSEE et de l'école de formation qu'est l'ENSAE [11]. Longtemps, en effet, ce schéma idéal devra rester virtuel [12]. Une autre institution pouvait donc être envisagée : celle des universités qui, avant leur réforme dans le dernier tiers du XIX^e^ siècle, proposent un modèle moribond de cours libres, avec, souvent, fort peu d'auditeurs [13]. À côté des deux facultés « professionnelles » que sont les facultés de droit et de médecine, il y a les facultés « académiques » de lettres ou de sciences, dont la fonction essentielle est de collecter les grades [14], et qui n'ont pas de programmes d'enseignement. En sciences, en dépit des instructions ministérielles du 30 novembre 1855 qui imposent que « les programmes de licence seront la base de l'enseignement », les professeurs disposent d'une grande liberté pour traiter les sujets de leur choix. Pour remédier aux carences des facultés des lettres et des sciences, qui sont loin de répondre à la demande sociale d'enseignement, Victor Duruy (1811-1894), ministre de l'Instruction publique de 1863 à 1869, encourage la pratique des cours libres à l'intérieur des

---

[11] L'INSEE sera créé par une loi du 27 avril 1946, son école d'application deviendra l'ENSAE en 1960. Nous revenons plus loin sur la généalogie de ce couple d'institutions.

[12] Morrisson (1987) note à ce propos : « Le Conseil supérieur de la statistique avait envisagé en 1890 la création d'une telle école d'application, sur le modèle des Écoles des ponts et chaussées, des mines, des eaux et forêts… mais avait jugé ce projet impossible parce qu'une école d'application suppose un "corps homogène, nombreux et centralisé" […], alors qu'il existait seulement des "petits groupes d'agents, relevant non seulement de tous les ministères, mais encore de toutes les préfectures, fonctionnant isolément, sans pénétration réciproque" […] » (art. cit., pp. 814-815).

[13] Nous suivons ici Verger (1986).

[14] Les facultés « académiques » délivrent trois grades (Verger, *op. cit.*, p. 270) : le baccalauréat (qui donne le droit d'enseigner dans les collèges communaux et les classes inférieures des lycées jusqu'à la 3^e^ incluse), la licence ès lettres ou ès sciences (qui permet d'enseigner en lycée) et le doctorat (qui ouvre les portes de l'enseignement à la faculté).

facultés (l'usage en était répandu largement à l'extérieur), qu'assument d'abord des agrégés et des docteurs, et qui, sous la III^{e} République, seront institutionnalisés avec la création des maîtrises de conférences et des charges de cours. Mais ces modifications apparaissent insuffisantes encore : considérant que le niveau de recrutement aux grands corps de l'administration (Conseil d'État, Inspection des finances, Cour des comptes), rend nécessaire le développement d'une formation de haut niveau, et regardant comme excessif le monopole exercé par l'Académie des sciences morales et politiques sur la formation des enseignants et dans la recherche, Duruy crée d'après le modèle allemand, par un décret du 31 juillet 1868, l'École Pratique des Hautes Études (EPHE), dotée d'abord de quatre sections (mathématiques, physique et chimie, histoire naturelle et physiologie, sciences historiques et philologiques), et qui – il s'agit d'une originalité absolue – est exclusivement vouée à la recherche et aux formations savantes, sans avoir à assumer de fonctions secondaires (conservation de collections, recherche appliquée, etc.). L'EPHE va servir de pôle de développement et de modèle de transformation pour les facultés académiques (auxquelles appartiennent la plupart de ses enseignants) : durant les années 1880, la croissance économique engendre un fort besoin de techniciens et de dirigeants, que les grandes écoles (dont les élèves ne vont pas alors vers le secteur privé) ne permettent pas de satisfaire ; pour répondre à cette impérieuse pression vont alors naître l'École libre des sciences politiques en 1872, l'École des hautes études commerciales en 1881, l'École supérieure de physique et chimie en 1882. Le souffle rénovateur atteint bientôt les facultés de médecine et de droit : en médecine, l'année 1878 voit la création d'une première année d'études scientifiques dite de PCN (physique, chimie, sciences naturelles) qui, rapidement, se fera dans les facultés de sciences et, à partir de 1893, se conclura par la délivrance d'un certificat ; en faculté de droit, l'économie politique devient obligatoire en deuxième année (décret du 26 mars 1877), ce qui ouvre la voie à une plus grande diversité des domaines disciplinaires enseignés, sans pour autant que naisse encore une licence distincte : en 1896 seront ainsi créées quatre filières (droit public, droit privé, histoire du droit, économie politique) qui spécialisent l'agrégation. Par ailleurs, les réformes des années 1870 apportent d'importants moyens financiers aux facultés académiques. L'année propédeutique aux études médicales réalisée dans les facultés de sciences a considérablement accru le nombre d'étudiants qui sont à présent soumis à l'assiduité. Mais c'est le développement des sciences appliquées qui va permettre à leurs étudiants de trouver des débouchés dans les industries ; cela conduit à la création d'instituts de sciences appliquées dans la plupart des facultés, dont les meilleurs rivaliseront avec les grandes écoles.

Mentionnons enfin une troisième tradition : celle des sociétés qui se vouent à la diffusion des connaissances en visant un public généralement bourgeois, même si d'autres segments de la population peuvent parfois être atteints [15]. Cette troisième voie est représentée, dans le domaine de la statistique, après la Société de statistique universelle, par la SSP : on a dit que celle-ci avait tenté de populariser la statistique au-delà de ses membres – au nombre de 120 en 1880, de 373 en 1882, de 742 en 1931 –, au moyen de conférences qui n'eurent guère de succès. Quelles voies va donc emprunter essentiellement la diffusion sociale des savoirs statistiques ? À la fin du XIXe siècle, la première voie indiquée plus haut – celle des « corps savants » – n'est guère praticable. On peut toutefois en voir une ébauche dans l'effort que Lucien March (1859-1933) engage autour du recensement de 1896. Chargé à la Statistique générale de la France (SGF) du dépouillement de la partie professionnelle de ce recensement, March, ingénieur de l'Office du Travail [16], forme la centaine de personnes qui y participent et crée une bibliothèque d'ouvrages statistiques comportant notamment des publications venant de l'étranger. L'objectif, en l'espèce, n'est pas de former un véritable corps savant mais de simples techniciens des opérations statistiques. Il ne s'agit pas davantage de créer une école « d'application » séparée du corps auquel elle formerait, mais une « école » intégrée à l'entreprise même qu'elle doit servir. Pourtant, la deuxième voie est celle qui sera tentée le plus rapidement : elle va se matérialiser par la création de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris (ISUP), institution qui proposera des enseignements de haut niveau avec des enseignants de qualité, authentiques hommes de l'art en général, qui devront pourtant chercher leur public.

[15] De manière caractéristique, l'historien François Bédarida (1977) peint ainsi les sociétés de statistique qui émergent en nombre en Angleterre dans les années 1830 : « C'est le même mélange d'esprit de curiosité et de volonté d'action pratique qui au même moment a poussé à travers le pays des hommes de la classe moyenne – manufacturiers, banquiers, médecins, clergymen – à créer des sortes de sociétés savantes orientées vers l'enquête statistique ». « Possédés par la passion de la connaissance et de la réforme », note-t-il encore, « les pères fondateurs de ces sociétés – dont la plupart furent éphémères, à l'exception de celles de Londres et Manchester, toujours actives – n'étaient que rarement des statisticiens au sens moderne du terme » (art. cit., p. 495).

[16] Le Bureau de statistique créé par Thiers en 1834 devient la Statistique générale de la France en 1840, qui sera rattachée à l'Office du Travail, créé en 1891 au sein du ministère du Commerce et de l'Industrie, avec pour objet de collecter et coordonner les données relatives au travail. À partir de la fin de 1907, les statisticiens de la SGF seront recrutés par un concours de haut niveau, auquel l'*Exposition de la théorie des chances et des probabilités* publiée en 1843 par Antoine-Augustin Cournot (1801-1877) sert de base. Mais les concours seront très irréguliers et les recrutements peu nombreux.

3. Une institution pionnière : l'ISUP

La création de l'ISUP reprend autrement les efforts de March menés à bien dans le cadre de la SGF. Comme pour d'autres innovations, la guerre de 1914 a joué à cet égard un rôle important [17]. Des liens nouveaux ont été créés entre des personnages qui vont jouer un rôle éminent. Le mathématicien Émile Borel (1871-1956), qui devient en 1917 secrétaire général de la présidence du Conseil, tente sans y réussir de donner une meilleure place à la SGF. François Simiand (1873-1935), maître incontesté de la sociologie économique, intervient en 1921, avec Émile Borel encore, à côté du statisticien André Liesse (1889-1964) et de l'industriel Édouard Gruner (1843-1933), auprès du président de la République Alexandre Millerand (1859-1943), qui avait été ministre du Commerce et de l'Industrie de 1899 à 1902 et avait eu à ce titre dans ses attributions l'Office du travail et la SGF. L'idée est, à nouveau, de renforcer la SGF. Celle-ci pourtant n'évoluera que peu, en attendant la création du service national des statistiques (1940) puis, à la Libération, celle de l'INSEE : elle reste pour l'heure un service relativement modeste – une centaine de personnes y travaillent –, qui sera dirigé de 1920 à 1936 par Michel Huber (1875-1947).

Les choses évoluent davantage touchant l'enseignement de la statistique, sans pourtant qu'un lien fort existe encore entre la création de l'ISUP et les besoins de la SGF (dont Simiand demandera à nouveau, en 1932, mais toujours sans succès, le développement et l'autonomisation). Sous l'impulsion, entre autres, de Lucien March, Émile Borel, Georges Darmois (1888-1960), l'ISUP est créée le 26 juillet 1922 par un décret approuvant une délibération du conseil de l'Université de Paris. Alain Desrosières, qui a pu interroger Henri Bunle (1884-1986), autre artisan de la création de l'ISUP, fait ce récit [18] : « March envoie (au lendemain de la première guerre) le statisticien Henri Bunle en prendre possession (du service statistique créé par les Allemands en Alsace, lors de l'annexion de cette province), et celui-ci frappé par la compétence des statisticiens allemands, et stimulé à ce sujet par Halbwachs et Fréchet, plaide auprès de March, une fois revenu à Paris, pour la création d'un Institut de statistique universitaire ». L'expérience de la rationalisation statistique dans la gestion d'une économie de guerre se conjoint avec une autre « rencontre », qui jouera un rôle essentiel : celle de la statistique avec les probabilités, que manient puissamment des mathématiciens comme Maurice Fréchet (1878-1973) ou Émile Borel, lesquels ne manquent pas d'influer sur

[17] Nous suivons ici en partie Desrosières (1993), pp. 193 *ssq*.

[18] Desrosières (1985), cité *in* Pressat (1987), p. 22.

l'évolution des choses [19]. Le climat est au rapprochement entre statisticiens, administratifs, mathématiciens et sociologues : en 1924, par exemple, Fréchet signe avec Maurice Halbwachs (1877-1945), sociologue héritier de Durkheim, un opuscule intitulé *Le calcul des probabilités à la portée de tous* [20].

L'ISUP est placée officiellement sous la direction scientifique des quatre facultés parisiennes – de droit, de sciences, de médecine et de lettres. Son objectif est d'enseigner « la méthode statistique et ses applications ». L'acte constitutif lui donne un objet pluriel et bigarré : méthodes statistiques et applications des mathématiques à la statistique, aux finances et à l'économie politique ; démographie, biométrie, hygiène et instruction publiques ; assistance, prévoyance et assurance ; industrie, commerce, agriculture, transports, banque et crédit ; enfin finances publiques. Le cursus des études comporte deux années [21]. La première année se compose de deux cours obligatoires ; le premier, intitulé « La méthode statistique (Éléments) » correspond *grosso modo* à ce qu'on appelle aujourd'hui statistique descriptive, tandis que le second cours, intitulé d'abord « Application des mathématiques supérieures à la statistique », est nommé dès 1927-1928 « Éléments de statistique mathématique ». En 1925-1926, le premier cours comporte 25 leçons, le second 12. Le premier est enseigné par Lucien March (et le sera ensuite pendant quelques années par Michel Huber), tandis que le second est pris en charge par Georges Darmois (après l'avoir été en 1922-1923 et 1923-1924 par Émile Borel). L'étudiant de première année de l'ISUP doit choisir encore deux autres cours au choix : en 1925-1926, les étudiants peuvent ainsi suivre un cours de démographie et statistique sanitaire par Michel Huber, un cours de théorie des assurances sur la vie par M. Hochart, un cours sur les opérations financières d'Alfred Barriol, enfin des éléments

---

[19] Borel, qui est membre du conseil de la SGF de 1907 à 1936, assiste à ce titre successivement March puis Huber.

[20] Fréchet a suivi les cours de statistique à la faculté de droit de Paris en 1910. Il est lui même chargé de cours de statistique et assurances à l'Institut commercial d'enseignement supérieur de Strasbourg de 1924 à 1929. Durant cette période, il rencontre Halbwachs, professeur à la faculté des lettres, lui aussi chargé d'un cours de statistique. De leur rencontre naîtra l'ouvrage indiqué, qui obtint le prix Montyon en 1925. Dans la préface, Fréchet explicite le rôle de chacun des auteurs dans la conception de l'ouvrage : celui-ci « tire son origine d'une série de leçons sur les probabilités faites à l'université de Strasbourg en 1921 par l'un des auteurs, rédigées, complétées, remaniées et mises au point en collaboration avec l'autre ». Ce livre s'adresse « aux médecins, démographes, économistes, actuaires et agents d'assurance […] qui veulent posséder la théorie de leur art » et a vocation, d'après les auteurs, à devenir un outil de préparation aux examens de l'Institut des actuaires, de la SGF et du contrôle des assurances. Voir Armatte (2001).

[21] Nous suivons ici Pressat (1987), pp. 23 *ssq*.

d’économie politique mathématique avec Jacques Rueff (1896-1978). La deuxième année suppose que l’étudiant suive deux cours à option, dont l’un peut être choisi en dehors de l’ISUP : en 1929-1930 il est ainsi possible de suivre l’enseignement d’Albert Aftalion (1874-1956) sur « le rythme de l’activité économique et les méthodes statistiques » que ce dernier donne à la Faculté de droit en 45 leçons. À l’issue de la première année est délivré un simple certificat d’aptitude, le diplôme de l’institut de statistique venant ensuite couronner le cycle complet de deux années d’étude. L’obtention de ce diplôme exige du candidat, outre la réussite aux deux options prévues, qu’il ait rédigé un mémoire. Mais cette exigence n’est en général pas assumée par les candidats potentiels, si bien que sera rapidement créé un certificat supérieur d’études statistiques que l’on peut obtenir sans avoir rédigé de mémoire.

La situation de l’enseignement de la statistique à l’ISUP dans ces premières années montre un ensemble de traits relativement caractéristiques. Les étudiants français semblent peu attirés par ce qui y est proposé : pour la période 1925-1939, 68 % des titres délivrés sont obtenus par des étudiants étrangers. Le nombre de titres délivrés lui-même est faible : sur la période 1925-1932, on en compte 4 en moyenne par an. Les mémoires des étudiants – ils sont 46 à obtenir le diplôme avant 1940 – portent sur des thèmes dont l’étude mobilise peu de savoir statistico-mathématique. À tous égards, le démarrage est donc lent. Pourtant l’obligation de suivre, en première année, les deux cours de méthode statistique, et notamment le second, marque fortement les étudiants, même quand ils choisissent ensuite de s’éloigner des outils que ces enseignements leur ont apportés. En 1925-1926, le second cours de première année comporte ainsi les 12 leçons suivantes :

> 1) Statistique des caractères. Association. 2) Statistique des variables. Courbes de fréquence. 3) Moyennes. Écarts. Corrélation. 4) Applications. 5) Corrélation multiple. 6) Applications. 7) Stabilité des fréquences. Probabilité. Principes fondamentaux. 8) Épreuves répétées. Théorème de Bernoulli. Loi de Laplace. 9) Applications. 10) Polygones dissymétriques. Loi des petits nombres. 11) Ajustement des statistiques. Dispersion. Schéma des urnes. 12) Écart des observations.

Ce cours comportera 20 leçons en 1938-1939, mises au service de huit regroupements thématiques :

> La statistique, stabilité des fréquences. Probabilité. Théorèmes fondamentaux. (leçons 1, 2, 3)
> Variables aléatoires, grandeurs aléatoires. Moyennes. Espérance mathématique. Méthode de Tchebichef pour la loi des grands nombres. (4, 5, 6)
> Epreuves répétées. Loi limite de Laplace. Loi limite de Poisson pour les petites probabilités. (7, 8)
> Schémas d’urnes. Tirages indépendants. Tirages dépendants. (9, 10)
> Polygones de fréquence. Courbe de fréquence. Représentations analytiques. (11, 12)

Corrélation. Lignes de régression. Coefficients de corrélation, de contingence. Corrélation totale et partielle. Corrélation des rangs. (13, 14)
Méthodes d'estimation. Qualité de l'ajustement. (15, 16, 17, 18)
Les coefficients d'ajustement fonctionnel. La dépendance des variables aléatoires et le coefficient de corrélation. Conclusions générales. (19, 20)

Cet effort de diffusion des savoirs statistiques, qui ne trouvera une vraie réussite qu'après la guerre, n'est pas complètement isolé. Du côté des mathématiques, une option statistique est créée en 1929 dans le cadre de la chaire de calcul des probabilités de la Faculté des sciences de l'Université de Paris – chaire que Henri Poincaré (1854-1912) avait occupée de 1886 à 1896. Les étudiants, qui ne se pressaient guère [22], complétaient de préférence leur formation en statistique mathématique en suivant les cours de l'ISUP [23]. D'autres enseignements de statistique – sinon de statistique mathématique au sens strict – existent alors en d'autres institutions, ce qu'on peut regarder comme un indice d'une tendance dont le fruit ne viendra à maturité qu'après la guerre. Alfred Liesse enseigne ainsi au Conservatoire des arts et métiers, où François Divisia (1889-1964) lui succèdera, avec toujours une même intention d'œuvrer pour instruire plus adéquatement ce que Liesse appelait « la foule des statisticiens improvisés ». À la Faculté de droit, le cours d'Albert Aftalion, qui a certes évolué depuis celui de Fernand Faure, ne comporte toutefois, selon René Roy, « qu'une initiation très élémentaire à la technique statistique ». Ajoutons à cela certains des cours de l'Institut de science financière et d'assurances de Lyon, où l'on trouve un enseignement qu'on peut regarder, selon Roy (1937), comme de statistique mathématique. Le bilan est réel mais reste limité.

4. Vers un texte du savoir statistique

Ce qui se publie sous le nom de statistique sera longtemps divers, voire divergent : les polémiques entre auteurs ne sont pas rares. En 1908 paraît ainsi la *Statistique mathématique* de Hermann Laurent (1841-1908), alors répétiteur à l'École polytechnique. Laurent attaque vivement ceux qui manient sans connaissances mathématiques suffisantes des données

[22] En octobre 1925, il n'y eut par exemple que 5 candidats à l'examen de calcul des probabilités.

[23] Se référant, en 1953, à ces années-là, Darmois écrivait à propos de son enseignement à l'ISUP : « Ce cours que je faisais chaque semaine à Paris devint rapidement […] le cours de licence pour l'option statistique mathématique du Certificat de Calcul des probabilités ». La situation changera un peu plus tard, le cours de Darmois à la Faculté des sciences se faisant plus spécifique, en sorte que, en 1937, René Roy pourra écrire : « Actuellement, cet enseignement confié à M. Georges Darmois, est indépendant du cours qu'il professe également à l'Institut de statistique ».

statistiques, et taxe nombre d'entre eux d'incompétence. Fernand Faure, qui a publié en 1906 ses propres *Éléments de statistique*, proteste, au motif que semblable conception de la statistique reviendrait à « exiger des statisticiens la science universelle ». Une telle absence de consensus n'empêche pourtant pas que le contenu des enseignements dispensés accède à cette forme majeure de publicité qu'est l'ouvrage imprimé. Le *Cours de statistique* d'Aftalion connaît ainsi trois éditions (1928, 1929, 1931). Répandu dans les facultés de droit, il propose « en 200 pages, d'une manière très claire et concise, les données statistiques (recensement, sondage, dépouillement et présentation des résultats), l'analyse des séries (moyenne, médiane, dispersion, coefficient de variation et écart-type), les distributions, les ajustements et la corrélation, enfin les corrections de variations saisonnières ou cycliques [24] ». Dans la réalité, les étudiants n'ont que rarement les connaissances mathématiques utiles pour maîtriser ce que les auteurs mettent ainsi à leur disposition. À la Libération, Bunle soutiendra à ce propos une controverse avec un professeur de la Faculté de droit de Paris, Jean Lescure. Contre celui-ci, et contre la tradition établie, Bunle revendique la création de facultés des sciences économiques et sociales où s'enseigneraient l'économie, la statistique, les sciences actuarielles et financières, etc. Ces institutions d'enseignement supérieur offriraient ainsi à l'État des cadres ayant une formation émancipée de la seule tradition juridique. À Lescure, qui avance que tout cela est déjà convenablement pris en charge dans les facultés de droit, Bunle répliquera sans détour : « Ce que je regrette, c'est que les jeunes gens qui présentent des thèses économiques n'aient qu'un vernis insuffisant de la science statistique : ce dont on s'aperçoit quand on lit certaines de ces thèses [25] ».

D'un côté, donc, des savoirs anciennement établis, de facture « littéraire », bloquent la voie à des savoirs plus récents, à teneur mathématique parfois substantielle. Mais d'un autre côté, ces savoirs en devenir se heurtent, dans les facultés des sciences, à l'hégémonie des mathématiques pures. À la veille de la seconde guerre mondiale, il n'existe ainsi qu'un seul enseignement de statistique mathématique, celui que Darmois assure à Paris. Sans doute peut-on s'appuyer sur une tradition, un peu courte mais réelle, qui, même si elle ne s'incarne encore que faiblement dans les institutions d'enseignement, a su faire reconnaître son principe essentiel – la statistique est une science en grande partie mathématique –, à propos duquel Darmois fait dès 1928 le constat suivant : « L'introduction des méthodes mathématiques en

[24] Morrisson, art. cit., pp. 817-818.

[25] *Ibid.*

statistique est maintenant un fait contre lequel on ne s'insurge plus guère [26] ». Le même Darmois publie en 1928 son *opus magnum* sous le titre concis de *Statistique mathématique*. Michel Huber, qui en a écrit la préface, le présente comme un « exposé bien coordonné des travaux un peu épars et insuffisamment connus dans notre pays [27] ». Cet ouvrage, couronné par l'Académie des sciences, et traduit notamment en anglais, sera qualifié en 1960, lorsque disparaît Georges Darmois, de « premier ouvrage français de statistique mathématique [28] ». Pour la première fois sans doute, en effet, s'y trouve dépassée une organisation séculaire validée par les meilleurs auteurs, dans laquelle, à un ouvrage portant véritablement sur le calcul des probabilités, se trouvent appendus des développements de statistique [29].

Plus largement, les ouvrages qui mettent au premier plan les problèmes de la statistique sans pour cela refouler les mathématiques indispensables ou utiles ne sont pas légion. Darmois publiera en 1934 un petit ouvrage de haute vulgarisation intitulé *Statistique et applications*, qui aura sa 5e édition en 1957. Les références bibliographiques, forcément en nombre réduit dans un tel ouvrage, sont un indice précieux de l'état du champ. Qu'y trouve-t-on en l'espèce ? Outre des études statistiques dues à différents auteurs (dont Michel Huber, Henri Bunle, François Divisia), Darmois s'appuie sur des travaux tant français qu'étrangers. Par delà sa propre *Statistique mathématique*, il fait ainsi référence au petit livre publié en 1923 par Émile Borel et Robert Deltheil, *Probabilités. Erreurs*, dont les auteurs consacrent quelques pages à la statistique mathématique. Il cite également, de Borel, les *Éléments de la théorie des probabilités* dans sa troisième édition de 1924 (la première édition est de 1909) [30], et, de Paul Lévy (1886-1971), le *Calcul des probabilités* paru en 1925. Mais il se réfère aussi à tout une littérature de langue anglaise que le spécialiste qu'il est ne saurait ignorer : *An*

---

[26] Cité *in* Pressat (1987), p. 27.

[27] *Ibid*., p. 25.

[28] *Ibid.*

[29] Le basculement qu'opère ainsi Darmois mérite d'être apprécié par rapport à une tradition avec laquelle il rompt tout en l'accomplissant à certains égards : celle qui court des *Élémens du calcul des probabilités* de Condorcet (publiés à titre posthume en 1805) et de la *Théorie analytique des probabilités* de Laplace (1812), ainsi que de son *Essai philosophique sur les probabilités* de 1814, en passant par le *Traité élémentaire du calcul des probabilités* de Lacroix (1833), ou par cette œuvre incontournable qu'est l'*Exposition de la théorie des chances et des probabilités* de Cournot (1843), sans négliger les *Lettres… sur la théorie des probabilités* de Quételet (1846), jusqu'au *Calcul des probabilités* de Joseph Bertrand (1889) et au-delà. Voir Armatte (1991), *passim.*

[30] Cette 3e édition contient deux notes (pp. 199-203 & 204-221) où, avant John von Neumann, Borel pose les fondements de la théorie des jeux.

Introduction to the Theory of Statistics de George Udny Yule (1871-1951) paru à Londres en 1911, les *Elements of Statistics* de Arthur L. Bowley, dont François Simiand avait rendu compte dans *L'Année sociologique* dès leur parution (1901) et qui sera traduit en français en 1929, les *Contributions to the History of Statistics* de Harald Westergaard (1932), sans oublier les *Statistical Methods for Research Workers* de Ronald Aymler Fisher (1890-1962), ou encore l'ouvrage *Medical Biometry and Statistics* de Raymond Pearl (1879-1940). Darmois mentionne aussi, bien sûr, le gros ouvrage – plus de 800 pages – que Lucien March a publié en 1930 sous le titre *Principes de la méthode statistique*. Vingt ans auparavant, dans un article de quelque quarante pages intitulé « Essai sur un mode d'exposer les principaux éléments de la théorie statistique » paru dans le *Journal de la Société de statistique de Paris*, March, nourri de statistique britannique, avait tracé le cadre de l'utilisation du calcul des probabilités en statistique. Mais son travail n'avait pas reçu l'écho qu'il méritait. Dans les années 1930, les choses ont changé : une maturation s'est faite, une évolution institutionnelle s'est ébauchée, un texte du savoir énonçant « la méthode statistique » commence à imposer sa norme.

Quelle structure et quel contenu le texte du savoir statistique en formation présente-t-il ? Le livre de Bowley déjà cité est le premier de son genre en langue anglaise – c'est-à-dire au plan mondial. Que contient-il donc ? Dans son compte rendu critique, Simiand consacre quelques lignes rapides à en décrire le contenu :

> Il n'est guère possible ici que d'indiquer la nature et la suite des questions traitées :
>
> – Règles générales de l'investigation statistique : exemples tirés du recrutement de la population, de la statistique des salaires, etc. ;
>
> – Mise en tableaux (procédés à appliquer, précautions à prendre, choix des cadres, etc., etc.) ;
>
> – Moyennes (simples, composées ; le mode, la médiane, la moyenne géométrique, les coefficients) ;
>
> – L'application des moyennes à la mise en tableau ;
>
> – La méthode graphique (but, construction des diagrammes, comparaison des chiffres, courbes logarithmiques) ;
>
> – L'approximation ;
>
> – Les *index numbers* ;
>
> – L'interpolation.
>
> Une seconde partie étudie l'application de la théorie des probabilités à la statistique (équation de la courbe d'erreur, la Loi de l'erreur, théorie de la corrélation).

En dépit d'un vocabulaire qui n'est plus toujours le nôtre, un découpage familier est donc proposé : recueil des données statistiques, description de ces données, etc. Notons surtout la frontière tracée par Simiand (et par l'auteur qu'il commente) entre le recueil et la description, d'une part, et les traitements fondés sur la théorie des probabilités, à teneur mathématique sensiblement plus élevée, d'autre part. À cet égard, Simiand ajoute : « La connaissance des mathématiques est, bien entendu, nécessaire pour permettre de suivre cette dernière partie et diverses sections de la première, mais n'est pas indispensable pour qu'il soit tiré déjà un bon profit de ce livre ». Ce type d'affirmation aura, on le sait, un grand avenir : les mathématiques seraient indispensables mais… on pourrait s'en dispenser ! La ligne de démarcation ainsi tracée est en vérité moins liée au savoir statistique lui-même qu'à l'état de la diffusion des connaissances mathématiques au sein des publics auxquels les différents auteurs s'adressent – économistes pour Bowley et autres sociologues pour Simiand par exemple [31]. Par contraste, on notera le point de vue presque violemment unitaire – en opposition au dualisme de la *description* et de l'*inférence* statistiques, qui deviendra un lieu commun – que professe R. A. Fischer dans son ouvrage de 1925 déjà cité, *Statistical Methods for Research Workers* :

> The science of statistics is essentially a branch of Applied Mathematics and may be regarded as mathematics applied to observational data. As in other mathematical studies the same formula is equally relevant to widely different groups of subject matter. Consequently the unity of the different applications has usually been overlooked, the more naturally because the development of the underlying mathematical theory has been much neglected. »

Cette tension entre monisme mathématicien et dualisme profane constitue, on le verra, une contrainte permanente dans la diffusion sociale des connaissances statistiques. Écho concret de la vision abstraite que propose Fisher, le travail de constitution d'un corpus de connaissances faisant référence passe indubitablement par un effort d'organisation de la diversité empirique des matières qui composent de façon un peu erratique le domaine presque indéfiniment étendu (et en tout cas indéfiniment extensible) de la science statistique.

Se référant à la création de l'ISUP, Pressat, à cet égard, note significativement [32] : « L'enseignement de la statistique faisait à cette époque la part belle aux aspects les plus divers de la discipline au détriment quelque peu du corps central tel qu'il s'est constitué de nos jours ». Ce « corps central » de la statistique, c'est ce que nombre d'auteurs de l'époque nomme *la méthode statistique* – au singulier –, dont le repérage et la présentation sont dès lors largement amorcés. Dans son livre intitulé *Statistique et applications*, que nous citons ici

---

[31] Simiand précise en effet : « On voit que l'utilité du livre de M. Bowley déborde la science économique et intéresse tous les sociologues ». On notera que, pour Simiand, la science économique est une partie de la sociologie.

[32] Pressat (1987), p. 23.

d'après sa 2e édition (1941), Georges Darmois écrit ainsi [33] :

> La méthode statistique développe ses applications dans un champ très étendu. On peut grouper ces applications autour des principaux centres suivants :
>
> 1° La présentation des observations.
>
> 2° Leur réduction.
>
> 3° La description, l'interprétation et l'explication des régularités statistiques.

Ces « trois centres » structurent le continent de la statistique. À propos du premier – la présentation des observations –, Darmois indique encore [34] :

> La tâche initiale de la statistique a été, comme le dit Cournot : « le recueil des faits auxquels donne lieu l'agglomération des hommes en sociétés politiques ». Elle cherchait, en somme, à dégager les éléments les plus importants, caractéristiques à certains points de vue de la situation d'un groupement. Et, sans doute, est-ce cette activité première qui lui a donné son nom (de *status*, pris soit au sens d'État, soit à celui de situation). C'est encore maintenant l'activité essentielle des différents services de statistique.

Les deux autres centres névralgiques de l'activité statistique – « réduction » et « interprétation » – appartiennent davantage sans doute à ce qui deviendra le « corps central » de la statistique. Mais l'auteur ne se limite pas à une statistique réduite à une technologie elle-même réduite à ses composants mathématiques. Ainsi, pour illustrer la notion de régularité statistique, Darmois se réfère-t-il successivement aux jeux de hasard, au taux de masculinité, aux lois mendéliennes de l'hybridation, à la radioactivité, aux taux des mariages, natalité, mortalité. Dans le corps de l'ouvrage, trois chapitres seront ainsi successivement dévolus à « l'analyse démographique », aux « indices de l'activité économique », aux « permanences de l'hybridation » :

> Chapitre III. Éléments d'analyse démographique. Description et mouvement d'une population
>
> Chapitre IV. Les indices de l'activité économique
>
> Chapitre V. Les permanences de l'hybridation. Lois de Mendel

Inversement, ces chapitres d'applications sont encadrés par des chapitres de technologie statistique :

> Chapitre II. L'outillage et les idées
>
> …
>
> Chapitre VI. Répartitions statistiques à une variable

[33] Darmois (1934), p. 3.

Le chapitre II admet ainsi les subdivisions suivantes :

> Dénombrements et mesures – Diagramme intégral – Courbe de fréquence – Moyenne arithmétique – Écart moyen quadratique ou écart type – Valeur médiane – Quartiles ou quartiers – Écart moyen – Introduction à la théorie des probabilités – Notion de variable aléatoire – Espérance mathématique – Signification de l'espérance mathématique – Le résultat d'A. de Moivre – Nature des interprétations et explications fournies par la théorie des probabilités – Taux de masculinité – Le cas le plus simple des lois de Mendel – Radioactivité

On retrouve ici, à l'échelle d'un chapitre, ce que la table des matières montre à l'échelle du livre : l'encadrement de la technologie statistique par certains emplois extramathématiques de cette technologie. Cette compénétration se retrouve dans le chapitre VI, qui présente le découpage suivant :

> Dimensions d'organismes – Temps de réaction – Fréquences de désintégration des atomes radioactifs – Distribution de revenus – Répartition des villes d'après le nombre d'habitants – Première utilité de ces représentations – Peut-on espérer d'autres résultats – Spécification préalable de la loi de fréquence – Exemples des tailles – Estimation des paramètres – Qualité d'une représentation – Stabilité d'une courbe de fréquence – Autres formes de distributions – Répartitions discontinues – Le problème général du jugement sur échantillon – Médiane et déciles – Emploi d'autres représentations

La mixité des contenus est ici frappante : si on le regarde comme un sous-continent des mathématiques, le « continent statistique » relève, sans doute aucun, des mathématiques *mixtes* : toute statistique mêle nécessairement des objets mathématiques et des objets non mathématiques. La mise en œuvre de la « méthode statistique », c'est-à-dire de la technologie statistique, enclenche ainsi, dans le meilleur des cas, de véritables synergies codisciplinaires, en articulant les énergies de deux disciplines au moins, l'une mathématique, l'autre non. Sur ce patron générique, on pourra faire de la statistique *en* médecine, ou *en* démographie, ou *en* lexicologie, ou *en* psychologie, ou *en* didactique, etc., ce qui appellera chaque fois, le cas échéant, des adjonctions spécifiques à « la » méthode statistique.

5. Normalisation institutionnelle et développement

Lucien March dirige [35] la statistique générale de la France (SGF) de 1896 à 1920. Michel Huber lui succède, de 1920 à 1936. Dans les années 1930, l'idée s'impose de la nécessité d'une information économique permettant à l'État d'agir en consonance avec la notion

---

[34] *Ibid.*

d'économie dirigée qui se répand alors largement. Dans un contexte tragique, la guerre accentue cette évolution : c'est alors qu'un contrôleur général de l'armée, René Carmille (1886-1945), qui, tout à la fois, a travaillé pour le contre-espionnage français et se passionne pour les problèmes économiques et les méthodes modernes de gestion, intervient dans l'institution statistique. Son projet est, à l'origine, de préparer une vaste mobilisation clandestine en créant, en accord avec le gouvernement de Vichy, un service de recrutement camouflé derrière un service de démographie, service qui est effectivement créé le 15 décembre 1940 [36]. Ce « Service de la démographie » est pourvu de grands moyens : dès février 1942, une cartothèque de 800 000 hommes mobilisables est achevée, à l'insu de l'occupant. Carmille est l'homme de la mécanographie [37], dont il avait fait l'apologie dans un ouvrage paru en 1936 sous le titre *La mécanographie dans les administrations* [38]. Quelques mois après sa création, le service de la démographie que dirige Carmille absorbe la vieille SGF pour donner le Service national des statistiques (SNS), ancêtre de l'INSEE. Mais la zone sud est bientôt occupée (novembre 1942) et la question de la mobilisation se pose désormais autrement ! Carmille, qui est membre du réseau de résistance Marco Polo, développe néanmoins le service qu'il a fait créer : outre la direction centrale parisienne sont implantés dix-huit établissements régionaux et, en 1943, un service des sondages est mis en place. En 1944, les effectifs du SNS sont passés de 200 à 7000 personnes [39].

Carmille est arrêté à Lyon en février 1944. Transféré à Dachau en juillet 1944, gravement malade, il y meurt le 25 janvier 1945. Son œuvre lui survit : outre le SNS, il a poussé en avant la création de corps d'administrateurs, d'attachés et de commis : le problème

---

[35] Il n'en devient officiellement directeur qu'en 1910 ; mais, dès 1896, c'est bien lui qui imprime les directions essentielles à ce service.

[36] Sur cette situation pour le moins complexe, on se reportera, dans le compte rendu du colloque « Statistiques sans conscience n'est que ruine... » (novembre 1998), à la discussion présidée par Jean-Marie Pernot à propos des « Enseignements de l'histoire », et en particulier à l'intervention de l'historien Jean-Pierre Azéma (voir http://cgtinsee.free.fr/Kolok/kollok2/partie1.pdf).

[37] Le mot de mécanographie désigne ici l'emploi de machines ou de dispositifs mécaniques pour les opérations logiques (calculs, tris, classements) effectués sur des documents administratifs, comptables, commerciaux, techniques, scientifiques, notamment par l'utilisation de cartes perforées.

[38] Ce travail aura une deuxième édition en 1942. Carmille est notamment le créateur du numéro d'identification à treize chiffres, dit aujourd'hui « numéro INSEE » ou « numéro de Sécurité sociale » (mais dont le nom officiel est actuellement « numéro d'inscription au répertoire des personnes » : NIR). Carmille l'introduit officiellement en juillet 1941, pour un recensement des activités professionnelles.

[39] La SGF comptait 131 titulaires à la veille de la guerre.

de la formation de ces agents de l'État se pose. Selon un schéma déjà évoqué, le SNS est alors complété par une école d'application. Carmille est avant toute chose un organisateur. À propos des statisticiens de la vieille SGF, il avait déclaré : « ce sont des savants », en ajoutant toutefois : « qui ne disposent d'aucuns matériels modernes sérieux ». Carmille met en place le système formé par une grande institution statistique – le SNS – et une école associée, de préparation aux métiers de la statistique, l'école d'application du SNS. Ce service est transformé à la Libération en un institut que la loi de finance du 27 avril 1946 crée sous le nom d'« Institut national de la statistique et des études économiques pour la métropole et la France d'outre-mer », l'INSEE, organisé par le décret du 14 juin de la même année. À l'INSEE cohabitent alors des anciens de la SGF, des militaires recrutés par Carmille et de jeunes statisticiens formés par l'école d'application du SNS (devenue école d'application de l'INSEE), qui se montrent critiques devant les gros fichiers et le personnel énorme de l'institution léguée par Carmille.

Un arrêté du 23 octobre 1942 avait fixé les missions de l'école d'application : former les cadres supérieurs et moyens du SNS ainsi que des statisticiens économistes nécessaires aux entreprises et aux organismes d'étude. Cette école, dont les promotions n'atteignent pas la dizaine en moyenne, vit d'abord en symbiose avec l'ISUP : « Au début des années 1950, les trois seuls cours à dominante statistique professés à l'école concernent la théorie et la pratique des sondages, la pratique statistique et l'organisation des services statistiques en France et à l'étranger. Les élèves suivent tous les autres cours de statistique et de mathématiques à l'ISUP. » Cette situation va cependant évoluer peu à peu. En même temps que les effectifs croissent, l'école d'application de l'INSEE affirme peu à peu son autonomie par rapport à l'ISUP : en 1960, lorsqu'elle devient l'ENSAE, école nationale de la statistique et de l'administration économique, elle a conquis son indépendance. En première année, les élèves y reçoivent une formation de haut niveau à la fois en économie et en statistique. Dans ce dernier domaine, à côté des trois enseignements déjà mentionnés, ils suivent des cours de calcul des probabilités et de statistique mathématique, de méthodes statistiques, de démographie mathématique et descriptive, à quoi s'ajoute un enseignement sur les statistiques agricoles, économiques et sociales qui présentent en détail la production de ces statistiques en France. Le directeur de l'école d'application de l'INSEE, E. Morice, est, avec F. Chartier, l'auteur d'un ouvrage en deux volumes intitulé *Méthodes statistiques* qui paraîtra en 1954 à l'Imprimerie nationale. Le premier volume, intitulé *Élaboration des statistiques*, compte 187 pages ; mais c'est surtout le second volume, fort de 555 pages et intitulé *Analyse statistique*, qui imposera ce traité pour de longues années [40].

Les années 1960 connaissent un développement différencié des enseignements de statistique. À l'ISUP, où Morice enseigne aussi, Darmois, qui a été nommé directeur des études en 1941, fait entrer pleinement la tradition anglo-saxonne en matière de statistique mathématique à partir de 1945. Il crée en 1952 le Centre de formation aux applications industrielles de la statistique, qui organise des stages de formation pour les personnels des entreprises. Ce centre reçoit entre 1952 et 1959 plus de mille stagiaires et publie à partir de 1953 la *Revue de statistique appliquée*. À partir de 1960, les promotions de l'ISUP qui se succèdent comportent autour de 50 élèves. L'enseignement de la statistique s'impose en outre à un grand nombre d'institutions qui préparent les cadres des organismes privés et publics : Centre d'administration des entreprises, Centre d'études des programmes économiques, Institut de perfectionnement dans les méthodes de contrôle et de gestion, etc. En 1970, parmi les 78 anciens élèves des promotions 1945 à 1955 de l'école d'application de l'INSEE, 25 travaillent dans des entreprises privées ou parapubliques, et 7 dans des organisations internationales : les débouchés ne manquent donc pas pour les statisticiens économistes.

L'évolution des enseignements d'économie et de statistique donnés dans les facultés de droit est plus lente. Albert Aftalion ayant été mis à la retraite d'office par Vichy, le cours de statistique qu'il assurait sera repris par André Marchal et Henri Guitton (1904-1992). En 1954 est créé un cours de statistique descriptive en troisième année de licence. Mais un tel enseignement, qui ne fait l'objet que d'une interrogation orale, ne marque pas un progrès sensible dans la mesure déjà où un échec à cette épreuve est facile à compenser. Pourtant l'institution est travaillée par un puissant besoin de renouvellement depuis les années 1930, époque à laquelle elle se heurte, dans la production des élites du pouvoir, aux prétentions des ingénieurs économistes, qui se portent à l'avant-garde de la modernité en matière de science économique en cultivant l'économie mathématique et l'économétrie. Le développement de l'économétrie est marqué par la création, en 1930, à l'instigation de l'économiste de l'université de Yale Irving Fisher (1867-1947) et du norvégien Ragnar Frisch (1895-1973), de la Société d'économétrie, *the Econometric Society*. En 1933, avec l'aide du financier Alfred Cowles, est créée la revue *Econometrica*, dont Frisch est le rédacteur en chef. En France, cette

[40] Pour l'année universitaire 1997-1998, il est encore, par exemple, l'un des quatre ouvrages conseillés aux étudiants de la Faculté d'ingénierie de l'Université de Calabre qui, en deuxième année d'informatique, suivent le cours semestriel intitulé *Statistica e calcolo delle probabilità*. Voir http://wwwinfo.deis.unical.it/statistica.html.

évolution trouve un écho efficace dans plusieurs institutions, dont le séminaire de François Divisia au Conservatoire des arts et métiers ou le Centre polytechnicien d'études économiques (appelé plus couramment X-Crise). Ce centre organise dans les années 1930 une série de conférences consacrées aux évolutions récentes de la recherche en économie : François Divisia y parle en 1933 des « travaux et méthodes de la société d'économétrie », Jacques Rueff explique en 1934 les raisons pour lesquelles, « malgré tout », il reste un libéral, tandis que, en 1938, Jan Tinbergen (1903-1994), qui recevra en 1969, avec Ragnar Frisch, le prix Nobel d'économie, présente ses recherches économiques sur « l'importance de la Bourse aux États-Unis ». Dans l'immédiat après-guerre, plusieurs séminaires vont diffuser les travaux des économètres. Georges Darmois, dont l'influence s'impose, tandis que celle de Divisia décline, remarque ainsi Maurice Allais (né en 1911, prix Nobel d'économie en 1988), qui lance un séminaire tenu d'abord dans un café de la place Saint-Sulpice pour en signifier l'esprit d'ouverture. À l'instar de Clément Colson (1853-1939), Allais y part de questions pratiques et rassemble autour de lui, outre des étudiants et des ingénieurs amis, plusieurs chefs d'entreprise importants. Un deuxième foyer de diffusion est le séminaire de René Roy (1894-?) à l'Institut Henri Poincaré, plus théorique, vers lequel Darmois oriente de jeunes normaliens mathématiciens tels Gérard Debreu (1921-2004), prix Nobel d'économie en 1983, ou Marcel Boiteux (né en 1922). Un troisième séminaire se tient à Lyon et rassemble un public de composition analogue. La demande d'économètres provient de divers organismes, tel le SEEF, Service d'études économiques et financières du ministère des Finances créé en 1950 et confié à Claude Gruson (1910-2000), et dont une partie sera intégrée en 1961 à l'INSEE lorsque Gruson prendra la direction de cet Institut (qu'il dirigera jusqu'en 1966) ; tels encore divers organismes de la Comptabilité nationale, à quoi s'ajoute l'école d'application de l'INSEE.

À la ferveur pour l'économétrie et l'économie mathématique se conjugue, pour battre en brèche la primauté des facultés de droit dans la production des élites du pouvoir, le choc du ralliement – que la guerre a cristallisé – au keynésianisme, lequel diffuse à travers l'enseignement de l'École libre des sciences politiques devenue, en 1945, Institut d'études politiques de Paris (« Sciences Po Paris »), ou encore à l'École Nationale d'Administration créée en 1945, sans oublier l'Institut de sciences économiques appliquées (ISEA) de François Perroux (1903-1987), où keynésianisme et économétrie fleurissent. Dans ces conditions, une réforme de l'enseignement de l'économie dans les facultés de droit s'impose. Elle se dessine dans les années 1950. À cet égard l'action d'Henri Guitton ne saurait être sous-estimée. Dès 1932 Guitton assiste à une conférence de Ragnar Frisch à l'Institut Henri Poincaré : il y entend l'économiste norvégien prôner l'alliance de la théorie économique, de la statistique et des mathématiques. Ayant suivi un enseignement de mathématiques supérieures, reçu à l'agrégation d'économie en 1938, Guitton enseigne d'abord à Dijon (1939-1952) avant d'enseigner à Paris (1953-1974). À Dijon, en relation avec Georges Darmois et en collaboration avec le normalien mathématicien Georges Théodule Guilbaud, qui enseigne en classe préparatoire dans cette même ville, Guitton rédige un programme de mathématiques pour les étudiants en économie de la faculté de droit. Son manuel *Statistique et économétrie*, dont la première édition sera publiée chez Dalloz en 1958, illustre les exigences de l'enseignement qu'il souhaite voir se développer. D'une manière générale, la réforme trouve ainsi ses artisans plutôt parmi les chargés de cours que chez les professeurs chevronnés, et plutôt parmi les provinciaux qu'à Paris. Un débat actif se développe, alimenté par de nombreuses publications [41]. Le ministère multiplie les consultations auprès des enseignants favorables à la réforme pour élaborer un programme de changement. À partir de 1955, la licence en droit compte quatre années et non plus trois, et elle comporte une option économique. Les deux premières années constituent un tronc commun aux économistes et aux juristes ; les deux années suivantes supposent une spécialisation dans l'un ou l'autre des deux domaines. En 1957, les facultés de droit prennent le nom de facultés de droit et de sciences économiques. À partir de 1960-1961 les candidats au doctorat doivent obtenir un diplôme d'études supérieures de sciences économiques où la statistique fait l'objet d'une épreuve obligatoire, tandis que deux autres domaines – les mathématiques applicables à l'économie et la comptabilité des entreprises – font l'objet d'un tirage au sort. C'est en 1960 qu'apparaît une licence ès sciences économiques, qui comporte en chacune de ses années un enseignement de statistique et un enseignement de mathématiques (à quoi s'ajoute l'étude de la comptabilité nationale). La réforme des universités de 1968, qui crée les unités d'enseignement et de recherche (UER), voit l'apparition d'UER de sciences économiques, dissociées désormais des anciennes facultés de droit. Une telle évolution ne manque pas de s'accompagner de changements dans la composition du personnel enseignant. Dans les années 1950, les facultés de droit recrutent ainsi des enseignants de mathématiques dont beaucoup ont fréquenté les séminaires de Roy ou d'Allais ou encore l'ISEA. « Chaque année, se souvient Henri Guitton [42], il y avait un nouveau. Alors un de mes collègues m'a dit : mais nous allons

---

[41] Lucette Le Van-Lemesle (*op.cit.*, p. 643) compte ainsi sept articles sur le sujet pour les années 1951 et 1952 parus dans la seule revue *Banque*.

[42] D'après Le Van-Lemesle (2004), p. 644.

devenir une annexe de faculté des sciences. Je lui ai répondu : mais pas du tout, mais si nous ne faisons pas cela, nous allons devenir des sous-développés et nous ne suivrons pas la voie royale des universités étrangères. » Tout pourtant n'est pas idéal. Dans certaines facultés, la statistique descriptive et ses applications économiques passent au second plan au profit des mathématiques et de la statistique théorique, en même temps que la coordination entre enseignements économiques et formation statistique (et mathématique) reste fréquemment platonique, avec par exemple une certaine négligence de l'étude des sources statistiques et de leur production, au détriment du réalisme de la préparation professionnelle des étudiants.

L'année 1960 marque pourtant l'entrée dans une nouvelle étape de la diffusion de la culture statistique en France. L'école d'application de l'INSEE ne réunissait à l'origine, chaque année, que cinq ou six élèves attachés (recrutés au niveau du baccalauréat de mathématiques) et cinq ou six élèves administrateurs (issus des grandes écoles scientifiques ou titulaires de la licence ès sciences). Mais cet effectif croît : de quatorze environ en 1950 il passe à cinquante-quatre en 1958, en même temps que le recrutement se diversifie en s'ouvrant d'une part aux fonctionnaires étrangers envoyés par leur pays d'origine (afin de se former comme cadres des services statistiques à créer ou développer), d'autre part à des jeunes gens souhaitant intégrer les sociétés d'études ou les services de recherche opérationnelle des entreprises et soucieux de se doter d'une double formation statistique et économique. Cette évolution est formalisée par un décret en date du 2 novembre 1960 qui transforme l'école d'application en École nationale de la statistique et de l'administration économique (ENSAE) et qui en permet l'accès aux anciens élèves des facultés de droit et de sciences économiques. Au cours des années 1960, les promotions voient leur effectif augmenter sensiblement, le nombre total des élèves de l'ENSAE dépassant bientôt 300. En janvier 1963 sera créé le CESD, Centre européen de formation des statisticiens économistes des pays en voie de développement, qui officialise une fonction depuis longtemps assumée, en pratique, par l'école nouvellement redéfinie.

6. La résistible diffusion de la statistique

Dans les années 1950 se prépare en nombre de domaines l'efflorescence remarquable des années 1960. De ce mouvement général, la statistique profite, à l'évidence, même si elle doit conquérir parfois durement une place qui reste celle d'une science auxiliaire, qui peine à se faire reconnaître comme une servante utile aux disciplines mieux établies. À cet égard, le cas de la pénétration de la statistique dans les études médicales en France paraît exemplaire. La figure emblématique de cette évolution est Daniel Schwartz, né en 1917 et polytechnicien. En 1954, raconte-t-il [43], « le professeur Maurice Lamy a réuni à un dîner chez lui, que j'appelle un complot, […] un certain nombre de scientifiques… » Et d'ajouter : « … les gens étaient scandalisés qu'il n'y ait pas de développement de la statistique médicale en France alors qu'il y en avait depuis trente ans en Angleterre et aux États-Unis. À la fin du dîner on m'a demandé de faire un cours de statistique pour les médecins. Alors ça a été le début de tout ». En 1956, dans le cadre du colloque national sur la recherche et l'enseignement scientifique tenu à Caen du 1er au 3 novembre, les professeurs Robert Debré et René Fauvert et le docteur Jean Dausset (qui obtiendra le prix Nobel de médecine en 1980) font une communication sur l'organisation de la recherche médicale française. À propos de la formation des chercheurs, ils soulignent la nécessité de créer un enseignement spécialisé de type troisième cycle comprenant, outre les bases fondamentales de la physique (thermodynamique, physique nucléaire, etc.) et de la chimie physique, organique et biologique, ce qu'il nomment « l'instrument mathématique expérimental », dont ils énumèrent sobrement le contenu : « méthodes de calculs, fonctions simples, statistiques ». Il ne s'agit là bien entendu que de formation à la recherche. En 1959 a lieu à Vienne un congrès organisé par des chercheurs britanniques en vue de faire connaître la technique des essais thérapeutiques. En collaboration avec quelques autres chercheurs, Daniel Schwartz en tire la matière d'un ouvrage paru l'année suivante avec une préface de Robert Debré sous le titre *Les essais thérapeutiques cliniques. Méthodes scientifiques d'appréciation d'un traitement*. Le développement des essais thérapeutiques bute en France, comme dans d'autres pays européens, sur la culture médicale dominante : « J'ai demandé à Bradford Hill, l'organisateur de la conférence, racontera plus tard Daniel Schwartz, comment ils faisaient pour qu'en Angleterre les médecins acceptent un tirage au sort de leurs malades. Je lui ai dit : "En France, nous n'y arriverons jamais" ; alors il m'a répondu, avec l'humour des Anglais : "Eh bien, vous prendrez les résultats des Anglais". » La formation des médecins, leur sensibilisation à la variabilité et au fait statistique apparaissent ainsi cruciales. Le 15 mai 1962, Schwartz, qui appartient alors à l'Institut national d'hygiène (INH) et qui a créé le CESAM, Centre d'enseignement de la statistique appliquée à la médecine, écrit à l'Inspecteur général Rolland pour insister sur les enjeux d'un enseignement de la statistique aux futurs médecins : « Dès le début des études médicales, écrit-il, il est nécessaire d'insister sur l'importance de la fluctuation des caractères en biologie et sur ses conséquences. » Plus prosaïquement, il ajoute : « Il faut ensuite inculquer à tous les médecins un minimum de

[43] Lechopier (2002), pp.18-21.

connaissances indispensables soit à leur culture générale (conduite d'un essai thérapeutique ou d'une enquête étiologique, notions d'épidémiologie), soit pour permettre une collaboration demandée par plusieurs organismes. C'est ainsi que les enquêtes de morbidité effectuées dans un département demandent la collaboration de tous les médecins de ce département. » Développant une remarque précédente, Schwartz note que « la variabilité essentielle de tous les caractères biologiques d'un individu à l'autre fait qu'aucune interprétation scientifique des données ne peut être obtenue dans les SDV sans un mode particulier d'analyse qui fait la part de cette variabilité individuelle : c'est le rôle de la méthode statistique ». Le discours apologétique ainsi développé désigne une difficulté qui n'est pas propre à la médecine, certes, mais qui est tout particulièrement indurée, bien avant Claude Bernard (1813-1878) [44], dans le système de valeurs d'une certaine tradition médicale. « Le médecin français, dira plus tard Daniel Schwartz [45], est un remarquable clinicien et un remarquable thérapeute ; chaque malade est pour lui un individu et non un numéro ; la France est un pays où le secret professionnel est le plus sévère. Ces valeurs sont précieuses dans un monde chaque jour plus mécanisé. Mais elles ont leur revers, qui est l'importance exagérée du fait individuel dans la recherche scientifique. Cet état de choses n'est pas une nécessité. Il n'est pas vrai que le respect sacré du colloque singulier entre le malade et son médecin ait pour conséquence obligatoire la statistique sur un cas. »

L'ironie du trait ne doit pas masquer l'obstacle, à savoir l'idée qu'on pourrait atteindre de manière directe, et en tout cas sans le secours d'une médiation statistique réputée dénaturante, à l'essence supposée toujours singulière du réel. Mais une autre difficulté apparaît – furtivement – dans le plaidoyer de l'auteur. À propos de l'enseignement qu'il préconise, il note d'abord : « Cet enseignement pourrait être effectué en liaison avec l'Institut de statistique de l'Université de Paris qui a organisé depuis 1954 un enseignement de la statistique en médecine. » Or l'ISUP, nul ne saurait l'ignorer, nourrit largement de

---

[44] Dans son *Introduction à l'étude de la médecine expérimentale* (1865), Bernard se prononce contre l'usage des moyennes et, au-delà, contre la statistique, écrivant : « Si l'on recueille l'urine d'un homme pendant vingt-quatre heures et qu'on mélange toutes les urines pour avoir l'analyse de l'urine moyenne, on a précisément l'analyse d'une urine qui n'existe pas ; car à jeun l'urine diffère de celle de la digestion, et ces différences disparaissent dans le mélange. Le sublime du genre a été imaginé par un physiologiste qui, ayant pris de l'urine dans un urinoir de la gare de chemin de fer où passaient des gens de toutes les nations, crut pouvoir donner ainsi l'analyse de l'urine *moyenne* européenne ! » En 1835, le docteur Double faisait à l'Académie un exposé dans lequel il rejetait l'usage des « rapports numériques » comme dénué de sens : voir là-dessus Schwartz (1994), p. 68.

[45] Cité *in* Gaudillière (2002), p. 218.

mathématiques ses enseignements, ce qui pouvait faire reculer des responsables des études médicales encore très attachés aux humanités classiques. Selon une stratégie rhétorique classique en la matière, Schwartz précise alors : « Bien que basée sur le calcul des probabilités, la méthode statistique peut être comprise et appliquée sans connaissances mathématiques particulières. » À la même époque, pourtant, il va s'employer à faire recruter à l'INSERM (qui a succédé à l'INH) des polytechniciens [46]. Encore aujourd'hui, pourtant, le CESAM se présente sur son site Internet en atténuant largement la réalité des besoins mathématiques qu'engendre l'activité statistique, puisqu'on y lit : « L'enseignement du CESAM s'adresse à tous ceux (médecins, biologistes, vétérinaires, pharmaciens, techniciens, étudiants) qui souhaitent pouvoir utiliser la méthode statistique dans les domaines de la recherche médicale ou dans leur vie professionnelle. Le niveau général requis est celui d'une fin de première année de premier cycle. L'enseignement n'exige pas une formation particulière en mathématique ou statistique. Il est cependant vrai qu'on y manipule beaucoup de chiffres et qu'il y a des formules, sans que cela dépasse le niveau moyen du lycée (toutes sections confondues). » Ainsi faut-il donc des jeunes chercheurs rompus aux mathématiques pour créer des connaissances dont la réception par l'usager ne solliciterait que de façon minimaliste sa connaissance des mathématiques !

La période est pourtant favorable, culturellement, à la diffusion sociale des mathématiques : c'est l'époque des « mathématiques modernes » (*new mathematics*) et de la pénétration dans les sciences humaines et sociales du souci de quantification. En France, Guilbaud crée en 1960 le centre d'analyse et de mathématique sociale, dont la naissance est parrainée ou entourée tout à la fois par Claude Lévi-Strauss (né en 1908) et l'historien Charles Morazé (1913-2003), ou encore par Claude Gruson, Georges Darmois ou Edmond Malinvaud (né en 1923) [47]. C'est ainsi par exemple que se développent aussi bien une géographie quantitative qu'une linguistique quantitative. L'une et l'autre sont nourries de contacts plus ou

---

[46] Un des jeunes polytechniciens recrutés à l'époque raconte : « Au cours de ma deuxième année à l'X, j'ai reçu, comme tous les étudiants de la promo 1962, une lettre signée par Daniel Schwartz et Philippe Lazar disant : “la médecine a besoin de polytechniciens, vous allez faire votre choix de carrière en sortant de l'X, vous n'avez sûrement pas pensé que le domaine médical pourrait être pour vous une chose possible, pensez-y. Nous sommes à votre disposition, téléphonez-nous”. […] Daniel Schwartz ayant obtenu d'Eugène Aujaleu, le directeur, un poste de chargé de recherche à l'INSERM, j'ai pu entrer directement dans son laboratoire ». Entretien avec Pierre Ducimetière. Voir http://picardp1.ivry.cnrs.fr/Ducimetiere.html.

[47] Sur le travail qui s'amorce alors, on pourra se reporter au texte *La mathématique et l'École*, disponible sur l'Internet : http://www.ehess.fr/centres/cams/histori/mat_eco.html.

moins approfondis avec des statisticiens mathématiciens – l'UFR de statistique et de logique formelle de l'université de Paris V jouera un peu plus tard un rôle crucial – et donnent lieu à un certain nombre de publications et de colloques. Au-delà de ces travaux savants se dessine, autour de 1970, l'ambition d'une diffusion régulière des connaissances utiles de mathématiques et de statistique auprès des étudiants avancés au moins. C'est ainsi que le colloque tenu à Strasbourg en avril 1964 sous le titre *Statistique et analyse linguistique*, où s'expriment enthousiasmes et réticences à l'endroit de la quantification, aboutit pourtant à une sûre conclusion : « Il est souhaitable, lit-on dans les conclusions du colloque [48], que les notions mathématiques de base applicables en linguistique (algèbre logique, théorie des ensembles, théorie de l'information, calculs des probabilités, méthodes statistiques) prennent une place dans la formation donnée par les universités aux futurs linguistes […], comme c'est le cas jusqu'à un certain point pour les étudiants en psychologie et sociologie. » Les exigences sont à la hauteur des espoirs, et l'action n'attend pas : un participant suggère ainsi que, dans le cas français, « cette base mathématique pourrait être incluse dans le programme du Certificat d'Études Supérieures de linguistique générale, ou de linguistique appliquée ». Avec la géographie, la statistique a une vieille relation : Francis Galton (1822-1911), qui était membre de la Royal Geographic Society (et qui créa le terme d'anticyclone), n'est ainsi pas étranger à ce vieux compagnonnage, lié en partie à la proximité de la géographie avec l'économie et la démographie. Mais c'est le renouveau de la fin des années 1950 impulsé par la *new geography* venue du continent nord-américain et repris avec force par les géographes britanniques (sous l'impulsion notamment de Peter Haggett) qui conduira en France, non seulement à une floraison de travaux savants, mais encore, avec un décalage temporel compréhensible, à des ouvrages destinés aux étudiants. En 1974, ainsi, le « Groupe Chadule », sous-ensemble grenoblois du « Groupe Dupont », publie un ouvrage intitulé *Initiation aux méthodes statistiques en géographie*, que son avant-propos situe par rapport au nouveau paradigme de la discipline : « les Écoles anglo-saxonne, scandinave et soviétique, y lit-on, ont imposé des "méthodes quantitatives", en fondant une nouvelle conception de la géographie (*new Geography*). Malgré les résistances, ce courant gagne en France des adeptes de plus en plus nombreux. » À nouveau, un effort est fait – et souligné – pour réduire, au prix d'un certain appauvrissement de l'exposé, les outils mathématiques sollicités : « Afin d'être accessibles à tous, écrivent nos géographes, les auteurs ont escamoté, artificiellement mais volontairement, une grande partie des références à la statistique inférentielle qui, en fait, est la

[48] Muller & Pottier (1966), p. 134.

base véritable de toute statistique. » Là aussi, le public visé est divers et le même avant-propos en dessine les contours au-delà des étudiants de géographie du premier cycle universitaire : « Outre les étudiants en géographie, les auteurs espèrent atteindre les étudiants en histoire qu'ils peuvent aider dans la partie de leur programme réservée à la géographie, et même dans leur propre discipline, en particulier en histoire économique et en histoire de la population ; ils aimeraient aussi joindre leurs collègues de l'Enseignement secondaire, qui ont le désir de suivre l'évolution de la géographie et d'y initier leurs élèves. » La poussée de la statistique dans la société et dans la culture se traduit ainsi par l'interpellation longuement différée de l'enseignement des lycées. On va voir pourtant que, lorsque le « Groupe Chadule » publie son ouvrage, une tentative en bonne et due forme d'introduction d'un enseignement de la statistique a eu lieu, qui a, si l'on peut dire, fait long feu.

7. La tentation du secondaire

En 1964, Daniel Schwartz publie (avec Philippe Lazar, né en 1936, polytechnicien, qui sera directeur général de l'INSERM de 1982 à 1996) la première édition d'un ouvrage intitulé *Éléments de statistique médicale et biologique*, dont la page de garde précise qu'il est « à l'usage des étudiants en propédeutique médicale (P.C.E.M.) ». Les choses se précipitent. À la rentrée 1966, les classes de première A, B, C, D sont dotées de nouveaux programmes [49]. Pour la première fois, la statistique y apparaît, sous l'intitulé d'*Initiation à la statistique* – du moins pour ce qui est des classes de première A, B et D, car la première la plus « mathématique », la première C, fait exception ! Par son contenu, l'initiation proposée est proche des besoins et de la culture statistiques des économistes (ou des géographes), comme le suggère le libellé du programme de 1re B que nous reproduisons ci-après :

Initiation à la statistique

1° Séries statistiques

a) Présentation de documents statistiques : observation, enregistrement et groupement des données. Tableaux numériques. Diverses représentations graphiques. Polygone et courbe de fréquence, courbe cumulative.

b) Éléments caractéristiques d'une série statistique. Médiane, moyennes, dominante. Évaluation de la dispersion, quantiles, écart moyen arithmétique, fluctuation, écart-type.

2° Les indices de la vie économique

Indices simples, synthétiques. Confection, utilisation. Indices usuels.

---

[49] Il s'agit des programmes du 8 juin 1966, publiés dans le *BO* n° 26 du 30 juin 1966.

3° Ajustement linéaire

Méthode graphique, méthode des moyennes discontinues, méthode des moindres carrés.

4° Séries chronologiques

Les composants fondamentaux du mouvement d'ensemble, mouvement de longue durée, mouvement cyclique, variations saisonnières (divers procédés d'élimination), variations accidentelles

5° Notions sur la corrélation

Définition. Droite de régression, covariance, coefficient de corrélation linéaire.

Les temps semblent mûrs. En mathématiques, la féconde agitation liée au mouvement de modernisation de l'enseignement a mis au travail toute une corporation emmenée, derrière quelques personnalités énergiques, par l'APMEP, l'association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public. Dans sa « Bibliothèque d'Enseignement Mathématique », cette association publie coup sur coup, à partir de 1960, plusieurs ouvrages significatifs, adressés aux enseignants pour leur formation dans la perspective de la réforme [50]. Au deuxième trimestre de l'année 1967 paraîtra, dans la même collection, un ouvrage de quelque 230 pages intitulé *Initiation à la statistique* : le titre reprend celui de la partie correspondante du nouveau programme des classes de première. Les auteurs en sont Paul-Louis Hennequin, professeur de mathématiques à la Faculté des sciences de l'Université de Clermont-Ferrand, et Louis Guerber, professeur de mathématiques détaché à la Faculté de droit et des sciences économiques de la même université. Par delà les personnes, la rencontre n'est nullement fortuite, nous le savons, entre statistique, mathématiques et faculté de droit ! Le livre s'adresse aux professeurs de mathématiques ayant à enseigner le nouveau programme de première. Il paraît alors que va s'achever la première année de cet enseignement rénové. Dans leur avant-propos – daté du 24 décembre 1966 –, les auteurs s'en expliquent : ils ont tenu à exposer la plus grande partie de la matière devant des professeurs concernés par cet enseignement, ce qu'ils ont fait, en l'espèce, devant une cinquantaine de leurs collègues de l'académie de Clermont durant la première quinzaine de novembre 1966. Mais l'avant-propos qu'ils signent mérite d'être examiné plus avant, parce qu'y apparaissent la plupart des tensions que porte en lui le projet d'un enseignement de la statistique.

[50] Paraissent ainsi, en avril 1960, *Le langage simple et précis des mathématiques modernes* par André Revuz et Léonce Lesieur ; en février 1961, *Recherche d'une axiomatique commode pour le premier enseignement de la géométrie* par Gustave Choquet ; en 1962, les volumes 1 (« Groupes, anneaux et corps ») et 2 (« Espaces vectoriels ») du *Cours de l'A.P.M.* signé par André et Germaine Revuz, dont le volume 3 (« Éléments de topologie ») paraîtra l'année suivante ; etc.

Première affirmation des auteurs : la statistique a « envahi notre vie courante ». L'assertion n'a pas la même charge de vérité pour les auteurs – dont l'investissement actif dans le domaine est clair – et pour beaucoup de leurs lecteurs potentiels – qui, sans doute, se sont jusque-là arrêtés à la constatation un peu passive de la présence grandissante d'informations statistiques dans divers contextes institutionnels ou médiatiques autour d'eux. La statistique, rappellent-ils ensuite, a déjà « pénétré timidement il y a quelques années dans l'enseignement technique ». Elle est en effet inscrite depuis 1962 au programme de la classe de première technique, option économie (1^re^ T'E). La « filière » économique, on le voit, continue d'être la voie privilégiée de pénétration de la statistique. Avec la réforme nouvelle des classes de première, la statistique « entre en force dans notre enseignement du second degré », lit-on alors ; et on verra en effet plus loin, par contraste avec l'amenuisement de la place concédée à cet enseignement dans les programmes qui suivront, que cette révolution de palais n'est pas dénuée d'ambition. Faut-il déplorer cette entrée en force, demandent encore les auteurs ? En réalité, le problème central semble être le suivant : pourquoi la statistique vient-elle se loger, au secondaire, dans le cadre de l'enseignement des mathématiques, plutôt qu'ailleurs ? Tout d'abord les auteurs donnent la parole à une contestation supposée, mais en ne prenant pour interlocuteurs virtuels que les seuls « mathématiciens » : « Certes, concèdent-ils alors, [la statistique] apparaîtra à bien des mathématiciens comme une parente pauvre, voire une bâtarde, tout juste digne de l'enseignement du géographe ou du naturaliste. » L'observation appelle commentaire. Rendant compte de la parution en 1924 du livre de Fréchet et Halbwachs déjà mentionné – *Le calcul des probabilités à la portée de tous* –, Robert Deltheil, professeur à la Faculté des sciences de Toulouse, écrivait [51] : « Dans le but de contribuer à une large diffusion de cette science qui, simple objet de curiosité pour les mathématiciens d'il y a deux cents ans, est aujourd'hui indispensable au physicien, à l'économiste, au biologiste, les auteurs apportent un exposé abordable aux lecteurs dont les connaissances mathématiques ne dépassent pas le niveau d'un enseignement véritablement élémentaire… » On retrouve là les traits principaux de la situation qu'il s'agit alors de gérer : la statistique et le calcul des probabilités lui-même seraient, dans leur début, une simple curiosité aux yeux du mathématicien patenté ; et leur manque d'intérêt proprement mathématique serait en quelque sorte le prix à assumer pour une appropriation large de la matière par ses utilisateurs potentiels dans leur riche diversité. Mais alors, pourquoi l'enseignement de cette matière devrait-il échoir aux mathématiciens ? Le mathématicien

[51] Deltheil (1924), p. 518.

Fréchet et le sociologue Halbwachs, l'un professeur à la Faculté des Sciences, l'autre à la Faculté des Lettres de Strasbourg unissent leurs sciences, que l'enseignement qu'ils donnent tous deux – sur la statistique pour l'un, les assurances pour l'autre – à l'Institut commercial d'enseignement supérieur de Strasbourg rapproche institutionnellement. Par contraste, Guerber et Hennequin sont des mathématiciens qui enseignent dans des institutions différentes : le rapprochement est en ce cas lié davantage à la discipline par rapport à laquelle ils situent leur enseignement respectif – les mathématiques. À l'unité par la demande se substitue ainsi l'unité par l'offre : on passe, un peu subrepticement, du point de vue du « consommateur » au point de vue du « producteur » ou du « fournisseur ». L'interrogation que formule l'avant-propos mérite donc bien d'être soulevée. Quelle réponse les auteurs lui donnent-ils ? La voici : « Si le besoin de présenter, puis d'interpréter les résultats, s'est fait sentir depuis longtemps en sciences expérimentales et plus récemment en sciences économiques, il est naturel que peu à peu se dégagent des règles, des simplifications, des idées directrices, une formulation abstraite qui est du domaine des mathématiciens. Le fait même que la statistique serve à des utilisateurs aussi étrangers les uns aux autres que le naturaliste, le psychologue, l'économiste, le physicien, justifie la nécessité d'une synthèse et l'intervention du mathématicien. » La réponse est, somme toute, classique : à l'école élémentaire, par exemple, l'arithmétique n'a-t-elle pas pour objet de dégager, de formuler, d'établir les règles qui gouvernent l'usage des nombres dans une multiplicité indéfinie de contextes de la vie sociale ? En un sens, la statistique est une amplification de l'arithmétique « primaire », une fois la substitution faite, aux seules grandeurs fixes que connaît cette arithmétique, des grandeurs variables ou aléatoires propres à la statistique.

Une telle aventure épistémologique comporte deux grands écueils. Le premier consiste, pour les mathématiciens, à refuser la mission d'élaboration, de mise en forme, de synthèse mathématiques du conglomérat d'outils que le praticien s'est bricolé ou dont il éprouve le besoin sans encore en disposer pleinement. C'est cet écueil que les auteurs s'efforcent d'abord d'éviter, en soulignant à l'envi que leur ouvrage est une œuvre de mathématiciens à l'adresse de mathématiciens, qu'elle est cela d'abord sinon cela seulement : « Cette brochure, écrite par des mathématiciens pour des mathématiciens, se veut avant tout de mathématiques. Seuls les exemples seront empruntés aux utilisateurs et on a cherché à éliminer tout élément subjectif des raisonnements faits par ceux-ci dans leurs interprétations, ainsi que l'appel à une intuition propre à leur discipline. Par contre, chaque fois que cela a été possible, et par exemple dans la théorie de l'ajustement, on a montré l'unité du raisonnement mathématique et rattaché la question à d'autres questions d'analyse ou de géométrie. » Le point de vue adopté ici donne tout ou presque à la corporation des professeurs de mathématiques – des « mathématiciens ». Il ne s'agit nullement, semble-t-il, de s'interroger sur la mission sociale d'un enseignement des mathématiques enrichissant de ses apports spécifiques d'autres enseignements également utiles ; il s'agit de convaincre des professeurs qu'on peut raisonnablement et sans déroger enseigner, sous le nom de mathématiques, un corps de savoir que le travail réalisé depuis plusieurs décennies en diverses sphères de la société a dégagé et baptisé « statistique ».

Le second écueil consiste, une fois ce corpus statistique adopté, à le couper de ses origines, qui n'apparaîtraient désormais plus que comme des *applications* possibles. On aura noté en passant combien la négociation sur le premier point portait en elle de risques à cet égard : surtout rester entre soi, ne pas entrer trop avant dans les domaines (non mathématiques) dont la statistique enseignée par le professeur de mathématiques devrait pouvoir se motiver et qu'elle devrait éclairer en retour ! Sur ce point, donc, les auteurs adoptent une position qui, rétrospectivement, paraît fort prudente. Première exigence, qui ne fait encore sortir des mathématiques *stricto sensu* qu'avec précaution : à l'instar des autres domaines des mathématiques, la statistique doit prêter son concours à la production de connaissances sur le réel extramathématique. Les auteurs sont là-dessus explicites : « Ce cours doit être l'occasion pour celui qui l'enseigne, de montrer comment on applique les mathématiques : à partir d'une situation concrète, le plus souvent expérimentale, la nécessité apparaît de formuler des modèles, ce qui entraînera des simplifications. Le mathématicien traite alors ces modèles et déduit de théorèmes un certain nombre de conséquences pratiques. Ce n'est que si ces conséquences sont conformes à l'expérience que l'expérimentateur se déclarera satisfait du modèle. Sinon il faudra en chercher un autre. » Le schéma est très général : il vaut pour toute mathématique, pas seulement pour la statistique. Là encore, un effort est fait pour convaincre du caractère parfaitement générique de la situation à laquelle les professeurs doivent se plier. À vrai dire, pourtant, ce qui est décrit par les auteurs est le travail, non de la classe, mais de ce personnage un peu abstrait qu'est le « mathématicien appliqué » ; et ce qu'ils invitent le professeur à faire, c'est simplement de montrer aux élèves les principes de son intervention, non de pratiquer à sa place, de manière plus ou moins fortement transposée, l'application des mathématiques. De là le risque que les échanges qui feraient apparaître les mathématiques comme un outillage intellectuel pertinent et fécond en d'autres disciplines ne s'établissent que de manière bien incertaine, à la marge du cours de mathématiques. À ce propos, les auteurs notent que « ce cours doit être l'occasion, à propos d'exemples, d'échanges fructueux avec le naturaliste, le géographe ou le chimiste, voire avec le littéraire puisque la linguistique quantitative, en plein essor, fait de plus en plus appel au statisticien. » L'appel, on le notera, s'adresse ici au « statisticien », non au « mathématicien » dont les auteurs nous parlaient un instant avant.

Que propose l'ouvrage de Guerber et Hennequin ? Il se réfère de manière certes très explicite et attentive au découpage et aux contenus du programme d'initiation à la statistique des classes de première concernées. Mais, en ces premiers instants du travail de transposition didactique, les réductions que nous constaterons par la suite ne sont pas encore à l'ordre du jour. Tout au contraire, quelque élémentaire qu'en soit le contenu cible, l'ouvrage est ouvert à un souci d'information sur les mondes institutionnels et intellectuels de la statistique telle qu'elle existe pour des experts en la matière. Dans le cadre tout noosphérien où il leur est permis de travailler, les auteurs se sont accordé des moyens qui donnent à leur ouvrage une profondeur de champ remarquable en même temps qu'une évidente attention au détail des choses, d'une façon inhabituelle dans un cadre scolaire strict. Leur livre commence ainsi par un « chapitre 0 » de quatre pages intitulé *Le symbole* Σ (on y parle aussi, brièvement, du symbole $\prod$) ; les auteurs y explicitent les propriétés de l'usage de $\sum$ (linéarité, sommation par paquets, multiplication) et s'arrêtent sur une erreur à éviter (en général $\sum (ax_i + b) \neq a\sum x_i + b$) avant de donner quelques exemples classiques d'emploi du signe $\sum$. Le chapitre 1 reprend le titre général de la première des quatre parties du programme : *Séries statistiques*. Un trait distinctif en est le relatif développement donné aux considérations sur ce que le programme désigne sous l'intitulé « observation, enregistrement et groupement de données ». Les auteurs distinguent ainsi les relevés statistiques « occasionnels » des relevés « périodiques » et des relevés « permanents » ; ils distinguent encore l'observation *directe* de l'observation *indirecte* du caractère étudié, et, à propos de la distinction entre relevés *exhaustifs* et relevés *partiels*, ils font un développement rapide mais précis sur la notion de sondage, son histoire récente et ses emplois principaux, allant jusqu'à préciser que, à l'époque, « les instituts spécialisés évaluent à 2000 F environ le prix de la question dans un sondage par un choix raisonné ». Ils s'arrêtent aussi sur la question de l'enregistrement des données et le dépouillement des observations, introduisant au passage les notions de code et de nomenclature et présentant la technique alors florissante des cartes perforées à 80 colonnes et 12 lignes. La construction des tableaux numériques et les difficultés du regroupement en classes font l'objet d'un examen attentif nourri d'exemples multiples dont plusieurs sont empruntés au *Bulletin mensuel de statistique* (BMS) de l'INSEE. Les différents types de graphiques sont tour à tour examinés, ainsi que les notions associées (polygone statistique, fonction de répartition, etc.). Des développements mathématiques parfois un peu condensés soutiennent l'introduction de la notion de graphique à échelles logarithmiques et de graphique polaire [52]. Les graphiques circulaires et les graphiques géographiques sont présentés avant que ne soit abordé le problème de représenter des statistiques à deux caractères, avec notamment une étude des graphiques triangulaires [53]. Ce chapitre 1 est augmenté d'un nombre respectable d'exercices avec, chaque fois qu'il s'agit de données vraies, l'indication de la source de ces données, le vocabulaire d'origine étant d'ailleurs conservé « afin de familiariser le lecteur avec des rédactions de vocabulaires variés [54] ». Des indications sur la solution des exercices sont également données, remarquables par le souci du détail : ainsi la technique de dénombrement à la main par le tracé progressif de petits carrés complétés par une diagonale (figurant un groupe de cinq valeurs) est-elle donnée à voir dans les tableaux permettant la détermination des effectifs.

Le chapitre 2 s'intitule *Paramètres d'une série statistique*. Y sont présentées les notions de mode (que le programme appelle « dominante »), de médiane et de médiale, notion qui vient de la statistique économique [55]. Sont ensuite définies les moyennes arithmétiques, simples et pondérées, dont l'étude mathématique utilise librement le calcul barycentrique. L'ancienne technique de calcul d'une moyenne exploitant les propriétés de linéarité de la moyenne est alors exposée. En outre, les auteurs instruisent leurs lecteurs de la « relation de

---

[52] La notion d'échelle logarithmique figure au programme de mathématiques de la Terminale ES : à propos des « séries statistiques à deux variables numériques », le programme précise (sous la rubrique des « modalités de mise en œuvre ») : « On proposera aussi des exemples où la représentation directe en $(x\,;\,y)$ n'est pas possible et où il convient par exemple de représenter $(x\,;\,\ln y)$ ou $(\ln x\,;\,y)$ et on fera le lien avec des repères semi-logarithmiques. » Un graphique polaire peut être utilisé pour représenter des données relevées périodiquement, par exemple le prix unitaire d'une denrée relevé mensuellement au fil de deux années successives : dans ce cas, la série $p_1^1, p_2^1, \ldots, p_{12}^1, p_1^2, p_2^2, \ldots, p_{12}^2$ sera représentée par les points de coordonnées polaires $(p_j^i, (j-1) \times 30^\circ)$, où $i = 1, 2$ et $j = 1, 2, \ldots, 12$. Lorsque la variable p_j^i subit de fortes variations, on peut être amené à utiliser une échelle logarithmique sur les axes d'équation polaire $\theta_k = k \times 30^\circ$, où $k = 0, 1, \ldots, 11$. Sur ces notions, voir par exemple Schlacther (1986).

[53] Lorsqu'on s'intéresse à trois caractères X, Y, Z de somme constante (par exemple trois pourcentages, dont la somme vaut 100 %), on peut avoir avantage à représenter graphiquement le triplet (X, Y, Z) par un point intérieur à un triangle équilatéral de côté a : la somme $x + y + z$ des distances de ce point aux trois côtés du triangle est en effet constante, égale à $a\frac{\sqrt{3}}{2}$.

[54] *Op. cit.*, p. 7.

[55] Étant donné une série $(x_i, n_i)_{1\leq i\leq p}$, où les valeurs x_i sont rangées par ordre croissant, on peut être conduit à considérer, non pas les effectifs n_i des valeurs x_i mais les « apports » $n_i x_i$: les apports cumulés sont successivement n_1x_1, $n_1x_1 + n_2x_2$, …, $n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_px_p$. La médiale est la valeur x_m dont l'apport permet de dépasser la moitié de l'apport total $\sum_{1\leq i\leq p} n_ix_i$.

K. Pearson », médiane = $\frac{\text{mode} + 2\ \text{moyennes}}{3}$, égalité approchée présentée comme « valable pour des distributions unimodales, pas trop asymétriques » et qui, paradoxalement, a pour mérite de fournir « une évaluation rapide de la moyenne, sans calcul, à partir du mode et de la médiane ». Les moyennes géométriques et harmoniques font l'objet de développements détaillés ainsi que d'une généralisation – la notion de *f*-moyenne – qui conduit à mettre en perspective l'ensemble des résultats obtenus. Les caractéristiques de dispersion – étendue, intervalle interquartile, écart moyen, variance et écart type – sont ensuite examinées, chaque notion faisant l'objet d'une étude mathématique explicite, qui conduit par exemple au résultat suivant [56] : « la moyenne des carrés des écarts à la valeur z est un polynôme du second degré en z qui passe par un minimum, égal à la variance, lorsque $z = \bar{x}$ ». L'outil spécifique de cette démonstration est une égalité, $\frac{\sum n_i(x_i - z)^2}{\sum n_i} = \sigma^2 + (\bar{x} - z)^2$, dont les auteurs signalent qu'elle n'est autre que la formule de Kœnig des mécaniciens ou la formule de Huygens des physiciens, références qui attestent d'un degré d'intégration de la culture des études scientifiques qui, aujourd'hui, a sans doute beaucoup diminué. Le problème du calcul de la variance et de l'écart type reçoit une attention soutenue : ainsi qu'ils l'avaient fait pour le calcul de la moyenne, les auteurs se soucient notamment des effets d'un groupement en classes. Ces développements alors classiques sont complétés par la présentation de quelques outils complémentaires. Si l'on veut comparer la dispersion des poids et la dispersion des tailles d'une population, ou la dispersion des tailles d'une population d'adultes et d'une population d'enfants, les écart types pris en eux-mêmes ne sont pas *a priori* de bons indicateurs ; on a donc besoin de « coefficients de dispersion » indépendants de l'unité, « qui mesurent des rapports de deux quantités de même nature », tels le « coefficient semi-interquartile relatif » $\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$ ou « le coefficient de variation » $\frac{\sigma}{\bar{x}}$ obtenu en divisant l'écart type par la moyenne. Ce chapitre est complété par un bref exposé sur la notion de moment et les notions connexes (écart moyen d'ordre k, inégalité de Bienaymé-Tchebichev) ainsi que par plus de trois pages consacrées à la présentation de l'indice de Gini [57]. Il se clôt, par delà les

[56] *Op. cit.*, p. 85.

[57] Sur les notions (associées) de *courbe de Lorentz* et de *coefficient (ou indice) de Gini*, on peut se reporter au document qu'on trouvera à l'adresse suivante : http://www.ac-strasbourg.fr/pedago/ses/Matheco/Intro.htm.

exercices, par un résumé du chapitre qui, en à peine plus d'une page, reprend les principales notions travaillées.

Le chapitre 3 a pour titre *Les indices de la vie économique* : il s'agit là d'un autre intitulé figurant dans le nouveau programme de la 1re B, mais qui n'apparaît pas, en revanche, dans celui du programme de 1re D. La décision de l'écarter des classes de D peut évidemment se prévaloir de l'éternelle surcharge des programmes ; mais elle suggère que la formation visée s'adresse moins aux citoyens qu'aux futurs professionnels d'un secteur d'activité déterminé – comme si les élèves de B avaient seuls à s'instruire de la notion d'indices (des prix, etc.). Classiquement, le chapitre commence par la présentation de la notion d'indices *simples* [58]. On passe ensuite aux indices synthétiques [59] et au problème de leur « confection » : choix de la période de base, choix des éléments constituants, choix de la formule de calcul (Laspeyres, Paasche, etc.). Le lecteur est informé de ce que Laspeyres était un « mathématicien et économiste allemand (1834-1913) », qui a proposé son principe de calcul « dès 1864 », et que, de même, Paasche était « un statisticien allemand (1851-1925) », qui a proposé son mode de calcul « dès 1874 ». Comme dans les chapitres précédents, les auteurs examinent spécifiquement les « avantages et inconvénients » des objets introduits. Exemples à l'appui, ils montrent ici que les indices de Laspeyres et de Paasche n'ont pas la belle simplicité des indices simples, que l'on retrouve au contraire avec l'indice utilisant la moyenne géométrique – en lieu et place de la moyenne arithmétique (Laspeyres) ou de la moyenne harmonique (Paasche). Cette présentation est complétée, selon une stratégie constante, par une étude mathématique propre à dégager la structure des calculs et les propriétés des objets qu'ils permettent de définir. Les auteurs sont amenés à illustrer leurs calculs d'un exemple numérique emprunté au *Cours de statistique descriptive* de Gérard Calot (1934-2001) publié chez Dunod en 1964 et que l'auteur enseigne alors en année préparatoire de l'ENSAE, ce cours servant aussi de cadre à des enseignements donnés au Centre d'études des programmes économiques (CEPE) et au Conservatoire national des arts et métiers [60]. Le lien avec la « filière économique » est évidemment pertinent ; on voit qu'il reste vivace. La suite du chapitre aborde le calcul pratique et l'utilisation des indices statistiques, en illustrant très concrètement les mécanismes de la fabrication des indices, à propos notamment des indices les plus usuels – prix de gros, prix de détail, etc. – sans omettre un bref tableau des

[58] Notion avec laquelle, aujourd'hui, les élèves peuvent en principe se familiariser dès la classe de quatrième.

[59] Sur ces notions, voir par exemple Schlacther (1986).

[60] L'exemple mentionné par Guerber et Hennequin se trouve p. 445 de l'ouvrage de Calot.

manipulations auxquelles les pouvoirs publics sont tentés de recourir. À nouveau bien entendu le chapitre, après des exercices avec indications de solution, se clôt par un résumé de son contenu.

Le chapitre 4 est consacré aux notions d'ajustement et de corrélation, dans le cas de deux variables x et y. Il comporte deux grandes sections, consacrées respectivement au cas de deux « paramètres » x et y ayant fait l'objet d'une répartition en classes ou non. C'est par ce dernier cas que, classiquement, on commence : quelque vingt-trois pages lui sont ici consacrées ! La générosité du traitement répond, matériellement, à un double parti pris. D'une part, les auteurs manifestent le souci de se placer dans un cas général, évoquant par exemple la notion « d'ajustement analytique » avant de se ramener à la notion plus particulière d'ajustement linéaire ; la notion de droite de régression fait de même l'objet d'une généralisation qui conduit notamment à évoquer la notion « d'ellipse de concentration ». D'autre part, et l'introduction de l'ellipse de concentration en est un exemple, les auteurs exploitent de manière significative, sans craindre même les redondances [61], un certain nombre d'outils mathématiques (par exemple la notion de diamètres conjugués d'une ellipse) disponibles en principe dans la culture des professeurs de l'époque, afin de ne rien laisser dans l'ombre (à propos par exemple de l'existence et de l'unicité d'un ajustement linéaire), mais aussi de montrer au lecteur combien les questions traitées sont en dernier ressort des questions de mathématiques. Sans doute en va-t-il en partie de même s'agissant de la seconde section du chapitre, consacrée à l'étude de la liaison de deux variables lorsque leurs valeurs ont été réparties en classe, « pour diminuer le volume des calculs » par exemple. Dans ce cas, ayant classé les valeurs de x dans p sous-intervalles $[\alpha_{j-1}, \alpha_j[$ et les valeurs de y dans q sous-intervalles $[\beta_{k-1}, \beta_k[$, on connaît seulement le nombre N_{jk} de points (x, y) tels que $x \in [\alpha_{j-1}, \alpha_j[$ et $y \in [\beta_{k-1},\beta_k [$. Tous les points (x, y) appartenant au rectangle $[\alpha_{j-1}, \alpha_j[\times [\beta_{k-1}, \beta_k[$ sont alors remplacés par le centre de ce rectangle, c'est-à-dire par le point de coordonnés $x_j = \frac{\alpha_{j-1} + \alpha_j}{2}$ et $y_k = \frac{\beta_{k-1} + \beta_k}{2}$; pour chaque valeur j, on introduit le point A_j d'abscisse x_j et d'ordonnée $\bar{y}(j) = \frac{\sum_k N_{jk}y_k}{\sum_k N_{jk}}$. La suite des points A_j forme la « ligne brisée de régression de y en x » ; les auteurs démontrent alors que, si les points A_j sont alignés, ils sont sur la droite de régression des y_k par rapport aux x_j, et que, s'ils ne sont pas alignés, cette droite est aussi la droite de régression des point A_j pondérés par les effectifs $N_{j\cdot} = \sum_k N_{jk}$. Ce résultat général est ensuite particularisé pour retrouver la notion de *droite de Mayer*, à propos de laquelle, précisent les auteurs, « on peut seulement affirmer qu'elle passe par le point moyen et qu'elle est voisine des droites [de régression de *y* en *x* et de *x* en *y*] si l'ellipse de concentration est très allongée ».

Le cinquième et dernier chapitre de l'*Initiation à la statistique* proposée par Louis Guerber et Paul-Louis Hennequin a trait aux séries chronologiques (ou chroniques). Le chapitre offre une physionomie analogue à celle des chapitres précédents, mais ici la matière peut sans doute moins facilement prendre la forme d'un exposé déductif, s'agissant notamment de la mise en évidence des composantes d'une série chronologique (tendance, cycle, variation saisonnière, variation résiduelle). Comme pour compenser un certain dogmatisme du traitement proposé, les calculs littéraux – dont on peut penser qu'ils n'auront pas de vraie contrepartie dans l'enseignement correspondant au lycée – semblent proliférer, dans le cadre d'une didactique dans laquelle l'exemple numérique suit le calcul général au lieu de le précéder. Les auteurs introduisent la notion de moyennes glissantes (ou moyennes mobiles) et en étudient les propriétés à leur façon généreuse, avant d'en examiner l'application à l'étude d'une série chronologique. Enfin ils évoquent, avec toujours le même souci d'explicitation mathématique, d'autres techniques d'étude, en introduisant notamment la notion de chaîne de rapports. Comme à l'accoutumée, la fin du chapitre permet aux lecteurs de travailler son contenu dans le cadre d'exercices avec indications de solution et de disposer d'un résumé utile.

L'effort d'ensemble accompli par les auteurs, qui ne saurait être sous-estimé, est marqué par quelques traits typiques de la position institutionnelle qu'ils ont assumé d'occuper – celle d'intermédiaires entre la sphère savante et la noosphère du système éducatif. Un premier trait a déjà été noté pour sa valeur apologétique : il s'agit de la place centrale accordée à un appareil mathématique généralement élémentaire mais qui, par contraste avec des exposés mathématiquement plus démunis, vibre d'une forme d'euphorie liée à l'efficacité du travail mathématique accompli – qui nettoie, éclaire et fortifie les situations étudiées. Un deuxième trait peut être mis en évidence par un simple exercice comparatif. En 1979 paraîtra un petit livre dû à Michel Louis Lévy (né en 1939, polytechnicien, diplôme de Sciences po, administrateur de l'INSEE, etc.), que son auteur a intitulé *Comprendre les statistiques* [62]. Cet ouvrage, écrit l'auteur, n'a pas pour ambition de « former des statisticiens, même amateurs »,

[61] Ils donnent par exemple trois démonstrations relatives à l'ajustement linéaire : *op. cit.*, pp. 153-157.

[62] Cet ouvrage reprend en l'amplifiant un texte de l'auteur paru en 1975 sous le titre *L'information statistique* aux éditions du Seuil.

ce qu'il précise dans les termes suivants [63] : « On ne trouvera ici que des allusions à des notions fondamentales en statistique comme la variance ou le coefficient de corrélation. En revanche, il s'agit d'expliquer dans le détail nécessaire ce que signifient les résultats statistiques qu'on trouve dans les journaux et dans les discours politiques. C'est donc au *consommateur* de statistiques que l'on s'adresse, et non au fabricant ni au futur fabricant. » La teneur de l'ouvrage en calcul littéral est en conséquence considérablement plus faible, sans pour autant être négligeable. Mais l'ouvrage tout entier apparaît beaucoup plus inséré dans l'univers économique, démographique, statistique dont son auteur est un acteur éminent. Au demeurant, les deux caractères apparaissent corrélés – négativement. Dès lors en effet qu'on ne se soumet pas à l'obligation de rendre raison mathématiquement du détail des organisations statistiques invoquées, que l'on s'autorise à les évoquer avec un degré d'explicitation mathématique que l'on fixe à son gré, il devient possible de peindre un tableau plus vaste et, en un sens, plus complet des outils et des pratiques statistiques, en donnant par là au lecteur le sentiment de pénétrer dans l'univers même où l'auteur officie habituellement. Par contraste, le livre de Guerber et Hennequin opère une certaine mise à distance de l'univers étudié, cette mise à distance étant consubstantielle à la formation d'un savoir scolaire. C'est ainsi que, en particulier, les références à l'univers savant tendent à s'effacer – alors même que les productions de cet univers sont à la base du texte proposé aux professeurs. Rien d'équivalent, chez Guerber et Hennequin, par exemple, à ce passage du petit livre de Lévy [64] : « Dans son ouvrage *The Making of index numbers* (1922), Fisher soumet toutes ces formules à divers "tests" qui reviennent à vérifier si elles ont les propriétés des indices élémentaires. Aucune formule ne satisfait à tous les tests, mais celle qui obtient le meilleur résultat est la moyenne géométrique des indices de Laspeyres et Paasche, que Fisher baptise "indice idéal". La postérité n'a pas retenu ce nom, mais l'a changé pour celui de son auteur. » Rien d'équivalent non plus à cet autre passage portant sur une méthode de comparaison des niveaux des prix d'un pays à l'autre : « Depuis la célèbre étude de Milton Gilbert et Irving Kravis, *Étude comparative des produits nationaux et du pouvoir d'achat des monnaies* (OECE, Paris, 1955), les organisations internationales ont fréquemment appliqué cette méthode pour des comparaisons de production ou de prix. » Rien d'équivalent enfin à ceci, qui prolonge la citation précédente : « L'office statistique des Communautés européennes (OSCE) a même mis au point une intéressante généralisation, due au statisticien néerlandais

[63] *Op. cit.*, p. 7.

[64] *Ibid.*, p. 117. L'auteur mentionné par Lévy est Irving Fisher, dont nous avons parlé plus haut.

Van Ijzeren (OSCE, “Revenus réels CECA 1954-1958”, *Statistiques sociales,* n° 2, 1960), de l’indice de Fisher étendu au cas de *n* pays. Les indices de Van Ijzeren (il y en a trois) s’obtiennent par résolution d’un système de *n* équations. Ils sont transitifs, par définition, ce qui est indispensable pour calculer des “taux d’équivalence” entre les monnaies de la Communauté indépendants du “chemin parcouru” (marc comparé au franc, directement, ou bien marc comparé à la lire, elle-même comparée au franc. »

Par rapport à l’univers d’origine des connaissances dont ils se font les passeurs, Guerber et Hennequin réalisent ainsi une pré-réduction mathématique à visée scolaire dont le produit s’éloigne, dans une certaine mesure, aussi bien de l’univers des producteurs que de l’univers des purs usagers de la statistique. L’exercice comparatif peut, dans ce dernier cas, s’appuyer sur un ouvrage déjà mentionné, *L’initiation aux méthodes statistiques en géographie* du Groupe Chadule. En l’ouvrant, le lecteur se trouve plongé dans un monde où des besoins professionnels ou scientifiques précis cherchent sans façon à se satisfaire. La question des séries chronologiques, ainsi, y prend une allure beaucoup plus pressante, sous l’aiguillon des problèmes que la pratique soulève, comme le montre le passage suivant, que nous reproduisons *in extenso* [65] :

> La succession des valeurs de la variable Y dans une chronique est aléatoire ou non. Une chronique est dite *aléatoire* si la probabilité pour que la variable Y prenne la valeur $y_{i_{t+1}}$ ne dépend pas de la valeur y_{i_t}. Dans le cas contraire, la chronique est dite *organisée*. Le problème, pour les géographes, se pose surtout dans les chroniques climatiques et hydrologiques, dont certaines révèlent parfois une organisation. La plupart des chroniques démographiques et économiques font apparaître une *autocorrélation temporelle* : la situation au temps t_{i+1} est partiellement liée à celle du temps t_i ; par exemple, la production d’acier d’un pays en 1972 est fonction de son potentiel de production, et donc de sa production en 1971 ; le graphique fait souvent apparaître l’autocorrélation temporelle avec une telle évidence que le problème ne se pose pas. Parfois, néanmoins, il peut y avoir doute, en particulier pendant des périodes de mutation, et il peut être bon de tester des portions de chroniques. Le test de von Neumann sert à décider du caractère aléatoire. Si la chronique n’est pas aléatoire, le test des rangs de Spearman précise s’il y a une tendance.

Le problème est posé. Comment se résout-il ? Le lecteur géographe attend une technique, opérationnelle et non pas allusive, pour étudier en géographe les chroniques qui forment la matière de sa réflexion. Les auteurs la lui fournissent, explicitée en un organigramme qui occupe toute une page de l’ouvrage cité [66] (tout d’abord établir le graphique de la chronique ;

[65] *Op. cit.*, p. 125.

[66] *Ibid.*, p. 124.

ensuite procéder au test de von Neumann ; si la chronique apparaît aléatoire, terminer l'étude par un commentaire géographique ; sinon procéder au test des rangs de Spearman ; si celui-ci met en évidence une tendance monotone, déterminer cette tendance par les moindres carrés, en opérant soit sur les valeurs brutes, soit sur les valeurs obtenues par les moyennes mobiles ; etc.). L'ouvrage de Guerber et Hennequin n'est pas moins éloigné de cette « précipitation » du praticien dans son appropriation des outils et des concepts de la statistique qu'il ne l'est de l'insatiabilité savante de ces auteurs dont on pourrait se laisser aller à dire, quelquefois, qu'ils ont la référence facile. Bien entendu, un livre à lui tout seul, fût-il conçu spécifiquement pour ouvrir la voie au travail des professeurs, ne saurait déterminer le destin d'une réforme. Mais on voit déjà qu'une partie des jeux sont faits, que les étapes suivantes de la transposition didactique ne sauraient défaire qu'en partie.

8. Le premier corpus statistique enseigné

Le programme qui s'applique dans les classes de première A, B et D à la rentrée 1966 est daté du 8 juin de la même année ; il est publié au *Bulletin officiel de l'Éducation nationale* dans son numéro du 30 juin. Les délais sont courts. Guerber et Hennequin, dont le livre paraît au deuxième trimestre 1967, s'excusent auprès de leurs lecteurs, qui, disent-ils, en auraient sans doute eu besoin dès juillet 1966. Le manuel pour la classe de première D auquel nous référerons bientôt – il est signé de Camille Lebossé (1905-1995), Corentin Hémery (1908-1992) et P. Faure – paraît chez Nathan au premier trimestre 1967. Un *Cours de statistique élémentaire* signé de Pierre Dedron et Jean Cuenat – publié chez Magnard à l'intention des élèves de première B et D et des candidats aux écoles supérieures de commerce – ne porte pas de date de publication mais paraît vraisemblablement au premier semestre 1968. Autant de signes que le lancement du nouveau programme s'est fait alors que l'« intendance » peine à suivre. Que contiennent les manuels ? Le livre de Lebossé, Hémery et Faure consacre à la statistique huit leçons, dont les titres sont les suivants :

Première leçon : Généralités – Analyse statistique
Deuxième leçon : Représentation graphique des séries statistiques
Troisième leçon : Éléments caractéristiques d'une série statistique
Quatrième leçon : Indices de dispersion
Cinquième leçon : Indices statistiques
Sixième leçon : Ajustement linéaire – Méthode des moindres carrés
Septième leçon : Séries chronologiques
Huitième leçon : Notions sur la corrélation.

Bien qu'adressé aux élèves de première D, cet ouvrage comporte, on l'aura observé, une leçon sur les indices statistiques. La fabrication du texte du savoir – du « cours » – est facilitée par la tradition instituée dans les enseignements de statistique que nous avons évoqués jusqu'ici, que ce soit dans les facultés de droit ou à l'ENSAE, à l'ISUP, etc. En revanche, comme il en va souvent en pareil cas, un corpus d'exercices et de problèmes adaptés au niveau d'activité du public scolaire concerné n'est pas préalablement constitué et doit être produit à partir notamment de transpositions didactiques antérieures éventuelles. La première leçon du manuel examiné comporte les sections suivantes :

> GENERALITES. 1. Définition de la statistique ; 2. Aperçu historique de la statistique ; 3. Vocabulaire de la statistique ; 4. Caractère quantitatif. Caractère qualitatif.
>
> ANALYSE STATISTIQUE. 5. Observations des faits ; 6. Enregistrement des observations ; 7. Tableaux statistiques ; 8. Interprétation des résultats cumulés ; 9. Série statistique à caractère discontinu ; 10. Séries chronologiques ; 11. Séries doubles.
>
> SYSTEME DE NOTATIONS. 12. Signe de sommation $\sum$; 13. Expressions usuelles ; 14. Applications.

On notera que les auteurs ont donné un développement substantiel à des considérations sur le signe $\sum$. Quelques exercices sont d'ailleurs proposés pour en maîtriser le bon usage. Les autres exercices relèvent de plusieurs types de tâches. Le premier type de tâches, représenté par deux exercices, a trait au « dépouillement d'une collecte d'observations », avec regroupement en classes pour l'un d'eux. Un deuxième type de tâches concerne le calcul des fréquences et l'élaboration d'un tableau des effectifs cumulés croissants et décroissants : cinq exercices sont proposés. On observera qu'aucun des types de tâches envisagés n'est motivé par une question à laquelle on se soucierait d'apporter réponse, en dépit même d'une définition préalable de la statistique énonçant que celle-ci vise à « obtenir des rapports numériques sensiblement indépendants des anomalies du hasard et qui dénotent l'existence des causes régulières [67] ». Cette lourde hypothèque va être reconduite tout au long des leçons qui se succèdent. La deuxième leçon a trait aux représentations graphiques des séries, et se découpe ainsi [68] :

> REPRESENTATION GRAPHIQUE DES SERIES. 15. Présentation graphique des séries statistiques ; 16. Le diagramme en bâton ; 17. Histogramme d'une série statistique ; 18. Remarques importantes ;

[67] *Op. cit.*, p. 135.

[68] Une note de bas de page signale que les diagrammes semi-logarithmiques ne sont pas au programme de la 1re D.

19. Polygone des effectifs ; 20. Polygone des effectifs cumulés. Courbes cumulatives ; 21. Diagrammes des séries chronologiques.

AUTRES DIAGRAMMES. 22. Diagramme polaire ; 23. Diagrammes semi-logarithmiques ; 24. Diagramme à secteurs ; 25. Diagramme en barres.

Sans doute l'introduction de la leçon évoque-t-elle la raison d'être d'une représentation graphique, en suggérant que celle-ci est là « pour donner une idée synthétique des tableaux numériques ». Mais le chapitre n'est guère qu'une suite de définitions et d'exemples illustratifs faiblement motivés. Les types de tâches que font travailler les exercices ainsi que le « problème résolu » qui les précèdent sont sans surprise. À partir de tableaux donnés par l'énoncé, on trace des histogrammes, des polygones de fréquences, des courbes de fréquences cumulées, des diagrammes en bâton, des diagrammes polaires ou semi-logarithmiques, et on calcule parfois des fréquences ou des effectifs de classes s'exprimant simplement à l'aide de classes dont les fréquences ou les effectifs sont connus. Pour la première fois apparaît un exercice signalé comme emprunt à une épreuve de baccalauréat (la date ni la série ne sont données) ; mais il s'agit, à propos des coordonnées semi-logarithmiques, d'un simple exercice sur la fonction logarithme. La troisième leçon est intitulée *Éléments caractéristiques d'une série* et son découpage est le suivant :

VALEURS TYPIQUES. 26. Généralités ; 27. Le mode ; 28. La médiane ; 29. Calcul de la médiane d'une série à variable continue ; 30. Détermination graphique de la médiane ; 31. Remarque.

MOYENNE ARITHMETIQUE. 32. Moyenne arithmétique simple ; 33. Moyenne arithmétique pondérée ; 34. Exécution des calculs pour une série à variation continue ; 35. Simplification des calculs.

AUTRES MOYENNES. 36. Moyenne géométrique ; 37. Moyenne harmonique ; 38. Relation entre les trois moyennes.

Le problème résolu propose l'examen d'une série dont les valeurs ont été regroupées en classes de même amplitude. Après avoir fait exécuter le calcul de la moyenne par la technique classique consistant à changer d'origine et d'unité, on y fait calculer la médiane sous l'hypothèse également classique d'une distribution uniforme des valeurs à l'intérieur de chaque classe. Curieusement, une troisième question demande alors de déterminer le mode – défini, là encore classiquement, comme la valeur centrale de la classe modale – à l'aide de la formule de Pearson, donnée par l'énoncé sous la forme $\bar{x} - Mo = 3(\bar{x} - Me)$, sans qu'on aperçoive nettement l'intérêt de la chose. Plusieurs exercices sont relatifs au calcul de la médiane (lorsqu'elle existe, ce que la définition adoptée ne permet pas toujours), et cela par le calcul ou par un graphique. Dans un seul cas une conclusion est tirée des valeurs calculées, à propos du nombre d'exploitations ayant une certaine superficie – la distribution est quelque peu asymétrique, ce que révèle l'éloignement relatif des différents paramètres de position. Deux exercices sont extraits d'épreuves de baccalauréat : il s'agit en l'espèce de petits travaux mathématiques touchant aux propriétés des différentes moyennes (arithmétique, géométrique, harmonique). Mais là encore aucune conclusion n'est tirée sur la portée de la propriété établie.

La quatrième leçon a trait aux indices de dispersion ; elle comporte les rubriques suivantes :

> INDICES DE DISPERSION. 39. Généralités ; 40. Étendue d'une série ou intervalle de variation ; 41. Les quartiles ; 42. Exemple de détermination des quartiles ; 43. Déciles ; 44. Écart absolu moyen ; 45. Fluctuation ou variance ; 46. Écart-type ou écart quadratique moyen ; 47. Simplification du calcul de l'écart-type : changement d'origine ; 48. Intérêt de l'écart-type ; 49. Coefficient de variation.

Le problème résolu du chapitre n'est qu'une variante des techniques de calcul de la moyenne et de l'écart type par changement d'origine et d'unité. Les exercices, quant à eux, font déterminer des étendues de séries, des quartiles dans le cas de séries groupées ou non (dans le premier cas est mise en œuvre une technique d'interpolation identique à celle employée pour la médiane), des écarts absolus moyens par rapport à la moyenne arithmétique ou par rapport à la médiane de séries non groupées, des écarts types de séries groupées ou de séries non groupées, avec emploi ou non d'un changement de variable, enfin, dans un cas, le coefficient de variation d'une série. Quatre exercices se rapportent à des réalités touchant à la vie économique et sociale : le coefficient de variation calculé, ainsi, est relatif à la série des poids de mille cigarettes (les valeurs extrêmes sont 1,04 g et 1,36 g). On s'intéresse également à la répartition d'une population salariée suivant la distance du lieu de travail ou encore aux distances parcourues par des taxis au moment de leur mise à la réforme. Dans ce dernier cas, une question demande d'indiquer la « signification » de la distance médiane, de la distance moyenne et de l'écart type pour la série disponible. Un autre exercice encore fait comparer la distribution des salaires versés par deux entreprises A et B et demande à l'élève, à nouveau, la « signification » de la médiane et de la moyenne des deux séries proposées, et ce que lui inspire la comparaison des paramètres de position et de dispersion des deux séries. L'énoncé se conclut alors par un type de question jusque-là inédit : « Expliquer en quoi le développement du machinisme peut amener une modification de la répartition des salaires dans une entreprise. » L'influence de la courte tradition instituée dans l'enseignement technique en matière d'enseignement de la statistique est ici sensible. Les auteurs ont inclus, on l’a dit, une cinquième leçon consacrée aux indices statistiques ; sa composition est la suivante :

> INDICES SIMPLES. 50. Généralités ; 51. Indice simple ; 52. Propriétés des indices simples : réversibilité et transférabilité.
>
> INDICES SYNTHETIQUES. 53. Définition ; 54. Confection d’un indice synthétique ; 55. Expression générale ; 56. Autres méthodes de calcul des indices de prix.
>
> INDICES USUELS. 57. L’indice des 259 articles *(base 100 en 1962)* ; 58. Raccordement à l’ancien indice ; 59. Autres indices ; 60. Documentation.

Le problème résolu, ici, fait calculer l’indice des 259 articles en mars 1966 (avec base 100 en 1962) et fait ensuite comparer ce qu’on obtiendrait si cet indice avait les propriétés des indices simples. Les exercices portent sur le calcul d’indices simples et de moyennes d’indices simples, des indices de Laspeyres et de Paasche, ou encore l’indice des 259 articles. Dans l’exemplaire que nous avons pu utiliser, une main anonyme a ajouté, à la note de bas de page disant que « l’étude de cette leçon ne figure pas au programme de 1re D », un commentaire peut-être inspiré par le professeur : « mais elle est très intéressante ». Cette glose est d’autant plus remarquable que, s’il est vrai que tout est préparé pour analyser certains aspects de la vie économique et sociale, rien qui ne relève d’une telle analyse n’est explicité véritablement, exercices compris. La sixième leçon porte sur l’ajustement linéaire et a le contenu suivant [69] :

> AJUSTEMENT LINEAIRE. 61. Généralités ; 62. Ajustement linéaire graphique ; 63. Méthodes des moyennes discontinues.
>
> METHODE DES MOINDRES CARRES. 64. Exposé de la méthode ; 65. Formule simplifiée ; 66. Exemples ; 67. Remarques.

Ici, le problème résolu est emprunté à un énoncé de baccalauréat : il s’agit d’ajuster le nombre de comptes courants postaux en fonction de l’année. Les exercices, ensuite, proposent d’ajuster des séries statistiques par la méthode des moyennes discontinues et par la méthode des moindres carrés. Dans deux exercices, où la variable d’ajustement est l’année, on utilise l’équation de la droite d’ajustement pour interpoler ou extrapoler la série : ainsi fait-on pour le salaire horaire moyen d’un ouvrier professionnel dans les industries des métaux de la région parisienne et de l’indice des prix de détail à Paris des appareils de chauffage. La septième leçon est consacrée aux séries chronologiques. Son contenu est le suivant :

[69] On aura noté que l’étude de l’ajustement linéaire est dissociée de celle de la corrélation, qui fait l’objet de la huitième leçon.

SERIES CHRONOLOGIQUES. 68. Généralités ; 69. Les composantes fondamentales.

TENDANCE GENERALE. 70. Procédé des moyennes mobiles ; 71. Application à un exemple ; 72. Droite de tendance générale *(Méthode des moindres carrés)* ; 73. Remarque.

VARIATIONS SAISONNIERES. 74. Étude d'un exemple ; 75. Procédé des moyennes mensuelles ; 76. Méthode des chaînes de rapports.

À nouveau, le travail effectué prépare les instruments mais laisse le lecteur sur le seuil de leur usage véritable : les auteurs notent en préambule que l'étude des séries chronologiques « présente un intérêt certain en matière économique et démographique », mais cet intérêt n'est guère explicité. Le travail effectué s'appuie sur des exemples à fonction paradigmatique. La tendance générale est d'abord dégagée par la technique des moyennes mobiles, abordée dans des cas particuliers bien choisis (le nombre de termes de la série, par exemple, est impair). La réutilisation des résultats de la leçon précédente permet d'établir l'équation de la droite de tendance générale, tandis que le phénomène des variations saisonnières est mis en évidence – là encore, sur un exemple – par le calcul des moyennes mensuelles. Les limitations de cette technique (qui ignore la tendance générale lorsqu'elle existe) conduisent alors à introduire la méthode des chaînes de rapport : le travail sur l'exemple retenu occupe en ce cas plus de deux pages de calculs et de tableaux – on est là aux limites de la transposition didactique envisagée ! Deux des exercices, empruntés à des épreuves de baccalauréat, donnent l'occasion de mettre en œuvre la méthode des moyennes mobiles, l'un à propos de production de fonte, l'autre de taux de mortalité ; dans les deux cas, la série est de longueur impaire et il en est de même des regroupements demandés (par périodes de cinq ans) ; dans chaque cas, une représentation graphique est également requise. Un troisième exercice, qui porte sur la vente d'appareils frigorifiques, fait travailler sur la « droite de longue durée » (cette fois pour une période totale paire – de 24 mois). L'équation de cette droite est utilisée pour obtenir des « valeurs régularisées ». Le même type de tâches est répété pour une période de 36 mois à propos des heures d'ensoleillement relevées dans une station météorologique ; ici, en outre, les coefficients saisonniers d'ensoleillement sont demandés : la technique appelée par l'énoncé est évidemment celles des « moyennes mensuelles ». La huitième et dernière leçon porte sur la corrélation et se découpe ainsi :

NOTIONS SUR LA CORRELATION. 77. Généralités ; 78. Étude graphique ; 79. Droites de régression ; 80. Équations des droites de régression ; 81. Coefficient de corrélation linéaire ; 82. Formules simplifiées ; 83. Propriétés du coefficient de corrélation linéaire ; 84. Exemples d'application.

TABLE DE CORRELATION. 85. Définition ; 86. Exemples.

Le travail accompli dans les leçons précédentes permet de définir rapidement les droites de régression de x par rapport à y et de y par rapport à x et d'en donner les équations cartésiennes. L'étude d'une condition nécessaire et suffisante pour que les droites de régression soient confondues met en évidence le produit aa' de leurs coefficients directeurs, ce qui conduit à définir le coefficient de corrélation linéaire $r = \sqrt{aa'}$, dont les propriétés élémentaires sont ensuite établies. Un exemple d'application relatif au nombre de jours de pluie x_i et au nombre d'heures d'ensoleillement y_i pour chacun des neuf premiers mois de l'année 1952 est alors étudié : le coefficient de corrélation est, comme on pouvait s'y attendre, négatif, voisin de –0,7. La fin du chapitre introduit la notion de table de corrélation avec ou sans regroupement en classes des valeurs. Un exemple est développé portant sur l'âge d'enfants de 3 à 9 ans et leur taille, ce qui permet d'expliciter le mode de calcul conventionnel du coefficient de corrélation (il est en l'espèce voisin de 0,56). Deux exercices sur de courtes séries d'entiers font d'abord déterminer les droites de régression et calculer le coefficient de corrélation linéaire, avec en outre estimation de y pour une valeur donnée de x ou de x pour une valeur donnée de y. Le même travail est repris à propos d'un exemple réel – emprunté à l'économiste Gerhard Tintner (1907-) – à propos de l'indice des prix de gros et de l'indice de la production industrielle aux États-Unis de 1935 à 1939. L'emploi des équations des droites de régression pour procéder à des estimations disparaît en revanche des cinq exercices suivants, dont deux sont extraits d'épreuves de baccalauréat. Dans tous les cas, on demande simplement de déterminer les droites de régression et le coefficient de corrélation, ces calculs étant accompagnés éventuellement d'une représentation graphique du nuage de points – le « diagramme de dispersion ».

Cette suite de leçons de statistique est complétée par quatre pages proposant onze « problèmes de révision ». Les trois premiers problèmes se réfèrent à des séries statistiques simples, où les données ont été regroupées en un petit nombre de classes, hormis dans un cas où la chose n'était pas nécessaire. Le quatrième problème apparaît comme un intrus : étant donné la chronique de la production de fonte en France de 1901 à 1913, on procède à un « ajustement analytique » et on trace le « graphique représentatif ». Le cinquième problème conduit à travailler sur des fréquences relatives et des fréquences relatives cumulées. Le sixième problème reprend deux des thèmes déjà abordés – détermination de l'effectif des valeurs supérieures (ou inférieures) à une valeur donnée et détermination d'une médiane puis d'une moyenne. Le septième problème reprend encore le thème du nombre (ou plutôt du pourcentage, ici) des valeurs se situant dans un intervalle donné ; mais en l'espèce les intervalles sont de la forme $[m - \sigma, m + \sigma]$, $[m - 2\sigma ; m + 2\sigma]$. Le huitième problème est emprunté à une épreuve de baccalauréat ; il met en scène, à propos de « lots cultivables à peu près carrés », les phénomènes de non-correspondance entre la moyenne d'une série d'aires de carrés et l'aire d'un carré ayant pour côtés la moyenne des côtés des carrés de la série. Le neuvième problème est également emprunté à une épreuve de baccalauréat ; il roule entièrement sur des applications arithmétiques simples et en grande partie classiques de notions statistiques : moyennes arithmétiques des n premiers entiers impairs, variance de cette série de valeurs, etc. Le dixième problème est relatif à une série de deux caractères x et y sur laquelle on effectue un changement de variables ($X = \frac{1}{x}$ et $Y = y$) afin de se ramener à des points à peu près alignés, pour appliquer alors les procédés classiques d'ajustement linéaire. Le onzième problème, enfin, fait étudier une série relative à deux paramètres x et y, en demandant d'abord de critiquer, au vu du diagramme de dispersion, l'hypothèse qu'un ajustement linaire serait en ce cas justifié. L'équation de la droite d'ajustement est alors demandée en même temps qu'est fournie une suggestion quant à la conduite des calculs. L'ensemble de ces problèmes confirme le tableau que nous avons brossé à partir de l'examen du cours proprement dit que propose le manuel examiné : les « gestes » du statisticien y sont présentés, étudiés, et seront en principe appris. Certes, les développements technologiques de nature mathématique du livre de Guerber et Hennequin ont en grande partie disparu – seuls subsistent quelques îlots, relatifs par exemple à la simplification du calcul de l'écart type (4^e^ leçon), à l'établissement de l'équation de la droite d'ajustement par les moindres carrés ou à l'obtention de l'inégalité $1 - r^2 \geq 0$ (6^e^ leçon). Mais l'essentiel n'est sans doute pas là en ce qui concerne le destin de la statistique enseignée au lycée. Le livre de Dedron et Cuenat déjà mentionné apparaît à bien des égards comme une amplification du manuel que nous venons d'examiner : aux 86 pages que ce dernier consacre à la statistique se substituent alors quelque 196 pages qui découpent la matière de façon très voisine [70]. Bien entendu on trouve dans l'ouvrage de Dedron et Cuenat des développements qui n'ont pas leur place dans le manuel de première D observé : ainsi en va-t-il d'une étude géométrique des représentations graphiques par histogramme et polygone d'effectifs, dont on ne trouve guère dans le manuel de première qu'un vestige, sous la forme du premier exercice de la 3^e^ leçon [71] : « Étant donné une série à

[70] La 1^re^ leçon correspond au chapitre 1, la 2^e^ au chapitre 2, la 3^e^ est éclatée en deux chapitres, 3 et 4, la 4^e^ leçon correspond alors au chapitre 5, la 5^e^ au chapitre 6, la 6^e^ au chapitre 7, la 7^e^ au chapitre 8, la 8^e^ au chapitre 9.

[71] La « série du n^o^ 29 » dont parle l'énoncé ci-après a trait aux tailles de 500 élèves d'un lycée, ces tailles étant réparties en cinq classes de même amplitude : cette série a, dans la 2^e^ leçon, donné lieu à la réalisation d'un histogramme.

variation continue, montrer en utilisant la série du n° 29, que la droite ayant pour abscisse la médiane, partage l'histogramme suivant deux surfaces équivalentes. » Bien entendu l'ouvrage de Dedron et Cuenat propose un enveloppement technologique plus généreux, qui, en plusieurs cas, explicite des mystères sur lesquels le manuel de 1re D maintient un silence discret. Ainsi y montre-t-on que, dans le cas d'une série groupées en classes, l'hypothèse d'une distribution uniforme conduit, comme dans une distribution continue, à attribuer à toute valeur donnée une fréquence nulle, ce qui peut paraître bien peu intuitif. « Ceci peut surprendre », note donc les auteurs, qui ajoutent : « l'hypothèse de répartition uniforme de la population à l'intérieur d'une classe est si commode et si féconde que l'on préfère sacrifier les fréquences non nulles éventuelles des valeurs du caractère. » Cela noté, toutefois, le trait dominant du manuel de première se retrouve dans l'ouvrage plus développé de Dedron et Cuenat : l'essentiel est que ce qui rend utiles, efficaces, voire nécessaires les gestes enseignés n'est que très pauvrement explicité, en sorte que professeurs et élèves apprennent à accomplir des tâches de types neufs pour eux sans être éclairés sur l'utilité de ces types de tâches. On notera à ce propos que le manuel de Lebossé, Hémery et Faure ne contient aucune présentation quelle qu'elle soit de la matière enseignée : rien ici, en particulier, qui soit l'équivalent de l'avant-propos de l'ouvrage de Guerber et Hennequin. Il s'agit là, en vérité, d'une disposition typique des manuels, lesquels ne commentent pas la matière qu'ils présentent ni dans sa filiation (savante ou autre), ni dans ses raisons d'être. Le livre de Cuenat et Dedron, plus proche sans doute de l'univers savant ou du moins de la noosphère *stricto sensu*, se borne, dans un « avant-propos » de quelques lignes, à indiquer que l'ouvrage s'adresse, au-delà des publics dont nous avons parlé, « aux étudiants qui entreprennent l'étude de la statistique, enfin à tous ceux qui éprouvent le besoin de s'initier à cette branche des mathématiques ». Manière de répéter, après d'autres, qu'on aurait bien, avec la statistique, un domaine authentique des mathématiques ! Mais le commentaire reste elliptique, et il disparaît tout à fait quand on en vient à des manuels scolaires au sens strict : pas plus qu'on ne commente une décision de justice, on ne commente la matière enseignée.

9. La statistique enseignée se fige

La réforme si vivement engagée s'appuie sur un corpus largement consensuel qu'on retrouve dans des ouvrages s'adressant à des publics en principe assez différents. Si Dedron et Cuenat peuvent proposer un cours de statistique commun aux classes de premières et aux classes préparatoires au haut enseignement commercial, c'est que les programmes de ces classes ne diffèrent guère, l'« initiation à la statistique » des unes devenant dans les autres « Calcul statistique » au contenu très voisin, comme on peut le vérifier ci-après :

Calcul statistique

Séries statistiques. Présentation des documents statistiques, observation, enregistrement et groupement des données. Tableaux numériques. Diverses représentations graphiques. Polygone et courbe de fréquence, courbe cumulative.

Éléments caractéristiques d'une série statistique. Médiane, moyennes, dominante. Évaluation de la dispersion, quantiles, écart moyen arithmétique, fluctuation, écart-type.

Ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés. Démonstration de l'existence de la droite des moindres carrés et calcul de ses coefficients.

Étude statistique simultanée de deux caractères. Droites de régression. Coefficient de corrélation linéaire de deux séries numériques.

Mais le travail d'adaptation d'un texte du savoir largement validé hors de l'École au cursus des études secondaires apparaît, rétrospectivement, bien faible : on s'est pour l'essentiel contenté de répartir sur les deux années de première et de terminale un corpus « traditionnel » plus vaste en proposant en première ce qu'il est convenu d'appeler la « statistique descriptive » et en réservant à la classe terminale l'étude des outils probabilistes utiles à la mise en place d'éléments de statistique inférentielle. C'est ce que montrent les programmes des terminales B et D en vigueur à partir du 15 septembre 1967, reproduits ci-après :

Terminale B

Statistique et probabilités

1. Principes du calcul des probabilités. Probabilités. Probabilités simples. Probabilités totales et probabilités composées

2. Variable aléatoire. Notion de loi de probabilité. Valeurs typiques d'une loi de probabilité : espérance mathématique (moment d'ordre 1), moment d'ordre 2 ; variance, écart quadratique moyen ou écart-type. Inégalité de Bienaymé-Tchebitcheff.

3. Lois importantes de probabilités : loi binomiale, loi de Laplace-Gauss ou loi normale, loi de Poisson.

4. Loi des grands nombres. Énoncés commentés des théorèmes de Bernoulli et Borel.

5. Principe de la méthode statistique. Application des propriétés de la distribution normale au jugement sur échantillon. Estimation d'une moyenne. Valeur significative d'une moyenne ; intervalle de confiance. Valeur significative de la différence entre les moyennes de deux échantillons.

Terminale D

1. Préliminaires d'analyse combinatoire. Permutation, arguments, combinaisons sans répétition, formule du binôme. Problèmes de dénombrements et applications simples.

2. Principes du calcul des probabilités. Variable aléatoires. Notion de loi de probabilité : loi binomiale, loi de Gauss ou normale, loi des grands nombres, loi de Poisson.

3. Statistique appliquée. Estimation d'une moyenne (dans le seul cas où la loi de distribution est normale). Valeur significative d'une moyenne, intervalle de confiance.

L'ambition est notable de transposer ainsi en bloc, à des aménagements didactiques près, une partie du texte du savoir savant correspondant. Là encore, la sollicitude noosphérienne envers un projet qui entend changer si fortement la culture scolaire ne se dément pas : Louis Guerber et Paul-Louis Hennequin, en particulier, reprennent la plume pour écrire une *Initiation aux probabilités* qui paraît en 1968 et dont la bibliographie est un résumé de la production savante sur les questions traitées, du moins dans le cadre national.

La transposition du savoir statistique est, on l'a dit, peu élaborée. Mais surtout, se prenant à son propre jeu, elle porte essentiellement sur les objets techniques et technologico-théoriques emblématiques de l'activité statistique beaucoup plus que sur les problématiques sociales et scientifiques qui engendrent cette activité. Qu'espère-t-on par exemple en traçant un histogramme ? Oubliant que l'usage des représentations graphiques est somme toute récent dans la jeune histoire de la statistique [72], une telle représentation devient, dans la statistique enseignée, un geste réflexe, automatique, dont l'enjeu n'est jamais très clairement énoncé. Qu'attend-on, de même, du calcul d'une moyenne ? À cet égard, il ne suffit pas de comparer les avantages et les inconvénients de divers indicateurs de tendance centrale (moyenne, médiane, mode, etc.) : l'ironie dubitative que Claude Bernard avait autrefois manifestée contre cet automatisme de calcul n'apparaît pas, ici, dénuée de toute justification. La réussite de l'enseignement prévu aurait supposé sans doute que la culture scolaire s'inscrive dans une culture plus large où soient audibles – sans pour autant que le profane ait les moyens d'y répondre – quelques-unes au moins des questions génératrices de la statistique. Or, ainsi que nous le verrons, une telle culture, qui existe sans doute pour de multiples communautés professionnelles ou académiques dans des secteurs d'activité divers, n'existe pas dans la culture commune qui baigne la société française et son École. En conséquence, l'enseignement que les professeurs doivent prodiguer et les apprentissages que les élèves

[72] Voir Spence (2000) et aussi http://www-stat.wharton.upenn.edu/~hwainer/Introduction%20Jan%2020.doc. Dans la notice biographique que Lucette Le Van-Lemesle a consacrée à Levasseur (Le Van-Lemesle, 1994), on peut lire ceci : « L'autre type de procédé pédagogique est le graphique. En 1901, quand Levasseur fait le bilan de son enseignement au CNAM, le procédé est devenu "très usité", mais il l'était beaucoup moins en 1871. Levasseur explique qu'il a construit lui-même plus de 200 graphiques pour ses élèves du CNAM, et qu'il les juxtapose avec ses listes de chiffres pour rendre les variations de celles-ci lisibles "d'un seul regard". »

doivent assumer fleurissent dans une pénurie de sens. Les effets d'une telle situation – qui, en outre, leur est brutalement imposée –, se produiront rapidement. Un arrêté du 19 mars 1970 modifie les programmes des classes de première. Dans les classes de première A, B, C et E un nouveau programme, notablement réduit, de statistique et probabilités est promulgué :

1. Description statistique d'une population ou d'un échantillon.

Documents statistiques ; représentations graphiques.

Effectifs, fréquence.

2. Espaces probabilisés finis (Ω, $\wp(\Omega)$, p).

Exemples (dés pipés ou non, cartes, urnes).

Variable aléatoire numérique ; événements liés à une variable aléatoire X (par exemple : $X = a$ donné ; $X < a$ donné).

Fonction de répartition, croissance.

Distributions dans $\mathbb{R}$. Distribution binomiale.

Pour la classe de première D, le libellé ci-dessus est amputé de ses trois derniers alinéas [73]. Dans tous les cas, cependant, la matière jusque-là distribuée entre les deux années se trouve en partie ramenée à la seule première année. Le volet proprement statistique du programme est réduit à un minimum désormais commun aux classes de première A, B, C, D et E – la classe de première C ne fait plus exception. Mais il écarte les thèmes articulant ce minimum avec quelques-uns de ses usages sociaux les plus saillants (indices, chroniques, etc.). Un arrêté du 14 mai 1971 modifiera en conséquence les programmes des terminales A, B, C, D et E : les évictions constatées dans les nouveaux programmes de première y apparaissent définitives. Dans la section A, le « programme complémentaire » ne porte que sur le calcul des probabilités. Dans la section B, la partie « statistique et probabilités » du programme comporte une unique prescription : « révision du programme de première B ». La section D, dont le programme de probabilités inclut jusqu'à la loi faible des grands nombres, se voit prescrire une semblable révision, avec en plus des « exercices pratiques », notamment de « calcul de coefficients de corrélation observés ». Enfin, les sections C et E ont le même programme que la section D, mais amputé de tout aspect statistique.

Dans le deuxième tome du manuel de mathématiques pour les classes de première C, D et E signé par Pierre Théron, Marcel Couturier et Jean-Louis Boursin et paru chez Bordas en 1970, la partie correspondant au volet « statistique et probabilités » du programme est

[73] Un commentaire des programmes précise : « Le programme est le même dans les sections A, B, C, E ; paradoxalement, et pour une question d'équilibre entre les disciplines, il a dû être allégé en section D, mais la compensation se fera en section terminale D par rapport aux sections C et E. »

toujours appelée, sans doute par inertie, « introduction à la statistique ». Mais elle n'occupe plus désormais que vingt pages : la réduction est on ne peut plus sensible ! Dans un manuel pour les mêmes classes paru en 1974 chez Hachette dans la collection Aleph_1 et signé d'un quintette d'auteurs [74], la partie statistique occupe de même quelque vingt-cinq pages. Cette diminution correspond, certes, à la prescription officielle. Mais elle est sans doute en partie une réaction à l'irritation provoquée par un enseignement que l'absence d'une vraie culture statistique a laissé s'étioler. Le manuel de la collection Aleph_1 comporte, au seuil de chacun de ses dix chapitres, un court texte intitulé *Préliminaires* qui présente le contenu du chapitre. Le ton en est en plusieurs endroits un peu désenchanté, voire dépressif [75]. Mais le commentaire relatif au chapitre 4, intitulé sobrement *Statistique*, est sans doute unique en son genre tant il fait dans la dépréciation et la lassitude désespérée ; nous le reproduisons ci-après *in extenso* [76] :

> On considère souvent ce chapitre d'initiation comme ennuyeux. Il est vrai qu'il ne contient aucun raisonnement et se borne à des définitions finalement assez nombreuses.
>
> Voici donc un cas où l'utilisation du livre en classe est sans difficulté aucune, mais aussi sans beaucoup de profit intellectuel. Pourtant la connaissance des notions qui s'y trouvent est évidemment nécessaire, non seulement pour répondre au souci louable d'étudier effectivement le programme mais aussi en vue de comprendre quelque chose à la masse d'informations statistiques dont la vie quotidienne nous abreuve.
>
> Une solution consiste probablement à prendre comme thème d'étude du contenu de ce chapitre un ou plusieurs documents relatifs à la vie locale (celle du lycée par exemple, effectifs ou autres paramètres) et de rechercher avec la classe les différents moyens (graphiques ou de calcul) d'en mettre en évidence les principales caractéristiques. Une telle manière de procéder (en travaux pratiques) permet une assimilation plus efficace et plus agréable des rudiments ici présentés.

Ce commentaire se passe de commentaires. Il énonce clairement l'effet de l'absence d'une vraie culture statistique, dans l'enseignement de la statistique, sur les enseignants et, sans doute, sur les élèves, sans parler des militants de cet enseignement qui ont dû en rabattre sérieusement sur leurs ambitions des années 1960. Ainsi voit-on s'installer un discours qui s'est imposé jusqu'à aujourd'hui : faute de situations appelant fonctionnellement les notions cardinales élaborées par les statisticiens – population, caractère, échantillon, etc. –,

---

[74] C. Gautier, G. Girard, D. Gerll, C. Thiercé, A. Warusfel.

[75] Le texte des « Préliminaires » du chapitre 5, *Probabilités*, commence par exemple ainsi : « En dépit d'une tradition regrettable, l'enseignement des probabilités ne doit pas être considéré comme pratiquement voué à l'échec. »

[76] *Op. cit.*, p. 76.

l'enseignement de la statistique devient pour nombre de professeurs une présentation ennuyeuse d'un vocabulaire dont l'introduction, non motivée, peut être vécue comme l'imposition d'usages sans doute respectables pour qui veut bien les adopter mais dont la force de conviction pour qui leur est extérieur semble voisine de zéro.

Dans cette même période, la puissante réforme des mathématiques modernes, qui affecte tout le corpus mathématique traditionnellement ou nouvellement enseigné, est un facteur de contexte qu'on ne saurait ignorer. La « modernisation » engagée dynamise certaines parties du corpus (l'algèbre et les structures numériques par exemple), en allège d'autres tout en tentant de leur donner un fondement plus solide (on pense ici à la géométrie), et est contemporaine de l'amenuisement – sinon de l'éviction – d'autres parties encore, quelles soient anciennes (les coniques, par exemple) ou nouvellement instituées (la statistique). Mais il n'était pas dans la nature intrinsèque du processus de modernisation que la statistique en pâtisse de façon particulière : comme les autres domaines des mathématiques pures ou appliquées, la statistique et les probabilités étaient prises alors dans un processus de modernisation affectant de part en part le continent mathématique, ce dont les ouvrages pour l'enseignement supérieur témoignent clairement [77]. Les effets de cette « mise à jour » ne sont, au demeurant, nullement absents des manuels [78]. C'est ailleurs, nous l'avons suggéré, qu'il faut chercher les raisons de la disgrâce de la statistique dans l'enseignement des mathématiques donné au lycée. Les commentaires des programmes de 1970 en témoignent à demi-mot quand on y lit : « L'expérience de cet enseignement, introduit depuis 1962, d'abord en section économie (alors T'), a montré qu'il y a avantage à commencer par une étude statistique descriptive de niveau modeste. » Dans le même alinéa, le texte cité rappelle pourtant que « les professeurs peuvent traiter la statistique et les probabilités dans l'ordre de leur choix ». Les manuels ne sont pas en reste. Si celui de la collection Aleph_1 traite d'abord la statistique puis les probabilités, le manuel de Théron, Couturier et Boursin inverse cet ordre, consacrant en premier lieu une trentaine de pages à l'étude des probabilités. L'affaire est jugée : beaucoup de professeurs regarderont le chapitre de statistique comme un pensum infligé tant à eux-mêmes qu'à leurs élèves, ce dont les « préliminaires » du quintette d'auteurs reproduits plus haut témoignent sans ambiguïté.

---

[77] Voir par exemple Fourgeaud & Fuchs (1967).

[78] Ainsi le manuel de la collection Aleph_1 mentionné plus haut propose-t-il, en 1974 encore, la définition suivante : « On appelle *statistique* d'un ensemble fini E, relativement à une partition $S = \{ A_1, A_2, \ldots, A_n \}$ de cet ensemble, la liste des cardinaux des éléments de *S*. »

À cet égard, les programmes qui viendront ensuite, conçus et promulgués dans une époque de changement politique sensible, n'innoveront pas véritablement, à ceci près qu'ils font démarrer – et dans quelques cas essentiels, s'arrêter – l'étude de la statistique en classe de seconde [79]. Pour l'essentiel le programme se réduit alors à ceci :

> Description statistique d'une population ou d'un échantillon. Tableaux de données, relevés périodiques, réponses à une enquête… ; classement de ces données, représentations graphiques diverses.
>
> Effectifs, fréquences, fréquences cumulées. Moyennes.

Le changement général dans l'abord de la matière des programmes se traduit, ici comme ailleurs, par des commentaires d'une subtilité didactique qui, avant comme après, peut surprendre : « À l'issue de la Seconde, précisent des commentaires, les élèves doivent savoir analyser, *sur un exemple*, un tableau de données (calcul de fréquences, de moyennes…), mais *les définitions générales des concepts mis en jeu ne sont pas exigibles*. » Ce qui est surtout frappant, c'est l'absence de référence à une problématique propre à la statistique : par contraste, les motifs justifiant la présence d'un enseignement de statistique apparaissent tous centrifuges, voire périphériques par rapport à une telle problématique. Les commentaires du programme assignent en effet à la statistique un « quadruple intérêt ». Le premier est celui d'apprendre à effectuer une « lecture pertinente de tableaux statistiques », cela parce qu'un tel savoir-faire « est maintenant nécessaire à la compréhension du fonctionnement de la société », sans qu'on nous dise en quoi exactement la chose est nécessaire ou même féconde. Un deuxième mobile, à peine plus « occasionnaliste », tient dans ce que l'étude de la statistique serait « un excellent terrain pour des *activités interdisciplinaires* où les élèves peuvent faire preuve d'initiative et développer leurs méthodes de travail ». La statistique – troisième raison –, qui oblige à « *savoir organiser, représenter et traiter des données* fournies à l'état brut », serait encore l'occasion de se frotter au problème de la mathématisation d'une situation, ce qui est « un élément majeur de toute formation scientifique ». Quatrième motif, enfin, la statistique se présente comme « un secteur d'investissement des activités numériques, des représentations graphiques ou des outils de calcul (calculatrices, ordinateurs) ». Ainsi la statistique n'est-elle appréciée ici que par sa contribution supposée à la réalisation d'objectifs généraux de formation, sans que la spécificité de son apport soit jamais explicitement mise en avant. Le fleuron d'une telle apologétique se trouve sans doute dans cette ultime assertion : « se familiariser progressivement avec le concept de moyenne est un objectif intéressant pour

[79] Arrêté du 26 janvier 1981, paru au *BOEN* spécial n° 1 du 5 mars 1981.

la formation proprement mathématique. » La statistique, matière du programme de mathématiques par défaut.

Ces conditions semblent faites pour que la statistique, qui a fait parler d'elle à la fin des années 1960, se fasse maintenant oublier. Le programme minimaliste instauré touche, après la classe de seconde, les classes de première. En première S et E, mais aussi dans les premières F1, F2, F3, F4, F5, F6, F7, F7', F8, F9, F10, F12, G et H, le programme de statistique fait l'objet de ce commentaire préalable :

> La statistique constitue un excellent terrain pour des activités interdisciplinaires ; les élèves peuvent y développer leurs méthodes de travail et apprendre à organiser, à représenter et à traiter des données. Elle permet aussi d'exploiter les représentations graphiques et les outils de calcul.

Quant aux premières A1 et B, elles ont droit à une version particulière du même commentaire, qui s'y trouve un peu amputé mais fait l'objet d'une adjonction savoureuse :

> Cette partie est particulièrement bien adaptée aux objectifs des sections A_1 et B. Elle favorise les activités interdisciplinaires et donne aux élèves l'occasion d'organiser, de représenter, de traiter des données.

Pour toutes ces sections, le programme minimal comporte l'introduction des notions de moyenne et d'écart type ; pour la plupart d'entre elles, les notions de fréquence, de fréquences cumulées et d'histogramme sont également introduites ; pour les sections F7, F7', F8, G et H s'ajoute l'étude de séries statistiques à deux variables avec ajustement linéaire par une méthode graphique. L'abord de toutes ces questions, pourtant, fait toujours l'objet de l'étrange restriction déjà signalée que, par exemple, un commentaire du programme de 1re G formule ainsi :

> Les activités pourront mettre en évidence l'intérêt de notions telles que : mode, médiane, quartiles, regroupement en classes, droite de Mayer… mais aucune connaissance à ce sujet n'est exigible des élèves.

Les programmes pour les classes terminales correspondantes feront mieux apparaître une réalité qui, en vérité, s'était déjà exprimée subtilement dès la réforme de 1966. Ici apparaît en effet plus crûment ce fait que la statistique n'est pas véritablement pensée comme un savoir pour le citoyen « générique », qu'il soit « d'en bas » ou « d'en haut », mais qu'elle conviendrait plus particulièrement à certaines orientations scolaires et, en filigrane, à certains niveaux d'activité socio-économiques. La statistique est en effet absente totalement – au profit des probabilités – des classes terminales C, D et E. Elle est petitement présente dans les terminales A2 et A3, mais c'est là un rattrapage, car les programmes de première correspondants n’en comportaient pas. Surtout, elle est présente en première dans les sections F1, F2, F3, F4, F5, F6, F9, F10 où sont introduites les séries statistiques à deux variables, avec ajustement linéaire par une méthode graphique, et dans les sections F7, F7’, F8, G2, G3 et H, où on pratique la méthode des moindres carrés et le coefficient de corrélation linéaire (mais où, toutefois, « les formules pourront être admises sans démonstration »). Dès lors la statistique apparaît à la fois comme un savoir spécialisé, marqué socialement, desserti de la culture mathématique commune.

Les programmes suivants, qui entreront en vigueur quelque dix années plus tard, au début des années 1990, ne changeront pour l’essentiel que peu de choses au tableau précédent, à ceci près que, désormais, les moyens de calcul électronique – calculatrices, ordinateurs – changent les conditions du travail [80]. En 1981, le chapitre que le programme consacrait à la statistique était censé présenter, on l’a vu, un « quadruple intérêt ». Désormais le programme énonce simplement un « triple intérêt » et réduit un peu l’emphase de certaines formulations du programme précédent :

> Le chapitre complète les acquis du collège. Il présente un triple intérêt. D’abord la lecture pertinente de tableaux statistiques est nécessaire à la compréhension des *phénomènes économiques et sociaux*. Ensuite, c’est un excellent terrain pour des *activités interdisciplinaires* où les élèves peuvent faire preuve d’initiative et développer leurs méthodes de travail. En outre, savoir *organiser*, *représenter et traiter des données* fournies à l’état brut, savoir apprécier l’intérêt et les limites d’un processus de mathématisation d’une situation est un élément majeur de toute formation scientifique.

La situation établie depuis le début des années 1970 perdure tout en se stylisant quelque peu. En seconde, on étudie toujours les effectifs et fréquences cumulées ou non, ainsi que la moyenne et l’écart type. Mais en première une rude simplification s’impose. Les séries L et S – littéraire et scientifique – ne comportent plus de statistique : dès cette classe, en effet, tout est donné aux probabilités. Il en va autrement pour la classe de première ES où un travail remarquable de rénovation est tenté. Le programme *stricto sensu* comporte deux titres, « L’information chiffrée » et « Algèbre – analyse ». Le premier titre est divisé en cinq sections : A) Les pourcentages ; B) Les suites ; C) Les moyennes ; D) Statistiques descriptives ; E) Probabilités. Cette organisation formelle révèle et dissimule à la fois une volonté certaine de contribuer à la création d’une vraie culture mathématique adéquate, à ce niveau du cursus scolaire, à l’étude des réalités économiques et sociales. Mais il s’agit là

[80] Le programme de seconde de 1981 contenait par exemple ce commentaire, désormais en partie obsolète : « Les calculs les plus longs pourront être répartis entre les élèves et effectués à la maison ; l’analyse des graphiques permettra d’en contrôler l’exactitude. »

d’une exception à la règle et, en vérité, d’une victoire à la Pyrrhus : le programme de la terminale ES reviendra très vite sur cette avancée et ramènera l’étude de la statistique à l’étiage atteint pour l’essentiel dès le début des années 1970. La situation semble figée.

Chapitre 2

La réforme des années 2000

1. Un changement « en franche contradiction »

Le fascicule hors série n° 6 du *Bulletin officiel de l'Éducation nationale* qui paraît le 12 août 1999 rend public le texte du nouveau programme de mathématiques applicable en seconde à compter de l'année scolaire 2000-2001. L'année 1999-2000 est une année de transition : le programme antérieur fait provisoirement l'objet de simples allègements qui, s'agissant de la partie statistique, consistent en la suppression, sans commentaire, des notions d'effectifs cumulés et de fréquences cumulées [1]. Le programme qui s'applique à la rentrée 2000 se veut à plusieurs égards novateur. Il est composé de trois grands « chapitres », intitulés respectivement *Statistique*, *Calcul et fonctions* et *Géométrie*. Pour chacun d'eux, le texte du programme comporte trois rubriques : un « rappel des programmes antérieurs », des « objectifs », et une rubrique tripartite, intitulée « Contenus ; Capacités attendues ; Commentaires ». À cela s'ajoute, pour chacun des trois chapitres, une liste de « thèmes d'étude », disposition du programme sur laquelle nous reviendrons plus loin. La présence du rappel des programmes de collège est ici assez fortement significative : les auteurs du nouveau programme de seconde ont dû travailler en tenant compte de programmes qu'ils n'avaient pas faits eux-mêmes et qui, sans doute, sur plusieurs points, ont mis des bornes à la libre élaboration d'un programme de statistique selon leur cœur. Ainsi en va-t-il avec les notions d'effectifs cumulés et de fréquences cumulées, inscrites au programme de quatrième, et dont on a dit que les auteurs se hâtent de les rayer du programme de seconde dès l'année de transition 1999-2000. Le motif de ce rejet est, au reste, bien illustratif de ce que seront les difficultés de réception de ce nouveau programme par les professeurs ; on ne le trouve ni dans le programme proprement dit, ni dans son document d'accompagnement, mais dans une « annexe commune aux classes de première des séries L, ES et S » publiée par le GTD de mathématiques [2] pour éclairer quelques points touchant à la question des « boîtes et quantiles ». À propos de la détermination de la médiane d'une série statistique, ce texte contient en effet l'observation suivante :

> La procédure qui consiste à tracer une courbe dite de fréquences cumulées croissantes, continue, obtenue par interpolation linéaire à partir des valeurs $F(a_i)$ définies ci-dessus et à définir la médiane comme l'intersection de cette courbe avec la droite d'équation $y = 0{,}5$, ou avec une courbe analogue dite des fréquences cumulées décroissantes n'est pas une pratique usuelle en statistique et ne sera pas proposée au lycée.

On note ici le souci d'éliminer des pratiques que les auteurs jugent inactuelles et, de ce fait, indésirables, tout en ne s'en expliquant auprès des professeurs que de façon fort concise, périphérique, ou même sans s'en expliquer du tout, comme il en va s'agissant de l'allègement apporté à l'ancien programme pour l'année de transition 1999-2000.

D'une façon plus générale, les programmes de collège, à l'instar des programmes de lycée examinés dans le précédent chapitre, se sont stabilisés autour de notions réputées emblématiques de la « méthode statistique » : tableaux statistiques et représentations graphiques (diagrammes à barres, diagrammes circulaires, etc.), calcul de moyennes simples ou pondérées, détermination de l'étendue « de la série ou de la partie de la série obtenue après élimination de valeurs extrêmes », cela, en troisième, « avant toute introduction d'indice de dispersion ». Par rapport à l'inventaire des notions étudiées au collège, le nouveau programme de seconde apparaît alors comme un affaiblissement, voire une édulcoration du « cours de statistique » traditionnel. On l'a vu avec la notion de fréquences cumulées ; le phénomène se reproduit avec la suppression d'un objet jusqu'alors inamovible du cours de statistique : l'écart type. Dans une intervention devant le bureau national de l'APMEP [3] le 4 décembre 1999, la présidente du GTD de mathématiques, Claudine Robert, précise [4] que c'est simplement « par manque de temps que ni l'écart type ni l'écart interquartile ne sont au programme de seconde ». Sans doute parce qu'elle n'ignore pas l'irritation que provoque chez

---

[1] Ces allègements sont rendus publics dans le hors-série n° 5 du *BOEN* qui paraît le 5 août 1999.

[2] Les GTD sont les « groupes techniques disciplinaires » relatifs aux différentes disciplines enseignées, dispositif sur lequel nous allons revenir.

[3] Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public.

[4] D'après un compte rendu dû à Pascale Pombourcq et que l'on trouvera sur le site Internet de l'APMEP (http://www.apmep.asso.fr/0412sta.html). Voir aussi le compte rendu de Pascale Pombourcq paru dans le numéro 90 du *Bulletin à Grande Vitesse* de l'APMEP en février 2000.

les professeurs le remplacement d’une notion mathématiquement un peu plus complexe par celle, beaucoup plus simple, d’étendue, elle fait l’apologie de cette dernière :

> L’étendue est un critère fruste de dispersion mais il ne faut pas oublier qu’elle donne les valeurs extrêmes et que ce sont ces valeurs qui sont causes de catastrophes : crues… Il ne faut pas non plus oublier qu’il peut ne pas y avoir de limite à l’étendue.

Elle explicite plus au long encore sa remarque dans un article qui paraît dans le numéro 425 (novembre-décembre 1999) du *Bulletin de l’APMEP*, écrivant à ce propos :

> La mesure de dispersion retenue est l’étendue. Signalons que cette mesure, bien que grossière, figure sur toutes les cartes de contrôle industriel et est systématiquement calculée par tous les grands logiciels de statistique. Enfin cette mesure intervient pour l’estimation d’un écart type théorique lorsqu’on a moins de 10 données (et cela arrive aussi bien dans l’industrie pour des expériences coûteuses qu’en médecine pour des résultats d’examens invasifs ou concernant des maladies rares).

En vérité, le retrait de l’écart type du programme de seconde n’a pas seulement des raisons contingentes. Dans le même article, Claudine Robert use d’un argument que, à l’époque, la culture statistique moyenne des professeurs de mathématiques ne leur permet sans doute pas de bien contrôler :

> … n’est-il pas plus parlant de résumer une petite série de notes d’un élève ou d’une classe par l’étendue plutôt que par l’écart-type ? En fait, en dehors d’un ordre de grandeur de référence ou de la connaissance du caractère gaussien des données, l’écart-type est un paramètre peu interprétable.

Cet argument sera discrètement repris dans le programme de seconde, en un passage où celui-ci est situé dans la perspective des classes suivantes :

> En classe de première et de terminale, dans toutes les filières, on réfléchira sur la synthèse des données à l’aide du couple moyenne, écart-type qui sera vu à propos de phénomènes aléatoires gaussiens et par moyenne ou médiane et intervalle interquartile sinon.

Les évictions assumées (effectifs cumulés et fréquences cumulées, écart type) renvoient donc *in fine* à des raisons plus profondes touchant à la pratique d’une science statistique voulue authentique, qui ne peut se satisfaire de techniques désuètes ou d’une conceptualisation trop tôt arrêtée. C’est dans l’article donné au *Bulletin de l’APMEP* que Claudine Robert énonce sans doute le plus nettement son rejet d’une statistique scolaire ainsi fossilisée [5] :

---

[5] Claudine Robert repère ici un phénomène classique de transposition didactique, mais son repérage (ou du moins le compte rendu qui en est fait dans l’article cité) est évidemment unilatéral : la compatibilité du système avec son environnement n’est examinée que du seul point de vue des « savants ». Cette indispensable compatibilité se caractérise en réalité par une double contrainte (Chevallard, 1991, p. 26) : « D’une part le savoir

Il y avait, jusqu'à présent, dans les programmes de Seconde, de Première et Terminale L et ES, un chapitre dont le titre était *statistique*. L'esprit de ces chapitres est celui « des statistiques » et non de « la statistique » et témoigne d'une époque où stocker un grand nombre de données était réservé aux instituts spécialisés. Dans le cadre de ce programme et avec le relais des manuels, s'est développée une statistique propre à l'enseignement secondaire et qui s'est peu à peu dissociée de celle que pratiquent les analystes et ingénieurs statisticiens (ainsi, dans de nombreux manuels, la médiane d'une série de données est calculée à partir d'une interpolation linéaire de la fonction de répartition, ce que les statisticiens ne font jamais).

Trois grandes questions sont mises au cœur du travail statistique en seconde. La première suppose une réflexion sur le choix des « résumés numériques d'une série statistique quantitative » : nous venons de suggérer ce que, sous des dehors familiers, peut cacher de novateur cette demande. La deuxième est entièrement neuve : s'articulant franchement au fait cardinal de la variabilité, fondement de la science statistique, le programme introduit la notion de fluctuation d'échantillonnage, qui fait sortir de l'univers clos des séries statistiques examinées isolément une à une, ce qui était le lot de l'ancien cours de statistique. La troisième question est, si l'on peut dire, plus neuve encore : c'est celle de la simulation, « à l'aide du générateur aléatoire d'une calculatrice ». Cette question, que le programme associe formellement à celle des fluctuations d'échantillonnage, « ne doit pas faire l'objet d'un cours », mais donner lieu à diverses « études statistiques », dont les sujets seront « fonction de l'intérêt des élèves, de l'actualité » et des goûts de l'enseignant. L'élève est invité à consigner les principaux éléments de telles études dans un « cahier de statistique » où apparaîtront notamment les traitements de données et les expériences de simulation, ainsi que les « raisons qui conduisent à faire des simulations ou traiter des données ».

Un tel projet est d'emblée voué à rencontrer un obstacle de taille, dû à l'inadéquation de la transposition didactique ainsi voulue avec les praxéologies professorales les plus prégnantes – qui tendent notamment à mettre au premier plan les structures au détriment des fonctions, en faisant préférer par exemple le calcul d'un écart type à une interrogation sur les motifs de recourir à la notion d'écart type. Bien entendu, les auteurs du programme ne sont pas dupes de l'existence d'un tel obstacle, même s'ils le ramènent classiquement à n'être que

---

enseigné – le savoir traité à l'intérieur du système – doit être vu par les "savants" eux-mêmes comme *suffisamment proche du savoir savant,* afin de ne pas encourir le désaveu des mathématiciens, qui minerait la légitimité du projet social, socialement accepté et soutenu, de son enseignement. D'autre part, et dans le même temps, le savoir enseigné doit apparaître comme *suffisamment éloigné du savoir des "parents"* (ou du moins de ces fractions de classes, qui dans telle formation sociale donnée, tiennent le haut du pavé en matière d'éducation), c'est-à-dire du savoir banalisé dans la société (et banalisé notamment par l'école !). »

l'effet d'un manque provisoire de formation dans la matière enseignée, ainsi que Claudine Robert l'explicite dans son article du *Bulletin de l'APMEP* déjà cité :

> Le programme que nous proposons est sans doute déroutant pour un corps professoral compétent, mais qui, dans son ensemble, n'a jamais fait de statistique, ou alors en annexe d'un cours de probabilité. Les enseignants de mathématiques devront se former dans un domaine qu'ils n'ont en général pas travaillé dans leurs études.

Devant cet état de fait, elle choisit toutefois d'être optimiste et note encore :

> Certains auraient souhaité attendre encore quelques années afin notamment que les enseignants se forment ; mais comment les professeurs peuvent-ils se former et avoir simultanément une pratique enseignante qui, si elle est conforme aux programmes actuels, sera en franche contradiction avec ce qu'ils apprendront ? Nous pensons au contraire que l'enseignement des rudiments de la statistique les aidera à acquérir peu à peu des connaissances plus profondes dans ce domaine.

À l'observateur extérieur, la situation apparaît délicate. À n'en pas douter, ces difficultés sont, d'un point de vue didactique, incomplètement analysées.

2. Les fondements de la réforme

Le nouveau programme de seconde est un élément d'un vaste chantier de refonte des programmes du lycée ouvert par Claude Allègre, qui est depuis le 4 juin 1997 le ministre de l'Éducation nationale, de la recherche et de la technologie du gouvernement de Lionel Jospin. L'élaboration des nouveaux programmes des lycées est à la charge des groupes techniques disciplinaires (GTD), dont le ministre nomme les présidents en janvier 1999. Pour les mathématiques, il s'agit de Claudine Robert, professeure à l'Université Joseph Fourier (Grenoble I). Un communiqué de presse du 14 janvier 1999 précise :

> Les présidents des GTD ont été réunis le 12 janvier 1999 au ministère pour définir les axes de leurs travaux et arrêter le calendrier.
>
> Les programmes de mathématiques, de sciences physiques et de biologie feront l'objet d'une profonde rénovation visant à éviter l'empilement de connaissances parfois obsolètes ; l'objectif ne sera pas de rechercher l'exhaustivité mais de choisir un nombre restreint de thèmes essentiels qui feront l'objet d'un travail approfondi.
>
> De nouvelles pratiques pédagogiques et l'utilisation de supports variés, en particulier les nouvelles technologies, seront encouragées dans les autres disciplines.
>
> Les nouveaux programmes entreront en vigueur en septembre 2000 pour la classe de seconde, en 2001 et 2002 pour les classes de première et de terminale.

Le *BOEN* n° 28 du 15 juillet 1999 précise la composition des GTD. Outre Claudine Robert, le GTD de mathématiques est composé de Philippe Clarou, professeur au lycée Pablo Neruda de Saint Martin d'Hères et formateur à l'IUFM de Grenoble, d'André Laur, professeur au lycée Emmanuel Mounier de Grenoble (les deux lycées sont jumelés), de Claudine Ruget, inspectrice générale de l'Éducation nationale, et de Rémi Langevin, professeur à l'université de Bourgogne (Dijon). Chaque GTD a été voulu par le ministre peu nombreux. Le travail attendu de ces groupes techniques ne souffre pas de délai. Présenté, suivant la procédure prévue, au Conseil supérieur de l'Éducation en juillet 1999, le projet de programme de mathématiques fait ainsi l'objet d'un arrêté le 4 août, est publié au *Journal officiel de la République française* le 8, et paraît au *BOEN*, ainsi que nous l'avons vu, le 12. L'effort accompli l'est donc dans un temps remarquablement resserré. Plusieurs facteurs ont permis une telle rapidité. Pour les deux chapitres baptisés respectivement *Calcul et fonctions* et *Géométrie*, « le futur programme s'inspire largement du contenu des programmes antérieurs », précise le GTD à l'occasion d'une rencontre avec les animateurs de la revue *Réciproques* [6], qui en publie un compte rendu dans son numéro 11 paru en mars 2000. Tout d'abord, le travail a été, si l'on peut dire, facilité par l'obligation de procéder à des coupes. Le compte rendu déjà cité l'explicite ainsi :

> Mais le GTD a dû répondre à la demande ministérielle d'un programme pour un horaire en réduction sensible par rapport au précédent. Il a donc fallu faire des coupes qui concernent légèrement l'analyse et beaucoup la géométrie : si, en s'appuyant sur ce qui a été fait en géométrie au collège, on peut « faire des mathématiques », des allégements un peu conséquents dans les autres parties auraient par contre conduit à des champs disciplinaires vides de contenu. Il semble indispensable de maintenir la variété des champs dans lesquels l'élève exerce ses capacités mathématiques au cours d'une véritable formation dans cette discipline.

De fait, le texte du programme proprement dit est relativement bref, ce que, dans la rencontre déjà citée, le GTD assume cette fois comme son choix propre :

> Nous avons voulu laisser l'initiative aux enseignants : en dire suffisamment sur les capacités attendues pour que tous les élèves aient les mêmes acquis de base, mais laisser pour le reste la plus grande liberté aux enseignants dans leurs choix pédagogiques.

[6] Cette revue, qui a eu trois livraisons annuelles entre décembre 1996 et juin 2003, était diffusée à l'ensemble des professeurs de mathématiques de l'Académie de Bordeaux. Selon la présentation qui en est faite sur le site Internet de l'académie de Bordeaux, elle proposait « des articles de réflexion pédagogique, des applications des mathématiques, des enquêtes, des énigmes ». (Voir http://mathematiques.ac-bordeaux.fr/peda/peda_mjc.htm.)

Reste le chapitre de statistique, qui suscitera force protestations. Dans le compte rendu mentionné, le problème est au reste soulevé dans des termes peu amènes : « Pourquoi ces statistiques ? Et pourquoi autant de statistiques ? », demandent les animateurs de la revue. Le GTD répond franchement qu'il « a voulu prendre en compte, en ce domaine, une évolution fondamentale que la pratique scolaire ignorait ». Et de préciser : « L'objectif du GTD est de poser les bases d'une statistique plus moderne, en tenant compte des acquis de collège en matière de statistique descriptive. » Or si le travail de « modernisation » a pu être mené à bien si rapidement, au prix d'une consultation que le GTD reconnaît insuffisante (le ministère demandait un programme définitif pour le mois de juin), c'est que le GTD bénéficiait, grâce à sa présidente, de tout un travail antérieur sur lequel faire fond pour concevoir et rédiger un programme rénové de statistique.

Lorsqu'elle est sollicitée pour assurer la présidence du GTD de mathématiques, Claudine Robert a publié (en 1995) un ouvrage intitulé plaisamment *L'empereur et la girafe*, et sous-titré *Initiation à la statistique* [7], ouvrage dont le contenu a été rodé notamment à l'occasion d'enseignements donnés à l'IUFM de Grenoble [8]. En outre, dans le cadre d'un projet de développement intitulé *Inférence statistique pour l'industrie et la santé* (IS2) lancé par l'Institut national de recherche en informatique et automatique (INRIA) de la métropole grenobloise, Claudine Robert participe à la réalisation d'une formation interactive en ligne

[7] Ce sous-titre apparaît sur la couverture de l'ouvrage. Une page de garde propose un autre sous-titre, celui de *Leçons élémentaires de statistique*.

[8] Un bref intermède biographique est ici utile. Claudine Robert, née en 1947, est la fille de Laurent Schwartz (1915-2002). Elle appartient par là à un monde où, depuis plusieurs générations, se côtoient, par filiation et alliance, de grands scientifiques et de hauts responsables politiques, gens de pouvoir et de contre-pouvoir. Le père de Laurent, Anselme Schwartz (1872-1957), est membre de l'académie de chirurgie ; sa mère, Claire Debré (1888-1972), est la sœur du professeur de pédiatrie Robert Debré (1882-1978), lui-même père du premier ministre Michel Debré (1912-1996), et cofondateur avec Ludwig Rajchman (1881-1965) de l'UNICEF (1946). Laurent a deux frères, Daniel, né en 1917, dont nous avons déjà parlé, et Bertrand, né en 1919, qui créera l'Institut national de formation des adultes de Nancy et sera en 1989, pour ses travaux et son action en matière d'insertion et de formation professionnelles, le premier lauréat du prix Grawemeyer d'Éducation (que ses fondateurs souhaitent voir reconnaître comme un prix Nobel en la matière). Laurent Schwartz, dont le grand oncle est Jacques Hadamard (1865-1963), épouse en 1938 Marie-Hélène Lévy, fille du mathématicien Paul Lévy (1886-1971) et elle-même mathématicienne. Les mathématiques, y compris les probabilités (sur lesquelles porteront les derniers travaux de Laurent Schwartz, qui reçoit la médaille Fields en 1950 et publiera son dernier article en 1994), et aussi la statistique, notamment médicale (Daniel Schwartz), ainsi que le sens des responsabilités sociales notamment en matière de formation et d'enseignement – les trois frères Schwartz devraient ici être cités – sont un environnement évident pour Claudine Robert.

intitulée « Statistique médicale en ligne » (SMEL), dont elle est la co-conceptrice avec Bernard Ycart du laboratoire « Mathématiques appliquées à Paris 5 » (MAP5) de l'Université René Descartes [9]. Le site Internet créé dans ce cadre [10] fournira, sous le nom de « Statistique en ligne » (SEL), un site proposé comme offrant des ressources aux enseignants pour les aider à moderniser leur enseignement de la statistique à partir de la rentrée 2000 [11]. Outre les travaux que Claudine Robert a réalisés en tant que statisticienne [12], le travail de mise en forme des outils conceptuels et techniques de la statistique requis par le projet SMEL ainsi que l'effort d'élaboration d'un texte du savoir statistique visant des non-spécialistes de la discipline constituent, semble-t-il, le matériau dont va se nourrir le travail du GTD de mathématiques en matière de statistique. C'est cet acquis – relatif à la statistique et à sa diffusion – que nous examinerons dans ce qui suit.

Plusieurs thèmes sont insistants dans le discours modernisateur à propos de la statistique. Un premier point mis en avant de manière systématique est le phénomène de fluctuation d'échantillonnage. Dans son article du *Bulletin de l'APMEP*, Claudine Robert écrit ainsi :

> L'esprit statistique naît lorsque l'on prend conscience de la fluctuation d'échantillonnage, et donc de la variabilité de la moyenne empirique et autres paramètres résumant une série. Il n'en était jusqu'à présent pas fait mention dans les programmes. La pratique ainsi induite par les anciens programmes et les manuels correspondants constitue à mon avis un réel barrage à la compréhension de la statistique, ce que la plupart des enseignants ont d'ailleurs fortement ressenti.

Un développement d'inspiration analogue, mais forcément moins polémique, se retrouve dans le document d'accompagnement du programme de seconde rendu public en juin 2000 :

> L'esprit statistique naît lorsqu'on prend conscience de l'existence de fluctuations d'échantillonnage ; en seconde, l'élève constatera expérimentalement qu'entre deux échantillons, de même taille ou non, les distributions des fréquences fluctuent ; la moyenne étant la moyenne pondérée des composantes de la

[9] Ce même laboratoire développe également un projet intitulé « Statistique en sciences humaines : champs social et politique et différences individuelles », avec divers partenaires dont le Centre de sociologie européenne et le CEVIPOF.

[10] http://www.math-info.univ-paris5.fr/smel.

[11] http://www.inrialpes.fr/sel/.

[12] La biographie officielle de Claudine Robert en tant que présidente du Groupe d'experts pour les programmes scolaires (GEPS) de mathématiques (les GEPS remplacent les GTD à l'instigation du nouveau ministre, Jack Lang, nommé en avril 2000), fait apparaître notamment les deux titres suivants : *Analyse descriptive multivariée* (Flammarion, 1989) ; *Modèles statistiques pour l'intelligence artificielle* (Masson, 1990).

distribution des fréquences est, elle aussi, soumise à la fluctuation d'échantillonnage ; il en est de même de la médiane.

Commentant ensuite, de façon plus technique, le travail attendu sur la notion de fluctuation d'échantillonnage, Claudine Robert écrit de la façon la plus nette :

> Ce travail prépare bien sûr au concept de probabilité, mais ce n'est cependant pas là le but principal. L'objectif est avant tout de faire sentir et vivre la notion de distribution de fréquences et de fluctuation d'échantillonnage ; les distributions de fréquences, les moyennes et médianes empiriques et leurs fluctuations sont des objets mentaux qu'il convient d'observer et d'étudier d'une part pour comprendre ce qu'est une question du champ de la statistique, d'autre part pour comprendre le rôle et la fonction d'un modèle probabiliste.

La question des modèles probabilistes est, nous le verrons, un appui essentiel sur lequel repose la réforme de l'enseignement de la statistique. Mais la question des fluctuations d'échantillonnage se lie immédiatement, dans le nouveau programme, à un autre point clé : celui de la simulation à l'aide de nombres pseudo-aléatoires. Lors de la brève rencontre dont rend compte le bulletin *Réciproques* déjà cité, la chose sera dite avec concision et fermeté :

> L'esprit statistique naît lorsque naît la conscience de la fluctuation d'échantillonnage : c'est pourquoi nous avons volontairement choisi de mettre dès la seconde l'accent sur la simulation aléatoire en vue de mieux appréhender cette notion de fluctuation.

Dans le résumé d'un article que Claudine Robert cosigne en 2001 dans le cadre du projet IS2, on lit de même [13] :

> Pour un apprentissage interactif de la statistique, il faut multiplier les expériences tant sur des données réelles que sur des simulations à base de nombres pseudo-aléatoires. C'est une condition nécessaire pour une compréhension concrète des notions de statistique.

La simulation aléatoire ne se fait plus aujourd'hui à l'aide de tables de nombres au hasard : elle suppose le recours à des générateurs aléatoires (ou, plus exactement pseudo-aléatoires) que fournissent les moyens modernes de calcul. Il y a là une nouvelle condition « nécessaire » qui pouvait encore être ignorée dans le livre de 1995 – *L'empereur et la girafe* –, où ne figure que l'usage d'une table de chiffres au hasard. Or la réalisation de cette condition se heurte en seconde à une difficulté pratique, en même temps qu'elle entre en résonance, positivement, avec une évolution que le ministère appuie fortement : l'introduction, dans l'enseignement secondaire, des nouvelles technologies de l'information et de la communication. Dans un article au titre alarmiste – *L'échec des maths à l'école : À qui la faute ?* – paru dans le numéro

[13] Perreau Guimaraes, Ycart & Robert (2001).

1008 du mensuel *Sciences & vie* en septembre 2001, on lira ainsi, à propos de la nécessaire « mise en activité des élèves » [14] :

> Dans les nouveaux programmes, cette activité passe d'abord par l'ordinateur. « C'est la principale nouveauté », souligne Claudine Robert, professeur à l'université de Grenoble et responsable de la refonte des programmes. « L'ordinateur permet aux élèves de simuler et d'expérimenter les principaux modèles mathématiques du cours. » De tourner une figure dans l'espace, de faire varier le paramètre d'une fonction ou de simuler un tirage aléatoire.

Dans les faits, les choses ne sont pas si simples : si le recours à l'utilisation d'une calculatrice, et plus précisément à sa touche *random*, apparaît réaliste, l'utilisation courante d'un ordinateur est, à l'époque, encore hors de portée. En principe, comme le précise le document d'accompagnement, « chaque enseignant doit pouvoir mettre à la disposition des élèves et intégrer judicieusement tableurs ou logiciels de géométrie dynamique (voire logiciel de calcul formel) ». En principe toujours, l'enseignant « doit pouvoir utiliser un système de projection collective en classe de l'écran d'un ordinateur ». Quant à l'utilisation individuelle par les élèves d'un ordinateur, le document cité se contente de noter qu'elle « suppose de disposer d'au moins un ordinateur pour deux personnes », ce qui à son tour suppose un personnel qualifié pour assurer la maintenance. Dans son article du *Bulletin de l'APMEP*, Claudine Robert est plus explicite ; commentant l'étude de la fluctuation d'échantillonnage au moyen d'une simulation, elle note entre parenthèses : « touche *random* des calculatrices pour les élèves, logiciels pour les enseignants ».

L'utilisation de nombres aléatoires (ou pseudo-aléatoires) n'est que l'une des nouveautés auxquelles les enseignants devront s'affronter. L'utilisation de la touche *random* elle-même fait problème – elle ne saurait cacher la difficulté de la notion d'aléatoire. Dans son intervention du 4 décembre 1999 devant des responsables et militants de l'APMEP, Claudine Robert semble avoir jugé bon de développer un peu ce point, si l'on en croit le passage suivant du compte rendu déjà cité [15] :

> Pour l'instant la meilleure suite de nombres aléatoires est donnée avec les décimales du nombre π. C'est la théorie du chaos déterministe qui permet de construire les listes de nombres aléatoires.

[14] Poirier (2001), p. 38.

[15] La situation invoquée dans ce passage par Claudine Robert fera l'objet, sous le titre *Faites vos jeux*, de l'une des onze fiches de statistique mises à la disposition des professeurs et dont nous parlerons plus loin. Cette fiche proposera un algorithme permettant la simulation de la situation évoquée ici et offrira en outre un « aperçu théorique » permettant de calculer les probabilités avancées dans ce qui suit.

> On peut aussi simuler mentalement : une bonne simulation ne doit pas se distinguer d'une expérimentation. Comment reconnaître une simulation humaine d'une simulation machine ?
>
> Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 6 données consécutives égales dans une série de piles ou faces ? S'il s'agit d'une série de 100 lancers, la probabilité est de 0,80 ; pour 200 lancers la probabilité est de 0,96. Le rang qui clôt la première apparition de 6 données consécutives vaut en moyenne 62.
>
> La probabilité d'avoir au moins 5 données consécutives égales dans une série de piles ou faces est de 0,82 pour 50 lancers, 0,97 pour 100 lancers, et 0,999 pour 200 lancers.
>
> C'est ce qui permet de reconnaître une simulation humaine d'une simulation machine. Les psychologues expliquent que les gens n'osent pas aller au delà de 5 séries *(sic)* consécutives. Pour 100 lancers, la différence des probabilités est significative : 0,80 pour 5 consécutifs, 0,97 pour 6 consécutifs.

Dans *L'empereur et la girafe*, sous le titre « Six milliards de décimales de π », elle consacrait les dernières pages à tester à l'aide du χ^2 le caractère aléatoire des décimales de π. On touche là à une difficulté qui, en quelque sorte, constitue le barrage essentiel à une juste compréhension de la statistique qu'il s'agirait d'enseigner désormais au lycée : on ne peut pas parler de données numériques, et plus généralement de données empiriques, à partir seulement d'elles-mêmes ; on ne peut avancer dans leur analyse – et donc avancer vers une éventuelle prise de décision concrète – qu'en convoquant tout un univers théorique, celui des modèles probabilistes de la variabilité. Le paradoxe – sinon l'antinomie – que soulève alors le programme de seconde est qu'il suppose la notion de modèle probabiliste sans pour autant qu'elle y soit présente ; ce que le compte rendu plusieurs fois cité déjà laisse transparaître dans des lignes qui témoignent de la difficulté de la réception du discours tenu sur les points considérés :

> La statistique crée des modèles probabilistes. Il existe deux types de statistique : la descriptive et l'inférentielle. Cette dernière a pour but de faire des prévisions à partir de modèles. Dans le secondaire, on se limite à la statistique descriptive mais on se pose la question de la place des statistiques inférentielles. On ne peut pas aller très loin en statistique si on ne possède pas les outils probabilistes. Le programme de seconde, tel qu'il est proposé, est en quelque sorte un passage entre ces deux formes de statistiques. Mais pour qu'il soit accepté par les élèves, il faut simuler à la main avant de passer à la simulation par ordinateur.
>
> En statistique, on travaille sur les distributions de fréquences qui fluctuent, mais le modèle retenu, lui, est invariant. Se pose donc le choix du modèle et de la validation du modèle.

Dans ce qui suit, nous examinerons le système de concepts au fondement de cette nouvelle statistique scolaire.

3. Une initiation à la statistique

Le petit ouvrage publié en 1995, qui sera réédité en 2003 avec des modifications mineures sous le titre *Contes & décomptes de la statistique* [16], présente d'une manière évidemment beaucoup plus détaillée les points de vue auxquels Claudine Robert est parvenue avant même de diriger la réécriture des programmes de lycée. À l'occasion d'un exposé fait l'année suivante dans le cadre des journées nationales de l'APMEP (tenues à Albi les 25, 26 et 27 octobre 1996), elle exprime un jugement fort critique sur l'enseignement de la statistique tel qu'il s'est établi au secondaire. « La statistique enseignée dans le secondaire, résume-t-elle [17], voudrait être de la statistique descriptive mais consiste le plus souvent en une fastidieuse série d'exercices de calculs de moyenne, d'écart-types et de tracés d'histogrammes – c'est à peu près aussi intéressant que de lire un annuaire du téléphone sans aucune raison de le faire. » L'ouvrage de 1995, par contraste, explicite une vision positive – sauf à l'encontre des détracteurs de la statistique ! – de ce que, selon l'auteure, peut être une initiation authentique à la statistique. L'avant-propos de l'ouvrage en énumère d'abord le lectorat potentiel. Les deux premières catégories de lecteurs sont clairement identifiées : d'abord, les étudiants de premier cycle en sciences humaines et sociales – y compris les étudiants de sciences de l'éducation – ainsi que les étudiants de première année de médecine ; ensuite les professeurs du secondaire, « enseignant ou non la statistique ». Les autres catégories sont polémiques et, par nature, beaucoup plus floues au plan institutionnel : sont visés, ironiquement sans doute, les « réfractaires à la statistique et à toute donnée chiffrée », « ceux que la statistique fait bailler – même s'ils en sont fiers », ceux encore « qui imaginent les statisticiens comme des ogres mangeurs de tableaux de nombres et cracheurs de moyennes et de pourcentages », ceux aussi qui croient qu'un statisticien « est une sorte de naïf cherchant dans des tas de nombres trouvés n'importe où des secrets dignes d'être commentés ». À cet inventaire elle ajoute enfin le groupe de ceux qui « pensent classiquement que la statistique est une forme élaborée du mensonge [18] ». L'existence de cette dernière catégorie est, au vrai, révoquée en doute par un raisonnement persifleur : « … si la statistique était une forme élaborée du mensonge, écrit en effet l'auteure, elle susciterait l'intérêt de tous (ce qui n'est pour le moins pas le cas) et s'enseignerait aisément (il n'est qu'à songer à l'attrait d'un "cours du mensonge de haut

[16] Parue chez Vuibert, cette réédition révisée – qui ne se présente pas comme telle – a pour sous-titre *Une initiation par l'exemple*.

[17] Robert (1996), p. 428.

niveau”). » Le même passage de l’avant-propos explicite aussi un point de vue plus irénique sur la statistique et les statisticiens en proposant un essai de définition. Qu’est-ce qu’un statisticien ? La réponse donnée est, en vérité, fort peu spécifique : « … le statisticien est plus simplement un individu curieux ayant des moyens de satisfaire en partie sa curiosité [19]. » Qu’est-ce, maintenant, que la statistique ? Réponse : la statistique est ce qui apporte à cet individu curieux « des outils et des concepts permettant, dans des domaines variés, de formuler des questions et de répondre à certaines d’entre elles, tout en évaluant la marge d’erreur possible ». Si la dernière partie de cette « définition » comporte des aspects plus spécifiques, rien n’y est dit toutefois sur la *nature* des questions auxquelles la statistique permet de répondre, ni, plus largement, quelles sortes de curiosités elle permet, même partiellement, et avec une « marge d’erreur possible », de satisfaire. Aucune formule ne tente ici véritablement d’évoquer ce qui serait l’*objet* de la statistique, et que celle-ci poursuivrait à travers des « domaines variés ». Dans la perspective d’un discours apologétique à l’adresse par exemple des professeurs [20], c’est un certain « genre prochain » qui est mis en avant, sans que soit précisée la « différence spécifique ». L’enseignant peu au fait de la statistique peut y reconnaître un type très large d’intérêt qui traverse tout le champ de la connaissance humaine. Mais cette science statistique, familière alors par son principe épistémologique, est-elle vraiment indispensable, puisque toutes les parties des mathématiques – entre autres – répondent à ce même principe ? Ce qui est donc absent à ce stade dans le texte soumis au lecteur, c’est l’explicitation du type de curiosité que seule la statistique pourrait satisfaire.

La suite de l’avant-propos tente de combler le déficit de spécification qui marque l’abord fonctionnel de la statistique auquel on vient de voir l’auteure s’essayer. Paradoxalement, cette tentative se coule dans un abord structurel du champ statistique qui, en l’espèce, reprend une opposition classique. « La statistique, lit-on en effet, est en fait une discipline scientifique composée de deux branches » : statistique *descriptive*, statistique *inférentielle*. Dans la réédition de 2003, le texte ne parlera plus de « branches », mais de « pôles », la statistique n’étant plus désignée comme une *discipline* scientifique mais comme

---

[18] Référence à un mot prêté à l’homme politique britannique Benjamin Disraeli (1804-1881) : *There are three kinds of lies – lies, damned lies, and statistics.*

[19] Dans l’édition de 2003, l’auteure atténue sa formulation en la limitant au statisticien « présenté dans cet ouvrage ».

[20] Le livre a été mentionné quasi officiellement, à l’avènement des nouveaux programmes, comme l’un des ouvrages de référence pour les professeurs : ainsi le trouvait-on recensé sous la rubrique « Savoirs Collège » du site Internet du CNDP.

un *champ* scientifique. Le changement de vocabulaire vise sans doute le lectorat enseignant. Fruit des premières transpositions didactiques de la statistique [21], la distinction entre statistique descriptive et statistique inférentielle ne permet guère, en effet, par l'apparente étanchéité qu'elle institue, la mise en relation essentielle de ce qu'on peut nommer sans trop de précautions l'*empirique* et le *théorique* en matière statistique. Le pôle descriptif, nous dit-on, vise à « décrire des données » et à « résumer l'information qu'elles apportent », geste qui permet de « dégager des questions pertinentes » et « qui conduit souvent à chercher des lois des phénomènes observés, c'est-à-dire à modéliser ». À nouveau, la référence à des « questions pertinentes » n'est pas explicitée. D'une part en effet aucune autre indication n'est fournie sur la nature de ces questions ; d'autre part, seules sont mentionnées des questions « secondes », engendrées par l'*examen* des données : les questions premières, ou primaires, celles qui motivent le *recueil* des données, qui mettent en branle la curiosité du statisticien restent absentes. La mention des « lois des phénomènes observés » et de la modélisation ouvre la voie à la présentation de la deuxième branche – le deuxième pôle – de la statistique, la statistique inférentielle. Cette présentation est l'occasion d'une meilleure explicitation de l'objet de la statistique – « expliquer et prévoir en ayant recours à des modèles probabilistes ». L'opposition nominale, voire structurelle, entre le descriptif et l'inférentiel n'est donc pas une coupure véritable ; et l'avant-propos souligne ainsi : « Il y a interférence constante entre statistique descriptive et inférentielle. » Le paragraphe s'achève alors par la remarque peu spécifique que, en statistique, « on ne modélise jamais des données sans les avoir préalablement bien observées et synthétisées sous forme de tableaux ou de graphiques ».

L'avant-propos présente ensuite les neuf leçons – suivies chacune d'un bref « intermède » – qui composent le livre. Les six premières leçons « ont trait à la statistique descriptive » et sont présentées comme pouvant « être lues dans n'importe quel ordre ». Le titre de chacune de ces leçons se réfère à l'un des « domaines variés » qui suscitent la curiosité du statisticien ; un sous-titre livre alors l'identité des notions statistiques en jeu dans la leçon. Ainsi la première leçon s'appelle-t-elle *Le tir à l'arc* ; son sous-titre – *Histogrammes* – indique quelle notion de statistique en est l'objet. Le lecteur est invité à ne pas rester passif devant les notions que la leçon lui fait rencontrer. Plus précisément, lui indique-t-on, il devra aborder chaque leçon en ayant constamment à l'esprit ce questionnement essentiel : « à quel besoin répondent ces notions, et pourquoi choisir celles-là plutôt que d'autres ? » Cette exigence épistémologique, didactique, culturelle est digne de remarque si on la compare aux

[21] Voir notre chapitre 1.

pratiques usuelles dans l'enseignement secondaire d'hier et d'aujourd'hui. Les spécificités de la statistique seront alors peu à peu rendues sensibles au lecteur « actif », ce que l'auteure déclare viser : « Nous prenons ici du temps, écrit-elle, pour réfléchir à des questions simples, ce qui permet l'acquisition du mode de pensée et de raisonnement spécifique à la statistique. » La suite du propos précisera que ces six premières leçons « ne nécessitent aucun bagage mathématique particulier et aucune connaissance des domaines abordés ». Commentaire qui enchaîne deux ambiguïtés typiques du discours commun sur la diffusion sociale des connaissances statistiques : la dénégation de l'utilité instrumentale et conceptuelle des mathématiques (même s'il est vrai que la formulation adoptée n'exclut que les connaissances mathématiques « spéciales », qui iraient par exemple assez au-delà des mathématiques de la scolarité obligatoire), et l'extériorité résolue de la science statistique par rapport aux « domaines variés » que le travail statistique conduit pourtant à visiter. Ce dernier point semble pourtant en contradiction avec l'assertion selon laquelle le premier moteur de l'activité statisticienne est une certaine curiosité spontanée cherchant à se satisfaire. Ainsi rassuré quant aux attentes en fait de connaissances mathématiques et non mathématiques, le lecteur est invité à s'engager dans sa lecture sans barguigner, si, du moins, il entend l'exploiter « pour mieux comprendre des comptes rendus d'études de statistique descriptive, ou en vue d'en faire » par lui-même. « Prenez le temps, lui intime-t-on alors, de chercher quelle est votre propre réponse aux questions posées. » Cela accepté, tout devrait aller aisément : car « la mémorisation des quelques définitions et concepts propres à la statistique descriptive et la possibilité de les utiliser ultérieurement se feront naturellement après cette étape préliminaire de réflexion. » Les leçons 7, 8, 9, elles, ont trait à la statistique inférentielle : nous y viendrons plus loin.

4. Trois leçons de statistique

On s'arrête ici sur les trois premières leçons. La première, *Le tir à l'arc*, on l'a dit, conduit à introduire et à interroger la notion d'*histogramme*. L'objectif général est d'explorer l'art de « faire parler » des données. La leçon évoque une compétition de tir à l'arc sur une cible de 80 cm de diamètre, où neuf tireurs ont effectué chacun 60 tirs. Sur ces 540 tirs à la cible, 519 seulement ont atteint la cible. Pour chacun d'eux, la distance du point d'impact au centre de la cible a été relevée et arrondie au centimètre inférieur, en sorte qu'à chacun des 519 tirs est associé un entier compris entre 0 et 39. Un première question peut en ce point être posée, qui nous permettra d'illustrer un problème essentiel de la diffusion de la culture statistique :

pourquoi relever ces distances ? La leçon mentionne le problème, mais comme un problème des organisateurs de la compétition, et non comme un problème que le lecteur pourrait se poser. La réponse apportée, de ce point de vue, reste vague : « Les organisateurs, nous dit-on simplement, souhaitent avoir une vue synthétique claire de la compétition. » Le recueil des données paraît donc ici insuffisamment explicité : pourquoi ces données-là, par exemple, et que pouvons-nous attendre qu'elles nous révèlent sur la compétition ? Pour le contraste, explicitons de façon un tant soit peu formelle le type de situations que l'on pourrait voir pris en compte dans une telle leçon. Supposons une question Q relative à la compétition invoquée. Quel ensemble D de données doit-on recueillir pour espérer pouvoir en induire une réponse R à Q ? Cette question fondamentale n'est pas posée ; et si question Q il y a, elle n'est pas véritablement communiquée au lecteur. Le lecteur peut bien sûr supposer que les organisateurs se sont posé une certaine question Q (ou un ensemble de questions Q) et que la volonté d'y répondre les a conduit à recueillir un ensemble D de données – les distances au centre de la cible. La situation est donc plutôt celle-ci : un ensemble D de données ayant été recueilli, quels éléments de réponse permet-il d'apporter à quelles questions Q ? Quels types de traitement de ces données permettent d'apporter ces éléments de réponse à ces questions ? Une certaine analyse de ces données ayant été réalisée, quels éléments de réponse permet-elle d'apporter ?

De façon générale, l'une des faiblesses dans la diffusion de la statistique tient, nous semble-t-il, à ce que chacune des questions énoncées ici conserve un sens même lorsque les questions qui les précèdent dans cette suite de questions n'ont pas été posées – ce qui peut aisément conduire à ne pas les poser. Si en effet l'on se pose une question Q et que, pour y répondre, on recueille un ensemble D de données, il est toujours possible que le choix de D ne soit pas tout à fait le bon ; en sorte que la question devra toujours être posée, au moins à titre de contrôle, de savoir à quelles questions l'ensemble D permet d'apporter des éléments de réponse. Un ensemble D de données ayant été collecté et un traitement de ces données ayant été réalisé en vue de répondre à une certaine question Q qui paraît « à la portée » des données D, si l'on peut dire, il se peut encore que le traitement mis en œuvre ait été mal choisi, et il faudra alors se demander ce qu'il nous apprend réellement sur l'ensemble D et, en conséquence, quels éléments de réponse il permet raisonnablement d'induire. Le processus d'étude statistique peut ainsi être amputé de ses premières étapes sans pour autant perdre toute signification. Mieux, la science statistique se doit d'apporter réponse aux questions « partielles » résultant de la dissociation de la chaîne de questions en laquelle se déploie normalement une étude statistique complète. Un certain traitement ayant été réalisé sur un certain ensemble de données, que peut-on tirer des résultats de ces traitements à propos de ces données ? Un résultat d'analyse de données ayant ainsi été obtenu, à quelles questions permet-il d'apporter des éléments de réponse, et lesquels, à propos du phénomène dont ces données sont issues ? À cet égard, on va le voir, la leçon proposée est certainement instructive – plus sans doute que ce qu'offriront les manuels scolaires qui « mettront en texte » le nouveau programme de statistique.

Les 519 données numériques ne sont pas connues du lecteur : l'ouvrage en offre des représentations graphiques et en fournit un tableau après regroupement en classes. Ainsi donc, on communique au lecteur seulement le résultat de certains traitements qui leur ont été appliquées. Le premier de ces traitements consiste à représenter, dans un système d'axes orthogonaux, chaque tir par un point dont l'abscisse est le numéro d'ordre du tir (les 519 tirs réussis ont été ordonnés de 1 à 519) et l'ordonnée la distance au centre, nombre entier de 0 à 39. Ainsi obtient-on un nuage de points qui, *grosso modo*, remplit la fenêtre $]0 ; 519] \times [0 ; 40[$. Le texte constate ici que le traitement graphique des données est peu révélateur : « on ne peut pas dire, conclut-il, que ces représentations soient très claires ! » Dans ce cas, les numéros d'ordre affectés correspondent à la succession des 540 tirs réalisés (dont 21 sont ignorés). Le texte évoque alors un traitement graphique complémentaire du précédent : joindre par un segment le point représentatif d'un tir au tir suivant dans la série des tirs ayant touché la cible. La conclusion dubitative déjà citée s'applique tout autant à l'objet graphique ainsi obtenu. Devant ce relatif échec à faire parler les données invoquées, une solution standard est alors introduite : « on range les données, par ordre croissant, en regroupant les données égales ». Soulignons l'absence d'un questionnement qui pousserait en avant une telle décision. L'examen du nuage de points afin de tenter de savoir si, par exemple, le nombre de tirs diminue quand la distance augmente aurait conduit assez naturellement à procéder à un balayage visuel du nuage en partant de l'axe des abscisses pour essayer d'apercevoir si le nombre des points ayant une ordonnée déterminée est bien une fonction décroissante de l'ordonnée. Une telle inspection visuelle ne permet pas de rejeter nettement l'hypothèse de décroissance envisagée : il semble clair par exemple que, dans une bande horizontale proche de l'axe des abscisses, la densité de points est plus forte que dans une bande de mêmes dimensions appuyée sur l'horizontale d'ordonnée 40. L'inspection visuelle apparaît ici pourtant d'un rendement assez limité. Et l'on est en conséquence tout naturellement porté à compter le nombre de tirs d'ordonnée 0, le nombre de tirs d'ordonnée 1, …, le nombre de tirs d'ordonnée 39. Une telle opération ne conduit pour le moment qu'à une liste de 39 nombres, qui sont des *effectifs* – ou, comme on le dit dans l'anglais de la statistique, des *fréquences* (absolues). La leçon ne fournit pas véritablement ces nombres, mais les représente par un histogramme des fréquences (*relatives*) qui permet de voir tout à la fois que la suite des effectifs n'est pas à proprement parler décroissante, mais qu'elle décroît, si l'on peut dire, « tendanciellement ». Pour faire apparaître cette « tendance décroissante », on peut penser, là encore, que l'idée est susceptible de s'imposer spontanément de fusionner par paquets les barres contiguës de l'histogramme pour voir si l'on obtient un escalier descendant. Un tableau fourni par l'auteure donne la distribution des effectifs selon les intervalles [0 ; 4[, …, [36 ; 40[. Ces regroupements, sans doute, ne permettent pas encore d'obtenir une suite décroissante d'effectifs [22]. Mais un regroupement plus large, de pas 8 cm, correspondant aux intervalles [0 ; 8[, …, [32 ; 40[, donne pour suite d'effectifs les nombres 151, 146, 102, 73, 47, qui forment bien une suite décroissante. Obtenus à partir des données primaires que le lecteur ne possède pas, des histogrammes des 519 tirs sont fournis avec, respectivement, un pas de 2 cm, un pas de 4 cm – ce qui, on l'a vu, ne permet pas encore d'obtenir la décroissance –, puis un pas de 5 cm et un pas de 8 cm : la décroissance (au sens large) est atteinte déjà avec un pas de 5 cm. Le travail ainsi accompli porte en lui une leçon précieuse mais insuffisamment explicitée. Le rassemblement des 519 mesures en classes n'est en aucune façon lié à un besoin d'économie des calculs – au motif qu'il y aurait un nombre très élevé de données à calculer – mais bien à l'intention de faire apparaître une structure des données que la variabilité qui les affecte masque de prime abord. Cette mise en évidence d'une certaine structure « profonde » des données est bien soulignée par une autre manœuvre que la leçon propose, qui consiste à simuler la dissociation des données primaires en classes de pas 0,1 cm, cela en assignant à chacune des données entières une décimale prise au hasard entre 0 et 9. Ces micro-variations artificielles font alors exploser l'histogramme : le résultat obtenu est, si l'on peut dire, on ne peut plus parlant ! On mesure ici la différence entre un travail des données finalisé par le désir de valider ou de rejeter une certaine conjecture, ce que nous venons de voir ici, et un travail de forme semblable mais qui serait seulement l'expression d'une sorte de réflexe conditionné, supposé motivé d'une manière générale par la taille réputée excessive du corpus des données à traiter, comme le propose souvent les professeurs de mathématiques.

Ce jeu productif avec des histogrammes contrôlé par leur pas est alors complété par des remarques relativement classiques sur l'appréhension visuelle de la surface des rectangles construits et le fait corrélatif que, lorsque les classes sont choisies d'amplitudes inégales (en particulier pour représenter une queue de distribution), il est raisonnable de bâtir la

[22] Les effectifs des intervalles indiqués sont respectivement 85, 66, 73, 73, 60, 42, 40, 33, 27, 20.

représentation sur une proportionnalité des effectifs à l'*aire* des rectangles et non à leur *hauteur*. La fin de la leçon va porter sur quelques-uns des « pièges » que peut porter en elle une telle représentation graphique. Le problème évoqué est celui de remonter d'une manière bien contrôlée d'un histogramme à la structure des données représentées, telle que l'histogramme semble la révéler. La moyenne des 519 distances était de 14,9 cm. L'histogramme au pas de 4 cm de 60 tirs d'un dixième tireur a une allure beaucoup plus flatteuse : « environ 70 % des tirs se situent à moins de 12 cm du centre de la cible, et tous les tirs représentés sont à moins de 28 cm du centre », précise-t-on au lecteur. Mais il y a un hic : l'histogramme, nous apprend-on aussi, ne porte en fait que sur 45 tirs seulement, ceux qui ont atteint la cible parmi les 60 flèches tirées. La cible est ratée ici dans 25 % des cas, alors que les performances des neuf tireurs comportaient moins de 4 % de flèches hors cible. Un autre tireur, qui, au cours de 10 séances d'entraînement successives, a tiré chaque fois 60 flèches, a ainsi touché la cible 545 fois (sur 600). La cible est manquée, certes, dans plus de 9 % des cas. Mais l'histogramme des 545 distances au centre de la cible est bon, meilleur en tous cas que celui des 519 données examinées précédemment : la moyenne est pour ce tireur égale à 12,1 cm, alors qu'elle est de 14,9 cm pour les 519 tirs examinés. Une autre difficulté est alors introduite. Dans le traitement des 519 données, nous avions oublié *l'ordre* des tirs. *A priori*, si l'on ne connaît pas le domaine exploré statistiquement – ici, le tir à l'arc de compétition –, on peut s'attendre, pour des distributions assez voisines des distances au centre, à des structures diverses de la succession des tirs. On peut ainsi imaginer que les premiers tirs ne soient pas fameux, puis que les performances s'améliorent, enfin que la qualité atteinte se dégrade un peu en fin de parcours (avec, par exemple, un nombre de tirs hors cible qui, après avoir diminué, se remet à croître). On peut aussi, notamment chez un tireur de haut niveau, imaginer une suite de tirs dont la qualité est d'emblée excellente, même si elle régresse un peu en fin d'épreuve. De ce point de vue, le traitement graphique que nous avions appelé complémentaire du nuage de points correspondant aux 519 tirs ne fait pas apparaître une structure particulière : il semble que le passage du temps n'ait pas d'influence sensible, ni positive ni négative [23] ; et, bien entendu, dans un tel cas, l'oubli de l'ordre des tirs, consubstantiel à la considération de la *distribution* des données, n'entame pas la valeur des connaissances que le traitement de ces données permettra de produire quant au phénomène étudié. En revanche, dans le cas du tireur aux 545 tirs dans la cible, l'examen de l'ordre des tirs révèle, en l'espèce, un fait inquiétant : au fil des 10 séances d'entraînement, ses séries de

[23] Il y a quelque raison à cela : rappelons en effet que les 519 tirs sont le fait de neuf tireurs différents.

60 tirs se dégradent fortement – à partir bien sûr d'une première série de grande valeur –, ce qui est d'un mauvais pronostic si le tireur concerné se prépare à une prochaine compétition !

Cette première leçon se termine par la formulation de deux conclusions *a priori* bien différentes. La première se présente comme une considération sur l'art du tir à l'arc, à propos du Kyudo japonais, discipline du corps et de l'esprit dans laquelle, nous dit-on [24], la qualité d'un tir ne dépend pas seulement de la distance du point d'impact au centre de la cible ! Manière de dire sans doute que, pour les organisateurs de la compétition évoquée, le fait d'examiner une série de tirs ainsi que cela a été fait n'a peut-être qu'une faible pertinence – c'est sans doute là une allusion au problème du passage de Q à D évoqué plus haut. La seconde conclusion est à situer à l'autre extrémité de la chaîne des opérations statistiques : on suppose que l'on a devant les yeux un histogramme, c'est-à-dire un certain traitement graphique de certaines données elles-mêmes non immédiatement disponibles, et l'on se demande ce que le résultat d'un tel traitement permet d'inférer quant aux données elles-mêmes, et, au-delà, quant au phénomène auquel ces données se rapportent. Prosaïquement, l'auteure conclut que, pour bien lire un histogramme rencontré par exemple dans une revue, « il convient de connaître les conditions de recueil des données », sans oublier, en outre, qu'un histogramme ignore « l'ordre de recueil des données ». La mise en texte du savoir statistique en voie d'émergence dans le travail accompli reste ainsi sensiblement incomplète. Sans doute, par exemple, le travail réalisé sur les histogrammes n'est-il pas évoqué dans cette conclusion parce que celle-ci se réfère au cas d'un histogramme unique rencontré dans une revue. Or une telle situation de privation d'information – usuelle et que la leçon proposée met elle-même en œuvre – n'interdit pas tout travail, comme nous l'avons suggéré incidemment dans les développements précédents. L'intermède qui conduit de la leçon 1 à la leçon 2 s'efforce, lui, de mettre en évidence ce qui fait la spécificité d'une étude statistique par rapport à une simple étude de type expérimental. Dans un sens, la relation se laisse décrire simplement : « Pour entreprendre une étude statistique, il faut disposer de données expérimentales. » Mais la réciproque est fausse : si l'on ne dispose par exemple que d'*une* donnée expérimentale, on ne peut envisager aucune étude statistique. Une étude statistique suppose au moins un échantillon représentatif d'une certaine population, par rapport auquel

---

[24] Le kyudo, tir à l'arc japonais, est issu des pratiques guerrières des samouraïs. Comme les autres arts martiaux japonais, il s'agit aujourd'hui d'un sport basé sur la concentration, des règles du jeu très codifiées fondées sur le respect des autres et des rituels, visant à forger « une personne humaine, forte et vraie ». Selon un site qui lui est consacré (http://bramentombe.online.fr/adresses/kyudo/), ce sport est pratiqué par environ 300 personnes en France.

on pourra situer un individu particulier. Ce poisson, parmi les trois que contient le bocal, est-il petit ou est-il gros parmi les poissons de son espèce ? On ne peut répondre si par exemple on ne connaît pas davantage la population à laquelle il appartient – si l'on ne connaît son espèce qu'à travers lui ! Si, en revanche, on connaît, disons, une estimation de la *moyenne* des poids de cette population et que notre poisson soit trouvé d'un poids supérieur à celle-ci, on ne pourra plus dire qu'il s'agit là d'un petit poisson au sein de son espèce – même si l'on ne peut pas dire encore que, à l'inverse, il s'agit d'un gros poisson de son espèce. Une étude statistique suppose ainsi la connaissance d'une population parente. Si on dispose de trois poissons et qu'on effectue sur eux diverses mesures, on n'aura pas pour autant ébauché une étude *statistique*. Mais si on « connaît par exemple la taille moyenne d'une espèce voisine de poissons, alors des questions précises peuvent être posées et des tests statistiques sont susceptibles d'apporter des éléments de réponse ». Concrètement, précise cet intermède, « il est rare que l'on fasse une étude statistique avec moins de cinq données ». La leçon 2 est intitulée *Baudelaire, Poincaré et bien d'autres*. Ce titre, on va le voir, ne déroge pas à la règle indiquée plus haut : il désigne l'un de ces « domaines variés » qui sont le champ d'exercice du statisticien. Mais on voit aussi que, dans un domaine – celui de la statistique – où un texte du savoir normé n'a pas fait l'objet d'une diffusion scolaire massive qui lui donnerait son caractère aisément reconnaissable, le fait de désigner une portion du texte du savoir – que le sous-titre précise : « variables qualitatives, distributions de fréquences » – par un intitulé plus léger peut aisément troubler le lecteur et l'induire à voir en cette leçon un fabliau délectable, mettant en valeur quelque précepte statistique détaché d'un plus vaste corpus dont le lecteur ne peut encore que soupçonner l'existence, sans véritablement le rencontrer. De là par exemple que, sur le site Internet de tel rectorat d'académie [25], on ait pu présenter le livre de Claudine Robert comme un ensemble de « leçons élémentaires de statistique » appuyées, nous dit-on, sur « des anecdotes élémentaires et lumineuses ». Or la leçon 2 n'est nullement une affaire anecdotique : c'est en principe, à l'instar des autres leçons, une petite étude statistique dont le titre évoque l'objet tandis que le sous-titre précise certains des outils statistiques qu'elle mobilise. De quoi s'agit-il en effet ? La question étudiée est ici formulée d'emblée en termes statistiques : « les fréquences des lettres de l'alphabet sont-elles à peu près les mêmes dans différents textes d'une même langue ? » Cette question est elle-même motivée par une interrogation simplement évoquée, à propos de la fragilité d'un code secret rudimentaire qui consisterait à remplacer chaque lettre de l'alphabet par un autre signe particulier, selon un

[25] Voir http://mathematiques.ac-bordeaux.fr/peda/bibliographie/bibliographie.htm.

dictionnaire déterminé. Pourtant, dans la chaîne du questionnement, un maillon n'est pas explicité. En effet, un tel code secret serait à l'évidence d'une grande fragilité si, à la fois, chacune des lettres possédait dans l'ensemble des textes d'une même langue une fréquence quasi constante, et si, dans le même temps, ces fréquences ne formaient pas une distribution quasi uniforme, en sorte qu'il serait en principe possible de les distinguer par leurs fréquences d'apparition dans un texte assez long. Qu'en est-il au juste ? On peut en premier lieu s'arrêter sur la question de la fréquence d'apparition de telle lettre donnée – *a*, *b*, etc. – dans le corpus des textes en langue française. Pour répondre à ce genre de question, la technique statistique est évidemment classique : il faut prendre un vaste échantillon de textes en langue française et, pour chacun d'eux, déterminer la fréquence d'apparition de telle lettre – et cela pour chacune des lettres de l'alphabet. Est-ce que, par exemple, la fréquence de la voyelle *e* est à peu près la même dans tel poème de Baudelaire – *L'Albatros* (1861) – que dans un texte d'Henri Poincaré extrait de *La science et l'hypothèse* (1902) ? D'une manière générale la fréquence d'une lettre dans un texte en langue française va avoir, sur un échantillon de textes assez vaste, une distribution de fréquences dont on se demande s'il est vrai qu'elle est faiblement, voire très faiblement dispersée.

Ici se noue une difficulté de la leçon examinée, dont le vocabulaire fait symptôme. À chaque texte de l'échantillon supposé on peut associer la fréquence d'apparition de telle lettre déterminée. Cette variable numérique, qui prend ses valeurs entre 0 et 1, a une distribution de fréquences dans l'échantillon de textes en langue française considéré, distribution qui indiquera par exemple quelle est, dans cet échantillon, la fréquence des textes dans lesquels la fréquence d'apparition de la lettre *e* est comprise entre 18 % et 19 %. Si le lecteur peine quelque peu à donner sens à la phrase précédente, nous la reformulerons en y remplaçant « fréquence d'apparition » (d'une lettre dans un texte) par *taux d'apparition*, ne serait-ce que pour montrer l'ambiguïté engendrée par l'usage d'un même mot – fréquence – pour désigner des fréquences dans deux séries statistiques bien distinctes : *à chaque texte de l'échantillon supposé on peut associer le* taux *d'apparition de telle lettre déterminée. Cette variable numérique, qui prend ses valeurs entre* 0 *et* 1*, a une distribution de fréquences dans l'échantillon de textes en langue française considéré, distribution qui indiquera par exemple quelle est, dans cet échantillon, la fréquence des textes dans lesquels le* taux *d'apparition de la lettre* e *est compris entre* 18 % *et* 19 %. En vérité, l'étude statistique qui serait nécessaire pour établir la distribution des fréquences, dans le corpus de langue française, des taux d'apparition des différentes lettres de l'alphabet n'est ici qu'évoquée [26]. Ce choix est justifié par le manque d'informations apportées par les ouvrages de cryptographie auxquels l'auteure se réfère. La question inaugurale de la leçon – « les fréquences des lettres de l'alphabet sont-elles à peu près les mêmes dans différents textes d'une même langue ? » – appelait une telle étude, et pouvait laisser attendre que cette leçon introduise à la notion de dispersion d'un caractère (ou plutôt, ici, de « faible dispersion »). Or ce n'est pas le cas ici et le lecteur qui n'est pas entré préalablement dans une vision statistique du monde assez bien ancrée pourra continuer de voir le taux d'apparition d'une lettre donnée dans des textes en langue française comme une grandeur fixe ou quasi fixe, au lieu de la penser comme une grandeur variable, appelant éventuellement une modélisation probabiliste. L'absence de l'étude statistique en question, certainement motivée par des considérations didactiques, aboutit ainsi à une situation qui peut paraître paradoxale. L'abandon de la perspective ouverte dans les premières lignes de la leçon s'accomplit en fait dès le deuxième paragraphe : des lettres de l'alphabet ne sont retenues que les six voyelles *a*, *e*, *i*, *o*, *u*, *y*, dont on se demande toujours si les taux d'apparition sont « à peu près constants dans les textes de langue française ». Jusque-là, le changement est mineur. Pour répondre à la question, avons-nous dit, il conviendrait de définir un *échantillon* de textes en langue française, et il faut donc en premier lieu définir la *population* de ces textes. On peut ainsi penser que la population qu'il conviendrait d'échantillonner est, *grosso modo*, celle des textes en langue française relativement courts (le poème de Baudelaire comporte 251 voyelles, le texte de Poincaré, 626) et appartenant à des genres littéraires divers. La chose n'est pas faite ici explicitement : la leçon se réfère aux deux textes que nous avons mentionnés plus haut et que l'ouvrage reproduit *in extenso* en une annexe à la leçon 2. Pour la lettre *e*, par exemple, les taux d'apparition *parmi les voyelles* dans ces textes sont très voisins (42,3 % pour Poincaré, 42,2 % pour Baudelaire) ; mais peut-on en conclure que le taux d'apparition de la lettre *e* parmi les voyelles dans le corpus des textes en langue française que nous avons évoqué tombe en grande majorité dans l'intervalle]0,42 ; 0,425[par exemple ? De même, en découvrant que le texte de Poincaré comporte 14,2 % d'occurrences de la lettre *a* parmi les voyelles tandis que le poème de Baudelaire en comporte 17,5 %, peut-on conclure à une variabilité importante du taux d'apparition de la lettre *a* dans le corpus des textes considéré ? C'est ainsi par exemple que, dans un texte de 1 533 912 lettres, le nombre d'apparition de la lettre *a* (éventuellement sous la forme *à*) a été trouvé égal à 124 559, le nombre total d'apparition des *voyelles* étant de 689 013 (en ne comptant qu'une

[26] *Op. cit.*, p. 19-20.

fois la voyelle *œ*). On obtient alors un taux d'apparition de la lettre *a* parmi les voyelles un peu inférieur à 18,08 %, c'est-à-dire sensiblement *supérieur* aux valeurs trouvées dans les deux textes cités. Pour la lettre *e*, on trouve 263 048 apparitions (en comptant *œ*, *ë*, *é*, *è*, *ê*), ce qui donne un pourcentage à peine inférieur à 38,18 % et donc sensiblement *inférieur* aux valeurs trouvées pour les deux textes cités. On voit ici comment le fait de la variabilité – que nous constatons – peut être facilement gommé. Le choix de la leçon 2 suppose très clairement un modèle, que l'auteure explicite en termes d'urnes, chacun des textes étant regardé comme réalisant le tirage d'un certain nombre de voyelle – 626 pour Poincaré, 251 pour Baudelaire – dans une urne immense contenant six sortes de boules, marquées respectivement *a*, *e*, *i*, *o*, *u*, *y*. La chose, formellement, est possible (on suppose que l'urne contient un très grand nombre de boules portant chacune des voyelles). Mais est-elle vraisemblable ? Les deux ensembles de voyelles – que l'on notera désormais V_B et V_P – pourraient-ils provenir par tirage au hasard d'une même urne ? Esquissons un raisonnement classique en théorie des tests statistiques. Imaginons que l'urne en question contienne une proportion de boules marquées *a* égale à $\frac{B_a + P_a}{B + P}$, où B_a et P_a désignent respectivement le nombre d'apparitions de *a* dans V_B et V_P ; et, de même, qu'elle contienne une proportion de boules marquées *e* égale à $\frac{B_e + P_e}{B + P}$, etc. Les proportions des boules marquées *a*, *e*, *i*, *o*, *u*, *y* dans l'urne sont alors respectivement égales à $\frac{89 + 44}{877}$ = 15,165 % ; $\frac{265 + 106}{877}$ = 42,303 % ; $\frac{102 + 36}{877}$ = 15,735 % ; $\frac{76 + 26}{877}$ = 11,631 % ; $\frac{90 + 37}{877}$ = 14,481 % ; $\frac{4 + 2}{877}$ = 0,684 %. Cela noté, nous arrivons ici à une limite provisoire de ce qui peut être tenté dans le cadre de cette leçon ; ce que l'auteure exprime par un développement que nous reproduisons :

> Comparer le couple des deux séries obtenues à partir des textes de Baudelaire et Poincaré à celui des séries ainsi obtenues par tirages de boules se fait à l'aide d'un « test du khi-deux » (voir leçon 9 où ceci est détaillé). Ce test consiste à calculer, pour le couple des séries de voyelles issues des textes, une certaine quantité numérique. Si cette quantité est dans l'intervalle où se situent la plupart des quantités analogues calculées sur les séries issues de tirages de boules, ce qui est le cas ici, on considère que les fréquences observées dans les deux textes ne sont pas significativement différentes. On dira alors que les différences observées entre les distributions de fréquences des deux textes relèvent du hasard et ne constituent pas une preuve d'un emploi différent des voyelles par les deux auteurs.
>
> En revanche, si les séries observées avaient conduit à une valeur numérique située dans une région où ne se trouvent par exemple que 5 % des mêmes quantités calculées sur des séries de tirages de boules, alors on aurait conclu à une différence significative au risque 5 %. On conclurait alors que l'usage des

voyelles est différent dans ces deux textes, et on aurait 5 chances sur 100 de se tromper en concluant ainsi.

Comme la chose est précisée, il y a là une question qui sera reprise, explicitée, détaillée dans la 9e et dernière leçon du livre. Mais ce qu'il est essentiel de souligner, c'est cette rencontre, un peu artificielle sans doute mais en même temps imparable, avec la nécessité de recourir, même sommairement, à un modèle probabiliste de la situation statistique examinée. Les diagrammes en bâtons proposés traduisent des distributions de fréquences des différentes modalités dont il s'agit de voir si elles sont voisines ou non. C'est en ce point que l'étude se déroute et quitte la perspective sur laquelle on pouvait à l'origine penser la voir s'engager. Après avoir évoqué les accords ou désaccords éventuels entre observateurs quant à la proximité des deux distributions observées, la question suivante est en effet soulevée : « comment se mettre d'accord sur les deux séries envisagées, même sans idée de généralisation à d'autres textes ? » L'abandon du projet de « généralisation à d'autres textes » va de pair avec l'entrée dans une problématique beaucoup plus sophistiquée, qui aboutit – on l'a vu – à l'évocation du test du χ^2. Que se serait-il passé par exemple si, au lieu de travailler sur l'ensemble des voyelles, on avait travaillé sur une voyelle, c'est-à-dire en ne distinguant que deux modalités, par exemple « être un *a* » et « ne pas être un *a* » ? Sans doute aurait-on pu procéder de même à un test du χ^2, avec la même problématique que dans le cas de données catégorielles non binaires. Mais il eût alors été plus difficile d'introduire d'une manière motivée les considérations de statistique descriptive que nous avons évoquées et que la leçon explicite à titre de conclusion « pour ce qui concerne la statistique » : notions de séries nominales (ou séries qualitatives non ordonnées) et de séries qualitatives ordonnées, de distributions des fréquences relatives à ces séries, etc. Faisons en ce point une courte digression. L'ouvrage que nous suivons n'échappe pas aux contraintes qui pèsent fortement sur tout projet de diffusion sociale des connaissances. C'est ainsi que nous venons d'observer le phénomène classique qui soumet l'étude d'un problème supposé générateur de connaissances (de statistique) à l'emprise d'un savoir (statistique) qui n'est que très partiellement appelé par le problème à résoudre et qui vient s'y coller presque subrepticement, avant de prendre le quasi-contrôle des opérations. D'une manière plus générale, la tentation est forte de céder aux opportunités qui se présentent, ou même que l'on crée, pour parler sur un mode culturel plutôt que « problématisant » de réalités diverses – statistiques mais aussi littéraires [27], ou simplement mathématiques, ainsi qu'il en va dans le dernier paragraphe de la leçon, à propos des codes secrets, où se trouvent évoqués les codes RSA et le fait qu'ils reposent, en dernier ressort, sur la difficulté à factoriser un entier produit de deux entiers premiers très grands [28]. Le poids des conditions sous lesquelles se réalise la transposition didactique en cette étape de la diffusion des savoirs statistiques voue à cet ouvrage – regardé comme un parcours d'initiation, notamment pour les enseignants – une réception incertaine, dont nous avons vu le symptôme le plus courant – celui d'une réception « anecdotique ».

L'intermède qui fait la transition entre la leçon 2 et la leçon 3 a sans doute un caractère surprenant, voire énigmatique, pour un certain nombre de lecteurs ; mais il est tout aussi sûrement instructif pour ceux qui auront pu surmonter une première réaction de déconcertation. L'intermède présente en effet des données numériques formant couple sous forme d'un tableau : (24 ; 44), (34 ; 9), (29 ; 45), (–36 ; –22), (–36 ; 3), etc. – on a en tout 28 couples. L'examen de cet ensemble de couples semble ne livrer aucune information spectaculaire. Si on réalise une représentation graphique des couples de nombres par des points dans un système d'axes cartésiens, on s'aperçoit que ces points, qui apparaissent groupés par paires, dessinent un rectangle grossier ayant pour axes de symétrie les axes de coordonnées mais dont un côté – situé dans le demi-plan à ordonnées négatives – manque. L'énigme du tableau de données numériques demeure entière au vu de cette représentation graphique : sans doute le lecteur n'a-t-il jamais vu de tel nuage de points ! Pourtant, se laisser intriguer par la forme si peu familière de ce nuage, c'est oublier qu'un nuage fini de points disposés de manière quelconque dans le plan peut toujours être regardé comme le relevé de la position de divers objets situés dans l'espace, par exemple sur le sol : le lecteur pourra imaginer ce que seraient le tableau et la représentation graphique des coordonnées par rapport à un système d'axes lié au sol des points de contact avec le sol des pieds de chaises, de tables, etc., dans le lieu où il lit ces lignes. Dans le tableau proposé dans l'intermède, il y a tout simplement, nous révèle-t-on au bout de l'intermède, les coordonnées de paires de sabots soigneusement rangées le long de trois des côtés d'une allée rectangulaire qui conduit au pied d'un escalier. La morale de l'histoire est sans doute que la représentation graphique de données, qui éclaire souvent sur la structure de ces données, peut aussi intriguer dans la mesure où ces données se rapportent à une situation méconnue ou qu'on n'imagine pas. En

[27] Le livre de Georges Perec, *La disparition*, est ainsi cité comme pourvoyeur de textes biaisés quant à la distribution des voyelles : voir, à ce propos, notre chapitre 6.

[28] Sur les codes RSA, voir par exemple http://mathadora.free.fr/curiosites/dossier_cryptographie.html.

sens inverse, pourtant, une telle méconnaissance, notons-le en passant, ne prive pas certains traitements de données de toute signification. Ici, par exemple, la médiane des abscisses est nulle : l'ensemble des points est donc réparti de manière équilibrée de part et d'autre de l'axe des ordonnées. Bien entendu, se prononcer sur ce que cela signifie quant aux objets sur lesquels ces données ont été recueillies suppose qu'on en sache un peu plus sur ces objets. Si, par exemple, comme c'est toujours possible, on imagine que ces objets sont en fait des lieux dans un espace physique, on pourra avancer qu'il y en a autant d'un côté que de l'autre de la droite ou du plan correspondant (dans cet espace) à l'axe des ordonnées de la représentation graphique, etc. Sur ce point, l'intermède soulève des questions dont les conclusions, sans doute parce qu'elles ne se coulent pas de manière simple ou traditionnelle dans le texte du savoir classique en statistique, ne sont pas véritablement explicitées. Tout à l'inverse, la leçon 3 a pour sous-titre *Moyenne, médiane, variance* : programme classique au regard du texte du savoir statistique usuel. Tout le problème est alors de savoir comment *motiver* ces notions, c'est-à-dire comment les faire apparaître comme permettant de résoudre raisonnablement des problèmes raisonnables de statistique. Le point de départ prend appui sur un extrait d'un hypothétique livre pour enfants à propos de ce curieux animal qu'est la girafe :

> La girafe est l'animal terrestre le plus grand. C'est un mammifère africain. Le mâle adulte mesure environ 6 mètres de haut, son poids est d'environ 1300 kilos et son cou mesure environ 2,5 mètres.

La description donnée semble définir un représentant « standard » de l'espèce des girafes ; pour cela, il s'agit d'une description qui, étant donné la culture ambiante, pourrait tendre subrepticement à substituer à des *distributions* de tailles, de poids et de longueurs de cou, *une* taille, *un* poids, *une* longueur de cou. Rigoureusement, il est vrai, la description rapportée signifie que la distribution des tailles chez la population des girafes mâles adultes a pour moyenne à peu près 6 mètres et qu'elle est *faiblement dispersée* autour de cette moyenne – ce qui, au reste, a un sens encore très flou. La ligne de démarcation actuelle, en France, entre culture ordinaire – non statistique – et culture statistique passe, on le verra, entre le fait d'informer à l'aide de simples moyennes et le fait de renseigner à l'aide d'au moins un indicateur de tendance centrale *et* un indice de dispersion. Dans des notes d'un enseignement universitaire de biologie disponible sur l'Internet [29], on lit par exemple :

> Quantitative traits are handled by statistical techniques (…). They are described in terms of the mean and variance (…). For instance, for height, we might say that a giraffe population has a mean of 3 m, and a variance of 0.4 m. For quantitative traits, individuals are most usefully described as being a given

[29] Voir http://www.csupomona.edu/~shbryant/twolocus.pdf.

distance from the population mean. A given giraffe might have a height of 2.8 m, so that giraffe would have a height of –0.2 m from the mean.

Cette description classique d'une population observée sous l'angle d'un certain caractère est cela même à quoi il convient d'initier le lecteur, et c'est ce à quoi s'emploie la leçon 3 qui aborde le problème d'emblée. Une première question est posée – « d'où viennent de telles estimations de la hauteur, de la taille du cou et du poids des girafes ? » –, évidemment indispensable : comment sont produits les nombres avancés, 6 (mètres), 1300 (kilos), 2,5 (mètres) ? Une seconde question, essentielle pour faire résonner la problématique statistique, est mentionnée : « un animal qui à l'œil nu est visiblement une girafe, mais dont le cou mesure 3 mètres, est-il une aberration de la nature ou simplement une girafe au long cou ? » Mais c'est à la première question seule que l'on répond : « comme vous vous en doutez, écrit ainsi l'auteure, on a mesuré des girafes et extrait de ces mesures l'information rapportée ici », c'est-à-dire la moyenne (ou peut-être la médiane) des trois caractères statistiques considérés. La suite du paragraphe va alors introduire un vocabulaire qui, pour être classique, peut être regardé, d'un certain point de vue, comme problématique. Lisons : « … c'est là, nous dit-on, un des premiers objectifs des statistiques descriptives : résumer une masse de données en une information clairement compréhensible. » Cette simple phrase comporte deux points qui méritent qu'on s'y attarde, même si un réflexe culturel conduit le lecteur avisé à n'y voir rien que de transparent. Premier point, nous pourrions, par exemple, écrire : « c'est là un des premiers objectifs de la *description statistique* » – en nous réservant de nommer *statistique descriptive* (au singulier) l'art (ou la science) de la description statistique (c'est-à-dire de la description de populations ou d'échantillons de population de mesures), et en parlant d'*une* statistique descriptive à propos d'un indice de description, telle la moyenne ou la variance. Mais le second point est bien plus qu'une affaire de terminologie ; il appelle à nouveau une brève digression sur les conceptions discutables que peut porter en lui un vocabulaire pourtant d'usage courant en statistique. Au lieu d'expliciter l'objectif de la description statistique en parlant de « *résumer* une masse de données en une information clairement compréhensible », on pourrait écrire, en conformité avec les formulations précédentes : « *extraire* d'une masse de données une information clairement compréhensible ». « Extraire » plutôt que « résumer », donc. La métaphore du résumé statistique peut en effet poser problème pour qui est peu familier avec la pensée de la variabilité : une statistique relative à un échantillon, c'est une information relative à cet échantillon, comme l'âge d'une personne ou son poids est une information relative à cette personne. Pourquoi regarder cette information sur l'échantillon de mesures comme un *résumé* alors qu'on ne regardera pas l'âge ou le poids d'une personne comme un résumé de cette personne ? Le choix de la métaphore, nous semble-t-il, peut réintroduire subrepticement une vision pré-statistique de la variabilité, c'est-à-dire, d'une certaine façon, soutenir le déni culturel de la variabilité. Qu'apporte, par exemple, l'information selon laquelle la moyenne des longueurs de cou des girafes – ou du moins, d'une certaine population de girafes – serait de 2,5 mètres ? C'est l'information qu'il nous faut – si du moins on suppose que la moyenne n'est ici pas trop éloignée de la médiane – pour conclure par exemple qu'une girafe dont le cou mesure 3 mètres n'est pas à ranger parmi les girafes au petit cou ! De la même façon on conclura qu'un mâle adulte de 4,20 mètres est, parmi ses congénères, un individu de taille relativement modeste. Et ainsi de suite. L'information sur la population permet ainsi de situer des individus au sein de celle-ci, et cela de manière plus ou moins fine selon la richesse de la description statistique que l'on possède. Le basculement dans la métaphore du résumé pourrait se faire ici par l'invocation du petit apologue que voici :

> Un jeune naturaliste, après un stage dans une réserve d'Afrique, doit faire un rapport sur les grands animaux de cette réserve. Il envisage d'abord de dresser des histogrammes de chacune des séries de mesures faites sur les animaux de la réserve, mais le début de son rapport sera alors aussi volumineux qu'ennuyeux. Il choisit plutôt de présenter, pour chaque espèce, quelques éléments quantitatifs.

La motivation est purement culturelle, voire « mondaine » : l'utilité de ces éléments quantitatifs n'est pas soulevée. Quels éléments quantitatifs, quelles informations faut-il que je possède sur la population étudiée pour pouvoir conclure, par exemple, qu'une girafe dont le cou mesure 3 mètres fait partie des 10 % des girafes de la population qui ont le plus long cou ? Par contraste, le paragraphe déjà cité se prolonge ainsi :

> Mais comment résumer les mesures du tableau I donnant la taille et la longueur du cou de 38 girafes mâles, par une phrase du genre « la taille des girafes de la réserve est d'environ *x* mètres, la longueur de leur cou d'environ *y* mètres, leur poids d'environ *z* kg ? »

Puisque toute fonctionnalité semble écartée, il ne reste plus alors qu'à tenter de donner un sens à l'idée de résumé indépendamment de tout usage possible de ce résumé. Deux voies s'ouvrent. Tout d'abord, bien sûr, celle qu'a creusée l'habitus culturel du calcul de la moyenne (arithmétique), évident en de nombreuses civilisations, et forme concrète du déni de la variabilité que Francis Galton (1822-1911) illustrait plaisamment en évoquant cet Anglais habitué à la platitude de son comté natal qui se souvenait de la Suisse comme d'un pays dans lequel, si les montagnes pouvaient être plongées dans les lacs, on se débarrasserait de deux nuisances à la fois – en faisant ainsi de la Suisse un pays plat [30]. L'autre voie est en vérité une création mathématique dont la diffusion semble relativement récente, même si le schéma formel est ancien [31] : pour résumer une série de mesures a_i, on peut se fixer de rechercher le nombre x qui soit, *d'une certaine manière*, « le plus proche possible de tous les nombres a_i ». En ce point, la leçon laisse place à une petite étude mathématique. La première idée pour traduire mathématiquement la proximité de x aux a_i est de considérer la somme des écarts en valeur absolue $\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{n} |a_i - x|$: il s'agit alors de rechercher un nombre x tel que $\varepsilon(x)$ soit minimal [32]. Cette recherche se développe exemplairement à l'aide de moyens élémentaires : après avoir constaté que les minimums trouvés sur différentes séries ne sont pas atteints en la moyenne de ces séries, elle aboutit à définir de façon claire et rigoureuse la notion de *médiane*. Sans plus de façons, on passe alors à une seconde mesure de proximité du nombre x à la série des a_i, à savoir $\varepsilon'(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - x)^2$. Cette fois, les choses vont plus vite : on aboutit ici, comme on le sait, à la moyenne arithmétique $x = \bar{a}$, le minimum de $\varepsilon'(x)$, à savoir $\varepsilon'(\bar{a})$, étant égal à n fois la variance s^2 de la série des a_i. Subsidiairement est établie l'égalité classique $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \bar{a}^2$. L'étude mathématique s'arrête là. On revient alors aux girafes.

[30] « It's difficult to understand why statisticians commonly limit their inquiries to Averages, and do not revel in more comprehensive views. Their souls seem as dull to the charm of variety as that of the native of one of our flat English counties, whose retrospect of Switzerland was that, if its mountains could be thrown into its lakes, two nuisances would be got rid of at once » (*Natural Inheritance*, 1889).

[31] Dans l'espace, dans un plan, sur une droite, on a la relation dite de Leibniz (1646-1716) : $\sum \alpha_i MA_i^2 = \sum \alpha_i GA_i^2 + MG^2 \sum \alpha_i$, où G est le barycentre des points pondérés (A_i, α_i) : lorsque $\sum \alpha_i > 0$, la somme $\sum \alpha_i MA_i^2$ est minimale lorsque M = G.

[32] Il semble que l'idée ait été formalisée à l'origine par Maurice Fréchet (1878-1973). Cherchant à « définir un élément représentatif, un élément typique d'un ensemble d'éléments de *nature quelconque*, éléments qui pourraient être : nombres, courbes, fonctions, hommes, villes, etc. », Fréchet propose en 1949, dans une conférence faite au palais de la découverte, la *Réhabilitation de la notion statistique de l'homme moyen* comme un problème particulier du problème plus général dont il a exposé sa solution dans les *Annales* de l'Institut Henri Poincaré – *Les éléments aléatoires de nature quelconque dans un espace distancié* – un an plus tôt. Pour ce faire, il introduit la notion de valeur typique, nombre représentatif de l'ordre de grandeur des éléments d'un ensemble, comme l'élément qui rend minimale une certaine *distance*. Cette valeur est telle qu'elle est la plus proche de *toutes les autres* – au sens de la distance envisagée. C'est ainsi que, selon le choix d'une distance, on obtient

Que valent la moyenne et la médiane de chacune des trois séries de 38 mesures ? Le calcul n'est pas réalisé explicitement, mais ses résultats sont donnés : chaque fois, en arrondissant convenablement, on trouve que moyenne et médiane sont égales (ou quasi égales), ce qui permet de « résumer » par la moyenne (plutôt que la médiane), et d'ajouter à ce résumé la valeur de la variance s^2, la mesure de dispersion $\frac{\varepsilon(\bar{a})}{n}$ n'étant mentionnée, *in fine*, que pour préciser qu'il serait inapproprié de l'associer à la moyenne. C'est ainsi que, finalement, grâce à l'opportune proximité des moyennes et des médianes, on retombe sur ses pieds de statisticien. L'auteure conclut : « on peut se contenter, pour résumer les données du tableau I par des paramètres numériques, de dire que la moyenne des tailles est de 5,7 m avec un écart-type de 0,3 m, la moyenne des longueurs du cou est de 2,7 m avec un écart-type de 0,2 m, la moyenne des poids est de 1282 kg avec un écart-type de 103 kg. » Logiquement, la suite aborde alors le cas où moyenne et médiane sont sensiblement différentes. Des remarques classiques sont faites, portées par des exemples également usuels – à propos des salaires au sein d'une entreprise par exemple. Semblablement est abordée la question de la bi-modalité, ce qui permet de faire retour aux girafes en évoquant le fait que si, contrairement à ce qui se produit avec les données examinées, l'histogramme des tailles révélait l'existence de deux modes bien différenciés, on devrait supputer l'existence de deux groupes de girafes ayant chacun des caractéristiques propres. Les choses ne se passant pas ainsi avec les données proposées, la question est abordée de l'idée de *girafe type*, qui serait haute d'environ 6 m, pèserait à peu près 1300 kg et verrait son cou s'élever sur 2,5 m environ. L'idée de dispersion revient alors, à travers les « à peu près » et les « environ ». Une girafe de 5,60 m de taille est-elle une girafe *d'environ* 6 m ? Si, souligne l'auteure, on admet que « environ » signifie « à 0,5 m près » pour la taille et la longueur de cou et « à 100 kg près » pour le poids, alors 23 sur 38 des girafes examinées, soit plus de 60 %, sont des girafes types. Nous revenons ainsi au sein de la problématique statistique par un développement que nous citons maintenant *in extenso* :

> Le petit texte introductif de cette leçon ne parle pas de la dispersion, et ne permet donc absolument pas de savoir si une girafe au cou de trois mètres est une girafe au long cou ou une girafe anormale et aberrante. Cependant, sans chercher à généraliser à l'ensemble des girafes, et en prenant les 38 girafes, on voit que quatre d'entre elles, soit environ 10 %, ont une longueur de cou supérieure à trois mètres. Libre à chacun de considérer qu'une caractéristique rencontrée dans 10 % des cas d'une population

---

différents types de valeur typique pour la même série statistique (la médiane si on considère l'écart absolu, la moyenne arithmétique si on considère le carré des écarts, etc.). Voir Fréchet (1955).

suffit pour parler d'aberration. Mais alors, en faisant de nombreuses mesures (taille, longueur des pattes, du cou, de la queue, poids, distance entre les yeux, etc.) on finirait peut-être par trouver beaucoup de girafes « aberrantes » !

Plusieurs remarques instructives closes cette leçon. Ainsi, note l'auteure, si on a généralement une idée de la moyenne des populations de mesures que nous fréquentons – la taille des femmes ou la taille des hommes du pays où l'on vit par exemple – on n'a en général qu'une bien piètre idée de ce que pourrait être l'écart type de la même population de mesures (il est d'environ 6 cm pour la taille des femmes et 7 cm pour la taille des hommes, en France aujourd'hui). « Cette absence d'éléments de comparaison contribue, dans un premier temps, à rendre les notions d'écart-type et de variance un peu ésotériques », conclut l'auteure. Sans doute peut-on avancer que, à l'inverse, la non-intégration dans la culture commune de la notion d'écart type (et des notions fonctionnellement équivalentes) va de pair avec le non-développement d'une capacité culturellement partagée à apprécier les dispersions comme on apprécie les tendances centrales. La diffusion (ou la non-diffusion) d'une notion *a priori* particulière – disons, celle d'écart type – d'une science particulière – la statistique – apparaît ainsi interdépendante de conditions et de contraintes propres à une société – et, au-delà, à une civilisation.

5. Trois autres leçons

Après la girafe, voici l'empereur ! (Les deux ensemble donnent son titre à l'ouvrage que nous présentons ici succinctement.) Un empereur de Chine, et de grande taille, est en effet le héros de l'intermède qui conduit de la leçon 3 à la leçon 4. L'histoire qui est contée là peut se résumer ainsi : dans l'entourage impérial, une certaine tâche ✓ est envisagée : faire réaliser une statue grandeur nature de l'empereur [33]. L'accomplissement de cette tâche ✓ par le sculpteur impérial conduit à devoir réaliser une autre tâche, *t*, qui, elle, se révèle subtilement *problématique* – déterminer la *taille* de l'empereur. La technique usuelle pour accomplir les tâches du type de *t*, *mesurer* la personne dont la taille doit être déterminée, est ici impossible pour des raisons de protocole : on ne mesure pas l'empereur ! Il faut donc inventer une autre technique, relative à un sous-type de tâches que l'on peut énoncer ainsi : déterminer la taille d'une personne dont on ne peut mesurer la taille directement, « avec une simple toise ». La fin de l'intermède attirera l'attention sur le fait qu'une telle technique ne nécessite nullement le

[33] Nous utilisons ici un vocabulaire et des notations introduits par Yves Chevallard. Voir par exemple Chevallard (2001a).

recours à la statistique : le théorème de Thalès et le mesurage de l'ombre de l'empereur (ainsi que de l'ombre d'un « étalon » dont la taille peut, elle, être mesurée) suffiraient pour accomplir la tâche *t*. La première anomalie, en cette affaire, se trouve là : au lieu de faire parler les choses, on décide, dans l'entourage impérial, de faire parler les hommes à propos des choses, et cela, non pour connaître leur sentiment sur les choses, mais pour connaître la *réalité* des choses ! On décide donc d'interroger un large échantillon de sujets de l'empereur à propos de la taille de celui-ci : combien pensez-vous qu'il mesure ? Une deuxième anomalie survient ici : cette décision est prise en absence du statisticien impérial, en sorte que plusieurs règles essentielles du travail statistique sont ignorées : définition de la population à échantillonner, technique d'échantillonnage, etc. En revanche on n'oublie pas ce qui n'est nullement une exigence de méthode dans l'absolu : prendre un échantillon de grande taille – quelque dix mille personnes au bas mot ! Les données recueillies par les enquêteurs se traduisent par un histogramme qui pour l'essentiel apparaît grossièrement uniforme.

Lorsque le statisticien impérial découvre la chose, il renâcle : comment tirer d'une distribution quasi uniforme de mesures une bonne valeur approchée de la mesure réelle que cette distribution dissimule ? La distribution en question, bien sûr, doit être expliquée : dans les cas usuels, les distributions de mesures sont peu ou prou « normales ». Le statisticien contre-enquête donc pour savoir comment ces données ont été recueillies. Il appert que les enquêteurs ont posé une unique question – sur la taille de l'empereur – sans vérifier que les personnes interrogées avaient une fois au moins dans leur vie rencontré l'empereur ! Devant cette situation et les risques qu'elle fait courir sur sa vie, ce malheureux statisticien procède à une discrète enquête alternative, auprès de 200 personnes seulement, mais toutes familières de l'empereur. Il obtient ainsi un histogramme de mesures dont la forme est d'allure normale, ce qui lui permet d'en déduire une valeur approchée raisonnable de la taille de l'empereur. Là intervient en fait une dernière anomalie, volontaire de la part du statisticien impérial : bien que les estimations aient été faites au centimètre près, profitant de l'ignorance abyssale de la cour et pour ébahir les courtisans et l'empereur lui-même, le statisticien annonce alors une taille égale à 1,987654321 mètres. Il sauvera sa vie, en vertu du principe qui veut que les bons chiffres fassent les bons amis, du moins dans le commerce des petits avec les puissants.

L'intermède fait vivre au lecteur, en peu de pages, tout un ensemble de situations et de pièges typiques du travail statistique. Avec la leçon 4, la tonalité change : même si le titre – *En effeuillant la marguerite…* – est bucolique à souhait, le sous-titre aligne en rang serré une armée de notions qui outillent de façon classique ou plus récente la description statistique – « moyenne, médiane, quartiles, déciles, variance, diagrammes en boîte ». Là encore, une question est mise au principe du travail présenté : serait-il vrai, comme le pense une certaine monitrice de colonie de vacances, que, lorsqu'on effeuille une pâquerette en disant « Je t'aime, un peu, beaucoup, passionnément, à la folie, pas du tout », la distribution du point d'arrêt de la comptine – en l'une des six modalités ci-dessus – s'éloigne sensiblement de l'uniformité – par exemple parce que la comptine s'arrêterait plus fréquemment sur un « pas du tout » ? La chose est *a priori* peu crédible. Une étude statistique s'impose, puisqu'une pâquerette possède un nombre *variable* de pétales. On procède donc à l'observation du nombre de pétales dans un certain échantillon de 250 pâquerettes – le nombre de pétales y fluctue entre 28 et 56. Pourtant l'étude ainsi amorcée est vite différée. Les 250 données recueillies sous la forme de cinq séries de 50 sont alors regardées comme « un prétexte pour faire des calculs qui éclairent des propriétés de la moyenne et de la variance » – sans que ces propriétés soient motivées par des tâches de calcul elles-mêmes clairement motivées. Ainsi la technique autrefois classique de calcul d'une moyenne « à la main », avec translation préalable de la variable (afin de travailler sur des valeurs moins complexes), est-elle illustrée sur le cas de l'une des cinq séries de 50 données, alors que l'emploi de cette technique dans un tel cas n'est en soi guère pertinent aujourd'hui, même s'il reste judicieux en d'autres circonstances, que l'auteure présente ainsi :

> Remarquons que ce procédé de calcul est utile, même si on dispose d'une calculatrice de poche. Si vous devez calculer la moyenne de 100 données, toutes comprises entre 134 500 et 134 550, vous avez de grandes chances de vous tromper en saisissant vos 100 données sur une calculatrice ; par contre, si vous retranchez 134 500 à tous les termes de la série, il suffit de saisir des nombres à deux chiffres, ce qui est plus simple et source de moins d'erreurs de saisie. Ensuite, on ajoute 134 500 à la moyenne donnée par la calculatrice.

On passe alors à des remarques analogues concernant la variance, dont on observe qu'elle n'est pas modifiée par une translation des valeurs de la série étudiée. De la même façon, on observera ce qu'il en est de la moyenne et de la variance lorsqu'on effectue sur la série statistique une transformation affine, le texte proposant le résultat sous la forme d'égalités qui parlent d'elles-mêmes : $m(\lambda a + \delta) = \lambda m(a) + \delta$ et $\mathrm{var}(\lambda a + \delta) = \lambda^2\mathrm{var}(a)$. Moyenne et variance sont ensuite fournies toutes calculées pour les cinq séries d'effectif 50. C'est là l'occasion d'illustrer l'un des pièges des représentations graphiques : si, dans un repère orthogonal, on porte en abscisse les lettres *a*, *b*, *c*, *d*, *e* représentant les cinq séries de 50 données numériques et en ordonnée les moyennes de ces séries, on obtient une impression visuelle fort différente suivant le choix de l'unité sur l'axe des ordonnées : une unité « petite » écrase les fluctuations alors que le choix d'une grande unité les magnifie. Cela noté, on souhaite comparer entre elles

les cinq séries ; la chose peut se faire, certes, à l'aide de la moyenne et de la variance. C'est là toutefois qu'est introduit ce qui sera l'une des innovations des programmes du lycée en matière de statistique, les *diagrammes en boîte* ou *diagrammes en boîte et moustaches* [34] – les *Box-and-whisker plots* des auteurs de langue anglaise. Outre la médiane, l'introduction de ces diagrammes suppose d'abord la définition des premier et troisième *quartiles* (un tel diagramme comporte en effet une « boîte » rectangulaire dont le bord inférieur a pour ordonnée le premier quartile et le bord supérieur, le troisième quartile). Les quartiles sont alors définis, non à partir de l'idée naïve qui en gouverne la création (25 % des données de la série au-dessous, 75 % au-dessus s'agissant du premier quartile par exemple), mais directement par un algorithme de calcul qui distingue les cas où la taille de la série est ou n'est pas divisible par 4. Il en va de même s'agissant des *déciles*, qui fournissent l'ordonnée de l'extrémité des « moustaches » du diagramme – tandis que les points extrêmes, qu'on nomme adéquatement, en anglais, *outliers*, apparaîtront au-delà des extrémités des moustaches. La leçon présente alors les cinq boîtes à moustaches correspondant aux cinq séries de cinquante données. La conclusion de ce rapprochement (« les cinq diagrammes sont assez semblables ») est alors suivie d'une tout autre question : comment, à partir de la connaissance des moyennes et variances des cinq séries de cinquante données, obtenir la moyenne et la variance de la série complète relative aux 250 pâquerettes ? La moyenne ne pose guère de problème ; pour la variance, il en va autrement : aussi il est demandé au lecteur d'admettre la « formule de décomposition de la variance » (« variance totale = variance inter-groupe + variance intra-groupe [35] »). L'intérêt d'une telle technique de calcul n'apparaît pas

[34] Ces outils de graphique statistique, dus au statisticien américain John Wilder Tukey (1915-2000), figurent actuellement au programme des classes de première L, ES et S. L'ouvrage de référence a été publié par Tukey en 1977 sous le titre *Exploratory Data Analysis* (chez Addison-Wesley). Sur l'analyse exploratoire de données, voir par exemple le chapitre 6 de Dodge (2003).

[35] Supposons une série Σ de taille n scindée en p séries $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_p$ d'effectifs respectifs $n_1, \ldots, n_p$ (où $n = \sum_{i=1}^{p} n_i$). Désignons par x_{ik} la k-ième valeur ($1 \leq k \leq n_i$) de la série Σ_i, par $\overline{x_i}$ la moyenne de la série Σ_i et par $\overline{x}$ la moyenne de Σ, en sorte qu'on a $\overline{x_i} = \dfrac{1}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i} x_{ik}$ et $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n_i} x_{ik} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i\overline{x_i}$. Il vient ainsi $x_{ik} - \overline{x} = (\overline{x_i} - \overline{x}) + (x_{ik} - \overline{x_i})$: la variation totale $x_{ik} - \overline{x}$ est la somme de la variation *factorielle* $\overline{x_i} - \overline{x}$ (celle de la moyenne de Σ_i par rapport à la moyenne de Σ) et de la variation *résiduelle* $x_{ik} - \overline{x_i}$ (à l'intérieur de la série Σ_i). En élevant au carré les deux membres de l'égalité précédente, en sommant pour toutes les valeurs de Σ, et en observant que la somme des

flagrante, dans la mesure où les moyens modernes de calcul permettent sans difficulté de calculer d'emblée la moyenne ou la variance d'une série de taille 250. Cependant, si l'on doit calculer la moyenne et la variance d'une série de 1000 termes, « on n'est pas tenu d'attendre d'avoir toutes les données », on peut commencer en calculant moyenne et variance sur la série partielle immédiatement disponible. On observe encore, dans cette perspective, que les valeurs extrêmes ont un bon comportement par rapport à ce processus de traitement d'une série de données, alors que la médiane lui reste fondamentalement hostile : « la médiane d'une série ne peut pas être déterminée à partir de calculs dans les sous-séries [36] ».

Pendant tous ces développements, le problème initial est resté en suspens. Les deux dernières pages de la leçon lui sont donc consacrées. Selon le nombre de pétales que possède la pâquerette « effeuillée », la comptine se termine sur un « je t'aime » ou sur « un peu », etc. En l'espèce, l'échantillon de 250 pâquerettes conduit à un « pas du tout » dans à peu près 10 % des cas, à « je t'aime » ou à « un peu » dans environ 13 % des cas, à « beaucoup » dans un peu moins de 20 % des cas, à « passionnément » et « à la folie » dans 22 et 24 % des cas respectivement. « On voit, conclut l'auteure, que l'effeuillage se termine par "passionnément" et "à la folie" dans plus de 40 % des cas. » « La comptine, s'interroge-t-elle alors, serait-elle construite de sorte que l'effeuillage se termine le plus souvent heureusement ? » À nouveau, le travail statistique proposé met le lecteur devant l'idée de confrontation avec un modèle probabiliste. Les résultats empiriquement observés sont-ils compatibles avec l'hypothèse que chaque issue de la comptine aurait la même « probabilité », la même « fréquence théorique » – ici égale à $\frac{1}{6}$ –, ce qui donnerait un effectif de 42 environ ? On évoque alors un test du χ^2 : la leçon précise que l'écart constaté entre les deux distributions de fréquences – théorique et observée – ne se produit que dans moins de 1 % des cas, ce qui conduit à rejeter l'hypothèse d'équiprobabilité des différents résultats possibles pour la comptine. Mais cette conclusion est-elle convaincante ? L'auteure fait remarquer – et c'est là une remarque jusqu'ici inédite – qu'une étude statistique unique et isolée ne suffit pas en général à assurer un résultat solide. D'autres études devraient donc être conduites pour questionner davantage une conclusion qui

---

doubles produits est nulle, on arrive à *l'équation d'analyse de la variance* : $\sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{n_i} (x_{ik} - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{p} n_i(\overline{x_i} - \overline{x})^2 + \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{n_i} (x_{ik} - \overline{x_i})^2$.

[36] Le nouveau programme de seconde précise semblablement : « On remarquera que la médiane d'une série ne peut se déduire de la médiane de sous-séries. »

paraît étonnante : ce que le lecteur est invité à faire. Le chapitre se clôt, enfin, par des considérations sur les notations utilisées : le lecteur y apprend qu'il convient de désigner par s^2 la variance d'une série statistique, et non par σ^2 comme le font les calculatrices, la notation σ^2 étant réservée à la variance *théorique*. Cette observation, que l'on retrouvera dans les textes gouvernant l'enseignement de la statistique au lycée [37], annonce *in fine* les développements que la suite des leçons consacrera aux aspects plus théoriques de la modélisation statistique.

L'intermède entre la leçon 4 et la leçon 5 s'intitule *Le vieux fidèle* – traduction du nom donné au geyser *Old Faithful* du parc de Yellowstone dans le Wyoming. À nouveau il s'agit d'une petite étude statistique, consacrée ici à deux questions : combien de temps dure une éruption du geyser ? Combien de temps s'écoule-t-il entre deux éruptions ? L'étude prend d'abord pour objet le temps écoulé entre deux éruptions successives, en s'appuyant sur des données officielles concernant la période du 1er au 15 août 1995, relatives aux durées séparant 300 éruptions consécutives – soit une série de 299 durées mesurées en minute au dixième près. Dans l'exploitation touristique du phénomène, une durée très peu variable (faute d'être fixe) serait appréciable. La durée minimale dans la série observée est de 46 minutes, tandis que la durée maximale est de 108 minutes – plus d'une heure et demie ! De fait, la moyenne est de 72,3 minutes (la médiane, de 76 minutes), mais l'écart type est de 13,8 minutes : le coefficient de variation est ainsi de 19 %. La variabilité du phénomène est donc importante. On se demande ainsi « à quoi ressemblent deux séries qui ne diffèrent que par la fluctuation d'échantillonnage. » Pour répondre, la série des 299 données est scindée en deux, la série des durées 1 à 150 et celle des durées 151 à 299. Pour chacune d'elles, le lecteur ne dispose que d'une représentation graphique formée des points ayant pour abscisse le numéro d'ordre de la durée dans la série et pour ordonnée la valeur de cette durée. À l'œil nu les représentations graphiques relatives aux deux séries du Vieux fidèle ont entre elles une certaine ressemblance. Comment mettre à l'épreuve objectivement cette impression visuelle ? L'idée est avancée qu'on peut essayer de reproduire ces séries par *simulation* en engendrant aléatoirement une série ayant sensiblement la même moyenne et le même écart type ; et, pour le contraste, s'il est possible, on engendre aussi une série ayant sensiblement la même moyenne mais un écart type très différent – presque six fois plus grand. L'inspection visuelle semble montrer une ressemblance entre les deux séries du Vieux fidèle et la première série simulée, et une assez

[37] Les programmes de première ES et S comportent l'indication suivante : « On notera s l'écart-type d'une série, plutôt que σ, réservé à l'écart-type d'une loi de probabilité. »

nette dissemblance avec la seconde. Pour objectiver de manière un peu plus robuste ressemblances et dissemblances, on peut comparer les diagrammes en boîte correspondant ; bien entendu les trois premiers diagrammes se ressemblent, tandis que le quatrième, avec son énorme variance, affiche clairement sa différence. Mais la ressemblance des trois premières séries – les deux « vraies », la troisième simulée – ne tient pour le moment qu'à la proximité et de leurs moyennes et de leurs écarts types. Auraient-elles des distributions de fréquences d'allure voisine ? Bien entendu, même si le texte ne le dit pas, la ressemblance entre la troisième distribution et les deux premières dépendra de la loi utilisée pour engendrer cette troisième série – on peut penser ici, au vu de l'histogramme, qu'il s'agit d'une loi normale. Peu importe ; l'histogramme, même lorsqu'il est bâti avec peu de classes, nous fait pénétrer dans la distribution de fréquences plus avant que ne le font les diagrammes en boîte. Ici, ils révèlent que les séries du Vieux fidèle ont une structure dissymétrique avec un mode très prononcé – la classe modale [75 ; 85[contient environ 35 % des données –, la distribution sur les autres valeurs ne s'éloignant qu'assez peu de l'uniformité.

Qu'en est-il des durées des éruptions elles-mêmes ? L'intermède donne à voir le nuage des points représentant les durées des 300 éruptions : il apparaît que la distribution des durées est nettement *bimodale*, certaines durées se concentrant autour de 2 minutes, d'autres autour de 4 minutes. Une possible anomalie est soulignée : nombre de durées sont de 2 minutes exactement ou de 4 minutes exactement – il y en a ainsi 55 de cette dernière sorte sur les 300 recueillies. Comme le suggère l'auteure, la nature ne connaissant pas les unités de temps employées par les hommes, on peut voir là une trace certaine de l'action anthropique – et plus précisément du fait que le recueil des données n'est pas automatisé, mais fait manuellement ! Un dernier graphique propose en abscisse le temps d'attente entre une éruption et la précédente et en ordonnée la durée de cette éruption. On retrouve la bimodalité des durées. Mais le graphique suggère un peu plus : il semble en effet que, parmi les éruptions le plus longtemps attendues, il y ait davantage d'éruptions de longue durée, conjecture qui n'est pas examinée plus avant.

La leçon 5 se réfère à un élève de Pythagore, *Hippase de Métaponte*, dont il est conté que, pour avoir divulgué l'incommensurabilité du côté et de la diagonale d'un carré, les dieux le firent périr en mer [38]. Une grande partie de la leçon est en fait consacrée à établir l'incommensurabilité évoquée, c'est-à-dire l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Une autre partie évoque un

[38] Hippase est connu surtout par la *Vie de Pythagore* de Jamblique (vers 300 ap. J.-C.) ; il aurait vécu aux VIe-Ve siècles av. J.-C.

professeur de physique qui, doutant tout à coup du théorème de Pythagore, en tente une vérification expérimentale : cela se traduit par un tableau relatif à 25 triangles rectangles dont les côtés de l'angle droit sont choisis entre 2 et 30 centimètres et dont l'hypoténuse est mesurée à 0,05 cm près, cette mesure étant comparée à la valeur donnée par le théorème de Pythagore. La série des 25 différences entre longueur mesurée et longueur théorique admet pour minimum –0,4 cm, pour maximum 0,5 cm, pour moyenne 0,02, pour médiane 0, enfin pour écart type 0,2 cm. La leçon s'attache à souligner l'imprécision indépassable – étant donné le mode d'expérimentation – portant sur les diverses mesures en jeu – à laquelle elle mêle au reste l'imprécision sur le calcul d'une racine carrée. La conclusion est par conséquent la suivante :

> … une loi expérimentalement vérifiée est par définition une loi empirique et non un théorème : l'expérience à elle toute seule ne peut pas constituer une démonstration d'un théorème de mathématiques.

L'intermède qui fait transition entre la leçon 5 et la leçon 6 est très court. Mais, pour la première fois, il expose le lecteur à l'examen d'une situation où *deux* variables sont en jeu simultanément : pour une série de 11 trimestres successifs et pour une certaine entreprise, on connaît un indice de la production ainsi que le cours des actions en bourse. Le point de départ de l'intrigue se situe dans un procès fait à un homme d'affaires réputé véreux qui se serait rendu coupable d'un délit d'initié en achetant des actions de ladite entreprise, et cela à l'issue du 11e trimestre de la série, alors que le cours était au plus bas ! L'avocat de la partie civile allègue à l'encontre de l'homme d'affaires qu'une information illégale a sans doute inspiré son achat car, argumente-t-il, le nuage des points ayant pour abscisse la production d'un trimestre et pour ordonnée le cours de l'action en ce même trimestre ne fait apparaître aucune régularité qui pourrait justifier un mouvement quel qu'il soit. La réplique se révèle en vérité facile : le lien de type fonctionnel à examiner n'est pas, en effet, celui qui pourrait exister entre l'indice de production d'un trimestre et le cours de ce *même* trimestre, mais bien celui existant entre la production d'un trimestre et le cours du trimestre *suivant*. Or, dans ce cas, le nuage des points n'est plus chaotique : le simple examen du tableau des données numériques suffit d'ailleurs à montrer que, plus la production d'un trimestre est élevée, et plus le cours de l'action sera élevé au trimestre suivant. La situation est en vérité bien plus régulière encore : les points représentatifs sont presque impeccablement alignés le long d'une droite d'équation $y = 31,9 + 0,4\,x$, où x est l'indicateur de production du trimestre *précédent*. La considération d'une *seule* variable – le cours de l'action – conduirait en ce cas à une analyse bien fragile !

Ne considérer que la série des cours pourrait, certes, conduire à acheter, parce que le cours du 11e trimestre est le plus bas de la série des indices disponibles, et qu'on peut être porté à espérer que le cours remonte ; mais rien n'est moins sûr ! La considération de *deux* variables à la fois – c'est ce qu'enseigne cet intermède – est *a priori* plus éclairante. Mais encore faut-il étudier le bon lien entre les deux variables : non pas le lien entre y_t et x_t mais celui entre y_t et x_{t-1}. Le lecteur entre ainsi dans le thème d'études de l'exploration statistique à deux variables.

Cette question va recevoir un développement remarquable avec la leçon 6, intitulée *La découverte de Cérès*. Pour cette raison d'abord que l'étude statistique proposée conduira le lecteur dans les méandres – et parfois les opacités – d'une recherche de facture authentique, en contraste avec des usages plus ou moins respectés dans les leçons précédentes, ainsi qu'il est précisé au démarrage de cette nouvelle étude :

> Une analyse statistique descriptive est composée de plusieurs étapes, mais ce qu'on en publie, dans les livres ou les revues, exclut en général les essais et questions intermédiaires. Exceptionnellement, nous choisissons de tout détailler, quitte à introduire dans le texte quelques longueurs.

Le point de départ de l'étude se trouve dans la célèbre loi dite de Titius-Bode [39], qui indique que la distance d_n au soleil de la n-ième planète du système solaire, où $n = 2, \ldots, 6$, est approximativement égale à $0{,}3 \times 2^{n-2} + 0{,}4$ lorsqu'on l'exprime en unités astronomiques (UA) [40]. L'idée de la leçon est de réexaminer cette conclusion en partant des données que fournit l'astronomie. Le nuage des six points correspondant aux six planètes connues à la fin du XVIIIe siècle (il s'agit de Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne) fait penser à une croissance rapide, de type exponentiel. De là qu'on associe au numéro d'ordre n de la planète, non pas sa distance au soleil, mais le logarithme népérien de cette distance. Une nouvelle représentation graphique montre alors les points représentatifs beaucoup plus alignés – si l'on peut parler ainsi. Plus exactement, les quatre premiers points sont très proches d'une certaine droite, les deux derniers étant quelque peu décalés. Pour obtenir un meilleur alignement, il suffit alors de changer le numéro d'ordre des planètes correspondant aux deux derniers points – Jupiter et Saturne –, en faisant comme si une planète inconnue s'intercalait entre la Terre et

---

[39] Johann Daniel Titius (1729-1796), professeur à Wittenberg, eut l'idée de cette loi en 1766 en lisant l'ouvrage du naturaliste suisse Charles Bonnet (1720-1793), *Contemplation de la nature* (1764). L'astronome Johann Elert Bode (1747-1826), qui devait diriger l'observatoire de Berlin, fut très jeune l'auteur d'une introduction à l'astronomie (1768) qui eut un immense succès et de nombreuses éditions ; c'est en 1772 qu'il y fera connaître la loi appelée depuis loi de Titius-Bode.

[40] Par définition, la Terre est à *une* unité astronomique du soleil. Ce qu'on appelle distance au soleil d'une planète est en fait le demi-grand axe de l'ellipse que décrit la planète.

Jupiter. La recherche d'un tel objet céleste aboutit le 1er janvier 1801 avec la découverte – par l'astronome italien Giuseppe Piazzi (1746-1826) – de l'astéroïde Cérès, d'un diamètre de 1025 km, situé à environ 2,8 UA du soleil [41]. Entre l'énoncé de la loi de Titius-Bode et la découverte de Cérès avait eu lieu, en 1781, la découverte – par l'astronome anglais William Herschel (1738-1822) – de la première planète nouvelle depuis l'antiquité : Uranus, située à environ 19,2 UA du soleil. La découverte de Cérès venait ainsi compléter un tableau de huit corps célestes, dont les points représentatifs formaient dès lors un nuage de points remarquablement alignés. Sauf pour Mercure donc, l'accord entre d_n et la valeur donnée par la loi de Titius-Bode (à savoir $0{,}3 \times 2^{n-2} + 0{,}4$) semble raisonnable. Mais – et c'est là l'apport propre de la leçon à une initiation à la statistique – la connaissance de la loi de Titius-Bode n'est *nullement* nécessaire au statisticien, lequel dispose d'outils *généraux* de description statistique pour préciser la liaison entre deux variables. Le lien entre le numéro n de la planète ($1 \le n \le 8$) et le logarithme népérien de la distance D_n exprimée en millions de kilomètres (on a $D_n = d_n \times 149{,}6$) peut, en l'espèce, être modélisé à l'aide de la technique de la droite des moindres carrés : en ce cas, l'équation est $y = 0{,}54\,x + 3{,}43$, en sorte qu'on a donc $\ln D_n \approx 0{,}54\,n + 3{,}43$. Ce n'est là qu'un galop d'essai. Si l'on prend pour « variable explicative » non le rang n mais l'entier 2^{n-2}, on trouve que les points de coordonnées $(2^{n-2}, d_n)$ sont remarquablement alignés, et que, en ce cas, la technique des moindres carrés donne pour équation de la droite de régression $y = 0{,}29\,x + 0{,}39$, ce qui conduit à écrire que $d_n \approx 0{,}29 \times 2^{n-2} + 0{,}39$: on est évidemment tout près de la loi de Titius-Bode, selon laquelle $d_n \approx 0{,}3 \times 2^{n-2} + 0{,}4$! Ce qui avait été pour Titius puis Bode le fruit d'une observation perspicace n'est plus ici que le résultat mécaniquement établi d'une technique de portée très générale qu'offre la statistique. Cette même technique statistique, qui a permis de retrouver sans coup férir une loi fameuse, montre aussi que cette loi semble bien n'être qu'une singularité isolée. En septembre 1846, l'astronome allemand Johann Gottfried Galle (1812-1910) découvre, sur la base d'indications très précises fournies par l'astronome français Urbain Le Verrier (1811-1877), la planète Neptune ; or si l'on recommence le travail précédent en incluant dans la série cette nouvelle planète, l'alignement se perd largement : la loi de Titius-Bode annonce une distance de Neptune au soleil de 38,8 UA alors que la distance réelle est, si l'on peut dire, à peine supérieure à 30 UA. Les choses s'aggravent encore avec la planète Pluton découverte en 1930 par l'astronome américain Clyde William Tombaugh (1906-1997) : là où la loi de Titius-Bode prévoit 77,2 UA, la distance réelle est de 39,4 UA. Bien entendu, on peut

[41] Jupiter est situé à environ 5,2 UA du soleil.

reprendre les calculs de régression pour l'ensemble des neuf planètes, augmenté de Cérès. L'équation trouvée est alors $y = 0{,}54\,x + 3{,}46$: elle ne diffère que très peu de la droite de régression calculée sans Neptune et Pluton et conduit à écrire $\ln D_n \approx 0{,}54n + 3{,}46$, ce qui donne pour Neptune une distance au soleil de 4 105 millions de kilomètres alors que celle-ci est de 4 504 millions de kilomètres (soit 27,44 UA au lieu de 30,06 UA). De même, ce modèle situe Pluton à 7 044 millions de kilomètres alors que celui-ci ne se trouve qu'à 5 913 millions de kilomètres (c'est-à-dire à 47 UA plutôt que 39,5 UA). La modélisation est médiocre, comme on pouvait s'y attendre.

La leçon se poursuit en distinguant dans la loi de Titius-Bode deux aspects : d'une part la régularité de la croissance des distances au soleil, d'autre part la formule elle-même dans sa remarquable concision. Le second aspect ne peut sans doute être sauvé ; en revanche le premier – le fait que les logarithmes des distances soient à peu près alignés – pourrait faire l'objet d'une recherche qui donne à ce constat empirique et *a priori* très général une raison d'être théorique. Mais avant de tenter – ailleurs – une telle aventure, demandons-nous ici ce qu'il en est de sa généralité : se pourrait-il par exemple qu'il s'agisse là d'un phénomène presque universel ? L'auteure prend pour exemple d'une part les masses, d'autre part les densités des neuf planètes et montre que rien de semblable à ce qui se passait avec le logarithme des distances ne se produit ici – la chose est surtout évidente pour les densités. On peut alors pousser plus loin l'investigation et, en lieu et place des planètes, satellites du soleil, considérer les satellites de Jupiter, de Saturne ou d'Uranus en examinant, pour chacun de ces ensembles de corps célestes, le logarithme de leur distance moyenne à la planète correspondante. Pour Jupiter, une partie des 16 satellites considérés fournit un assez bon alignement. Pour Saturne, certains satellites partagent la même orbite et, au lieu de considérer les satellites eux-mêmes, on considère les orbites ; l'alignement ne se produit que pour certains sous-ensembles de satellites. Il en va de même pour Uranus : on observe là comme ailleurs certaines régularités partielles. En revanche la recherche d'une formule « à la Titius-Bode » devient illusoire pour les ensembles de plus de quatre satellites. Ainsi se termine la contre-enquête que les outils de la description statistique bivariée permettent de mener à partir d'un événement historiquement daté et scientifiquement circonscrit – la formulation de la « loi » de Titius-Bode.

La leçon se termine par une annexe où sont présentés la recherche de la droite des moindres carrés, le modèle de la régression linéaire et le coefficient de régression linéaire – sujets qui n'appellent guère d'examen ici. Tout cela, observe simplement l'auteure, se laisse définir, mathématiquement, sans que l'on ait à invoquer la notion de probabilité. Mais, comme en d'autres domaines de la description statistique, le bon usage de ces notions appelle une modélisation probabiliste dans laquelle la suite des leçons va faire entrer le lecteur. En attendant, l'intermède suivant, qui conduit de la leçon 6 à la leçon 7, s'arrête sur des difficultés classiques de l'analyse statistique bivariée. Le taux de mariage en France apparaît, sur la suite des années 1974 à 1981, fortement corrélé – négativement – avec le PIB du pays. L'intermède s'arrête d'abord sur les réactions différentielles face à un tel constat (en lui-même indubitable) : critique acide ou disqualification d'allure savante [42] se distinguent de l'attitude du statisticien telle que l'auteure l'explicite. En l'espèce, en effet, une raison possible de la corrélation observée est la suivante : si l'on appelle x et y les deux variables et si ces variables sont fonctions affines du temps t (ou d'une quelconque autre variable z), alors elles sont fonction affine l'une de l'autre. Or il se trouve que dans l'intervalle de temps examiné le taux de mariage a baissé selon une loi grossièrement affine tandis que le PIB augmentait de même, situations qui ont suffi à produire mathématiquement la forte corrélation linéaire entre mariages et PIB. L'auteure observe que, de la même façon, on pourrait, sur des périodes bien choisies, observer un tel lien statistique entre, par exemple, le taux de chômage en Europe et le nombre de touristes visitant la statue de la Liberté à New York. À l'inverse, le lien observé entre mariages et PIB se perd dès lors qu'on étend la période d'observation de 1974 jusqu'à 1994 [43].

Les leçons 7, 8, 9 introduiront le point de vue probabiliste, qui n'était apparu que comme une ligne de fuite dans les développements précédents. Corrélativement, la pression mathématique exercée dans le texte proposé par les « œuvres » statistico-probabilistes à présenter va croître de façon manifeste. Le titre de la leçon 7 – *L'honnête homme et le géomètre* – fait référence à une situation d'étude statistique concrète. Le géomètre est ici le mathématicien du XVII^e^ siècle qui, par une métonymie aujourd'hui désuète, se désigne comme

---

[42] Du genre : « Si l'on échange abscisses et ordonnées, on pourra être tenté de lire sur le graphique une causalité de sens inverse. Ce qui répudie toute interprétation causale ! »

[43] L'explication du phénomène mathématique à l'origine du lien statistique observé est traité en termes de taux de variation, ce qui est sans doute l'outillage le moins sophistiqué possible. La disponibilité de tels raisonnements sur les taux de variation, dont on peut dire qu'ils avaient disparu depuis plusieurs décennies des classes de mathématiques, sera sans doute le motif de la réintroduction en classe de seconde d'un théorème alors bien oublié, mais indispensable pour passer de l'hypothèse de constance d'un taux de variation (usuelle dans les pratiques extérieures à la classe de mathématiques : un piéton marche à la vitesse de 3 km/h, le débit d'un robinet est de 7,5 ℓ/min, etc.) à une expression analytique de la forme $y = ax + b$: le programme demande en effet que les élèves sachent « caractériser les fonctions affines par le fait que l'accroissement de la fonction est proportionnel à l'accroissement de la variable ».

expert du domaine fondateur de l'*imperium* mathématique, la géométrie. Le nom s'applique en priorité à Blaise Pascal (1623-1662), créateur, avec quelques autres qui le précèdent ou le suivent, de ce qu'on appela d'abord la *géométrie du hasard* [44]. La leçon s'ouvre par une référence au chevalier de Méré (1607-1684) et au commerce qu'il eut avec Pascal à propos de questions de « théorie des chances » ; arrière-fond culturel où apparaissent, à une extrémité historique, le *Liber de ludo aleae* (1565) de Girolamo Cardano (Jérôme Cardan) (1501-1576), et, à l'autre extrémité, la théorie axiomatique des probabilités d'Andreï Kolmogorov (1903-1987), publiée en 1933 sous le titre *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (« Fondements de la théorie des probabilités »). Cette courte introduction amorce une leçon qui, à l'instar des suivantes, nous dit l'auteure, a pour objet d'éclaircir « la nature du lien entre les jeux de hasard et les probabilités ». Notons tout de suite un implicite dont nous suivrons le destin au fil de l'ouvrage : celui du lien entre jeux de hasard et *variabilité statistique*, fondamental dans la mathématisation probabiliste du champ statistique. Pour le moment, en tout cas, la leçon examinée résout le problème – si l'on peut dire – en se centrant sur cette variabilité statistique qui est, précisément, celle des jeux de hasard. On s'arrête en l'espèce sur la question du contrôle de qualité d'une roulette de casino, ce qui motive le recueil de quatre séries statistiques de 1000 « sorties » binaires – *rouge* ou *noir*. La problématique est ici différente de celle plusieurs fois rencontrée dans les leçons précédentes, où une grandeur variable – par exemple la taille estimée de l'empereur – avait une distribution que l'on s'efforçait de découvrir et d'analyser. Ici, l'attente est inverse : on a en tête une certaine distribution – autant de *rouge* que de *noir*, par exemple – et l'on veut vérifier si cette distribution est bien celle des résultats empiriquement obtenus. Bien entendu une telle problématique, qui conduit à penser la variabilité en termes de hasard, avait déjà été entrevue lorsqu'on se demandait si une certaine distribution empiriquement observée pourrait être le fruit de mécanismes aléatoires – sans qu'on possède pour autant une idée précise de tels mécanismes. Qu'en est-il donc de la distribution empiriquement observée du rouge et du noir, distribution dont on voudrait qu'elle fût conforme à une certaine idée *a priori* que l'on s'en fait, soit à ce qu'on nommera plus tard un certain modèle probabiliste ? Ce n'est pas la déception de l'observateur profane qui est d'abord notée – déception liée aux fortes fluctuations dans les petits échantillons, qui déjouent notre attente –, mais la stabilisation des fréquences lorsque s'accroît sensiblement le nombre de résultats. Sur un tableau de 10, 25, 50 , 75, 100, 250, 500, 750, 1000 données, « on constate que la fréquence de *rouge* tend à se

[44] Voir ainsi Chevalley (1995).

stabiliser autour dune valeur voisine de 0,5 ». Les fréquences observées dans les quatre séries sont respectivement 53,2 %, 49,8 % 47,6 %, 50 % après 500 résultats ; elles deviennent égales à 51,4 %, 49,5 %, 47,5 %, 49,3 % après 1000 résultats. On peut noter bien sûr que les fréquences sur 1000 résultats ne sont pas à tout coup plus proches de la « fréquence théorique » attendue (50 %) ! Et encore que, de manière plus évidente, sur de petits échantillons, ces fréquences s'éloignent sensiblement de la valeur théorique attendue. Ce n'est pas là-dessus pourtant que la leçon s'attarde. Par le biais de diagrammes bien choisis, l'auteure met d'abord en évidence l'apparente « convergence » des fréquences vers la valeur 0,5. Et c'est sur ce « constat » de stabilisation de la fréquence que la suite de la leçon repose.

La première difficulté, classiquement, est liée au fait que cette « loi » suppose des expériences indépendantes. Mais que signifie « indépendantes » ? La question est abordée à travers des exemples. Lancer deux fois un certain dé, tirer deux cartes avec remise dans un jeu bien battu, etc., relève de la catégorie des expériences indépendantes, laquelle permet alors de définir la notion d'*échantillon statistique* :

> Lorsqu'une série statistique est composée des *n* résultats d'expériences identiques et indépendantes, nous dirons que la série statistique constitue un échantillon statistique de taille *n*.

Une série de résultats n'est pas nécessairement un échantillon statistique – tirer successivement les lettres successives d'un texte, par exemple, ne répond pas *a priori* à la définition proposée, puisque l'apparition d'une certaine lettre dépend à l'évidence des lettres apparues précédemment. Dans l'initiation à la statistique que propose l'ouvrage que nous suivons, nous sommes là à un point tournant. Au-delà s'élève la théorisation probabiliste de l'activité statistique, vaste domaine auquel l'ouvrage consacre ses soixante-quinze dernières pages – nous reviendrons plus loin, en situation, à ces développements. Le décor de la réforme est planté.

6. Fluctuations d'échantillonnage et simulation en seconde

On a dit que le nouveau programme de statistique de la classe de seconde modifie sur quelques points le corpus ancien relatif à la *description* statistique. On a indiqué aussi que ce programme comporte deux secteurs d'études presque entièrement neufs dans l'enseignement secondaire français, comme l'annonce ce passage :

> En seconde le travail sera centré sur :
>
> – la réflexion conduisant au choix de résumés numériques d'une série statistique quantitative ;

– la notion de fluctuation d’échantillonnage vue ici sous l’aspect élémentaire de la variabilité de la distribution des fréquences ;

– la simulation à l’aide du générateur aléatoire d’une calculatrice. La simulation remplaçant l’expérimentation permet, avec une grande économie de moyens, d’observer des résultats associés à la réalisation d’un très grand nombre d’expériences. On verra ici la diversité des situations simulables à partir d’une liste de chiffres.

C’est par ces lignes que les professeurs curieux du nouveau programme pourront découvrir ce que le GTD de mathématiques propose de neuf : « fluctuation d’échantillonnage » et « simulation à l’aide d’un générateur aléatoire ». À ce programme d’enseignement inédit est appendu un petit nombre de prescriptions. L’enseignant, dit ainsi d’abord le texte du programme, « proposera des sujets d’étude ». Si le parcours du livre de Claudine Robert donne bien une idée de ce qu’on peut appeler ainsi, conjecturons que l’idée même d’« étude statistique » et, plus encore, d’étude statistique *motivée* (par une question non statistique qui la provoque), est alors à peu près absente de l’univers culturel et professionnel des enseignants concernés – dont on peut penser, au reste, qu’ils seront fort peu nombreux à ouvrir l’ouvrage que nous avons suivi plus haut [45]. Autre injonction : « L’enseignant traitera des données en nombre suffisant pour que cela justifie une étude statistique. » C’est faire là l’impasse sur une difficulté essentielle : la difficulté à se procurer des données, et plus encore à s’en procurer *à volonté*, qui soient en outre pertinentes pour étudier une question déterminée *à l’avance*, et non pas introduite après coup, de façon opportuniste, en fonction des données réellement disponibles. Malgré cela, le travail statistique appelé par le programme est présenté – implicitement – comme sous-déterminé, comme s’il y avait abondance de sujets d’étude statistique avec données à la clé, le professeur n’ayant qu’à choisir dans un ensemble si riche qu’il pourrait encore tenir compte, tout à la fois, de « l’intérêt des élèves » (c’est-à-dire de l’intérêt que manifestent les élèves), des questions que l’actualité met en lumière, et même des « goûts » qu’il aurait lui-même en la matière. De telles études statistiques – dont nous avons dit qu’il ne nous semble pas que les enseignants aient une vision bien nette – existent ici surtout par le soin qu’on semble mettre à leur prévoir une place. Ainsi le programme propose-t-il que chaque élève dispose d’un *cahier de statistique* où seront consignées lesdites études. Pédagogiquement, il y a là comme une anomalie : la tradition en vigueur abandonne en effet l’organisation des traces écrites à la liberté de l’enseignant, qui ne peut donc voir dans la suggestion faite (« l’élève pourra se faire un cahier de statistique… ») qu’un étrange empiètement sur son pré carré – et cela d’autant plus que ce cahier de statistique, autre novation dans l'univers un peu figé des lycées, devrait, lui dit-on encore, suivre l'élève en première et en terminale.

Selon une formule apparue au cours des décennies précédentes mais demeurée opaque au regard de nombreux professeurs, dont quelques-uns même peuvent y voir l'indice d'une volonté d'abaissement de leur mission, ce que le programme désigne comme *la* notion de fluctuation d'échantillonnage et de simulation « ne doit pas faire l'objet d'un cours ». « Faire un cours », sans doute, reste le premier réflexe didactique des professeurs d'aujourd'hui. Mais, en ce cas, ce que serait un « cours » sur ce que le programme amalgame en parlant, comme on l'a vu, de *la* notion de fluctuation d'échantillonnage et de simulation n'est pas chose obvie. La plupart des professeurs, en effet, n'ont eux-mêmes jamais rencontré un tel « cours ». C'est donc à cette chose qu'ils n'ont jamais rencontrée et dont ils n'ont, en cette étape inaugurale, qu'une idée fort imprécise qu'on leur demande de ne pas s'adonner. La formulation peut sembler malheureuse. Certes, elle se veut d'abord « pédagogique » : il s'agit d'inciter les professeurs à procéder par activités d'étude amenant chacune l'élaboration d'un certain « morceau » du savoir statistique, plutôt que, à l'inverse, d'opérer selon un modèle didactique épuisé, mais toujours prégnant, celui du « cours » suivi d'« exercices d'application ». Or, la formulation adoptée souligne, sans doute involontairement, que, en l'espèce, la matière même d'un cours fait défaut dans la culture professorale du moment. La suite des éléments de savoir instillés par le GTD permettra-t-elle d'y voir plus clair au fil des années de lycée ? La présentation des contenus du programme de seconde se trouve précédée d'un paragraphe sur ce qui est prévu pour les classes de première et terminale. Les « manques » que nous avons soulignés jusqu'ici y sont pointés : ainsi y annonce-t-on que sera menée dans ces classes une « réflexion sur le problème du recueil des données » – ce qui, *a contrario*, confirme l'occultation presque volontaire de l'une des conditions de possibilité essentielles d'un enseignement authentique de la statistique. La réflexion portera aussi, nous dit-on, sur « la notion de preuve statistique ». En même temps, un lien sera fait entre « statistique et probabilité ». Mais tout cela est encore à venir : à la rentrée 2000, nous n'y sommes pas encore.

Le programme *stricto sensu* n'est, en vérité, pas plus éclairant. Il fond en un unique secteur d'études simulation et fluctuation d'échantillonnage et demande que les élèves apprennent à « concevoir et mettre en œuvre des simulations simples à partir d'échantillons de

[45] D'autant que cet ouvrage est, à la rentrée 2000, devenu à peu près introuvable dans le commerce !

chiffres au hasard ». Le seul viatique théorique proposé aux professeurs en matière de simulation aléatoire se réduit à un commentaire que nous reproduisons ici :

> La touche « random » d'une calculatrice pourra être présentée comme une procédure qui, chaque fois qu'on l'actionne, fournit une liste de *n* chiffres (composant la partie décimale du nombre affiché). Si on appelle la procédure un très grand nombre de fois, la suite produite sera sans ordre ni périodicité et les fréquences des dix chiffres seront sensiblement égales.

Quant à l'organisation de l'étude, un autre commentaire en fournit le principe :

> Chaque élève produira des simulations de taille *n* (*n* allant de 10 à 100 suivant les cas) à partir de sa calculatrice ; ces simulations pourront être regroupées en une simulation ou plusieurs simulations de taille *N*, après avoir constaté la variabilité des résultats de chacune d'elles. L'enseignant pourra alors éventuellement donner les résultats de simulation de même taille *N* préparées à l'avance et obtenues à partir de simulations sur ordinateurs.

Dans la partie du document d'accompagnement du programme consacrée à l'enseignement de la statistique, on retrouve la mise en perspective déjà évoquée pour l'ensemble des classes de lycée, mais énoncée en un langage qui est alors largement étranger à la culture majoritaire des professeurs de mathématiques :

> Les choix, traduits en termes de programme pour la classe de seconde, sont guidés par les perspectives suivantes pour le lycée :
>
> – acquérir une expérience de l'aléatoire et ouvrir le champ du questionnement statistique ;
>
> – voir dans un cas simple ce qu'est un modèle probabiliste et aborder le calcul des probabilités.

La première « perspective » renvoie à un univers tout extérieur à la tradition de l'enseignement des mathématiques, dans lequel ne se sont véritablement acclimatés jusqu'à présent ni « l'expérience de l'aléatoire », ni « le champ du questionnement statistique ». La seconde perspective fait référence à la théorie des probabilités qui, elle, est plus familière aux professeurs – par le biais de leur formation initiale comme par leur expérience vécue de l'enseignement au lycée. Mais il s'agit moins ici de probabilités – notion appelée à rester à l'horizon de la classe de seconde – que du *modèle* probabiliste du travail statistique, réalité scientifique largement étrangère à la culture mathématique de l'enseignement secondaire.

Le document d'accompagnement est, bien entendu, beaucoup plus prolixe que le programme *stricto sensu* quant aux innovations prévues par le GTD. Le texte, cette fois, sépare clairement des commentaires portant, les uns sur la notion de fluctuation d'échantillonnage, les autres sur la notion de simulation. S'agissant de la première notion, le document examiné propose d'abord cette précision :

> Nous appellerons échantillon de taille *n* d'une expérience la série des résultats obtenus en réalisant *n* fois cette expérience ; on dira aussi qu'un échantillon est une liste de résultats de *n* expériences identiques et indépendantes…

Nous ne sommes pas loin, ici, de la définition avancée dans *L'empereur et la girafe*, à ceci près que la notion d'indépendance ne fait cette fois l'objet ni d'exemples ni de contre-exemples – sans doute imagine-t-on que les professeurs ont, sur cette notion, un minimum de culture probabiliste. À un échantillon statistique est associé une *distribution des fréquences*, qui, est-il précisé, est « le *vecteur* dont les composantes sont les fréquences des issues dans l'échantillon », mais dont, en même temps, il est prescrit aux professeurs de ne pas donner de définition générale et de se contenter de « la définir comme liste des fréquences dans chacune des situations que l'on traitera ». Tout un univers de pratiques et de conceptualisations doit ici s'exprimer en phrases sobres, lapidaires. Qu'appelle-t-on au juste fluctuation d'échantillonnage ? Le document d'accompagnement répond simplement : « Les distributions des fréquences varient d'un échantillon à l'autre d'une même expérience : c'est ce qu'on appellera en classe de seconde la fluctuation d'échantillonnage. » À travers des formulations qui se veulent économes de mots, les auteurs du document tentent de signifier que, d'une certaine façon, l'essentiel de l'initiation à la statistique se niche là, dans le phénomène de fluctuation d'échantillonnage : « L'esprit statistique naît, affirment-ils ainsi, lorsqu'on prend conscience de l'existence de fluctuations d'échantillonnage. » Le document trace alors, à propos de la question évoquée, les linéaments d'un programme fondamental :

> En seconde, l'élève constatera expérimentalement qu'entre deux échantillons, de même taille ou non, les distributions des fréquences fluctuent ; la moyenne étant la moyenne pondérée des composantes de la distribution des fréquences est, elle aussi, soumise à fluctuation d'échantillonnage ; il en est de même de la médiane.

Schéma dont l'acquisition est fondamentale, en effet, pour entrer dans l'esprit du questionnement statistique, mais qui suppose de donner dans l'enseignement souhaité toute leur place aux idées clés du travail statistique. La chose est en soi délicate, comme toujours en matière de transposition didactique. Mais elle doit en outre s'accomplir sous des contraintes largement conflictuelles avec la tradition de la classe de mathématiques : l'élève, on vient de le voir, devra, en seconde, se borner à « constater », et cela, encore, « expérimentalement ». Autant de gestes d'étude qui répugnent à l'épistémologie indurée dans la culture des professeurs de mathématiques, pour laquelle même le regard naturaliste naïf – qui permet par exemple de donner une place à l'observation « que l'ampleur des fluctuations des distributions de fréquences calculées sur des échantillons de taille *n* diminue lorsque *n* augmente » – demeure *a priori* illégitime. Les outils probabilistes qui permettraient de mathématiser les pratiques expérimentales et naturalistes poussées en avant par le GTD ne sont pas seulement méconnus du professeur. Leur emploi lui est presque totalement interdit par l'imposition de principe d'une didactique inductive que le programme formule ainsi : « Le choix pédagogique est ici d'aller de l'observation vers la conceptualisation et non d'introduire d'abord le langage probabiliste pour constater ensuite que tout se passe comme le prévoit cette théorie. »

Sans bagage probabiliste aucun, il s'agit donc de découvrir l'aléatoire. Les auteurs préconisent de le faire par le moyen d'« expériences familières » telles que le lancer de dés ou de pièces, et rappellent que c'est là l'origine d'un commerce avec l'aléatoire qui fut celui de l'honnête homme du XVII^e^ siècle grâce à sa familiarité avec les jeux de hasard. Mais il y a plus : le « bagage » d'expériences de référence de l'élève ainsi constitué s'enrichira évidemment de l'apport des calculatrices et ordinateurs qui permettent « la production aisée de listes de chiffres au hasard ». Le risque n'est pas nul, ici, d'un écrasement rapide de toute variabilité sur le pseudo-aléatoire des techniques de simulation, même si le document examiné met en garde contre ce risque en soulignant que « certaines expériences simples pourront être réalisées par une partie de la classe et simulées par le reste de la classe ». Il y a là, au vrai, un pari empiriste dont la réception par des professeurs de mathématiques ne saurait être facile. À propos de simulation, ce postulat est d'ailleurs franchement explicité : « il n'est pas nécessaire, dans un premier temps, affirme le document d'accompagnement, de lier les premiers pas vers la simulation de l'aléatoire à l'introduction de concepts théoriques difficiles tel celui de modèle. » L'ambition est estimable. La problématique didactique qui leur est associée n'est pas en elle-même à rejeter. Mais il y a là une pétition de principe dont l'acceptation par les enseignants ne va nullement de soi.

7. Encore deux leçons

Revenons à *L'empereur et la girafe* au point exactement où nous avions quitté cet ouvrage : leçon 7, *L'honnête homme et le géomètre*. Une partie de la leçon est consacrée à la notion de distribution de fréquences d'une série statistique et à la fluctuation d'échantillonnage – exactement le sujet que les textes officiels gouvernant la classe de seconde mettent en avant. Selon l'habitus propre aux mathématiciens d'aujourd'hui, la pensée de l'aléatoire à construire se constitue dans un dialogue serré avec un formalisme idoine. Soit ainsi, nous dit-on, un échantillon statistique « dont les composantes ne peuvent prendre qu'un nombre fini, *k*, de valeurs ». L'ensemble de ces valeurs est noté Ω. Un échantillon statistique est noté $\vec{\omega}$. L'auteure écrit :

> Numérotons de 1 à k les éléments de Ω. La distribution $D(\vec{\omega})$ des fréquences empiriques de $\vec{\omega}$ est l'ensemble des nombres $(f_1(\vec{\omega}), \ldots, f_k(\vec{\omega}))$, où $f_i(\vec{\omega})$ est la fréquence dans la série $\vec{\omega}$ de l'élément i de Ω. On a donc :
>
> $$D(\vec{\omega}) = (f_1(\vec{\omega}), \ldots, f_k(\vec{\omega}))$$
>
> où
>
> $$f_i(\vec{\omega}) \geq 0,\ i = 1, \ldots, k$$
>
> et, en notant la somme $f_1(\vec{\omega}) + \ldots + f_k(\vec{\omega})$ sous la forme $\sum f_i(\vec{\omega})$:
>
> $$\sum f_i(\vec{\omega}) = 1$$
>
> On peut aussi s'intéresser à la fréquence des termes dont la valeur est un élément d'un sous-ensemble A de Ω. Nous noterons $D(\vec{\omega}, A)$ cette fréquence et, dans le contexte de la statistique, un sous-ensemble A de Ω sera appelé un événement. La fréquence $D(\vec{\omega}, A)$ est la somme des fréquences des éléments de A. Par exemple, si on lance un dé, on a $k = 6$, $\Omega = \{ 1, \ldots, 6 \}$. On peut s'intéresser à la fréquence de l'événement A défini par « le résultat est divisible par 3 » et qui est l'ensemble $\{ 3, 6 \}$. On a alors $D(\vec{\omega}, A) = f_3(\vec{\omega}) + f_6(\vec{\omega})$. (Si on a un échantillon $\vec{\omega}$ de taille n, $\vec{\omega}$ est la liste des résultats observés lors de n lancers de dés.)

Lorsque l'ensemble Ω n'est pas ordonné, on se contentera de désigner par r son élément générique et par f_r la fréquence, dans l'échantillon $\vec{\omega}$, de l'élément r : la distribution $D(\vec{\omega})$ des fréquences empiriques est l'ensemble (non ordonné) des $f_r(\vec{\omega})$. La fréquence d'un événement A s'écrit alors : $D(\vec{\omega}, A) = \sum_{r\in A} f_r(\vec{\omega})$. Avec ces notations, l'auteure précise l'expression de la moyenne $m(\vec{\omega}) = \sum_{r\in\Omega} r f_r(\vec{\omega})$ et celle de la variance $s^2(\vec{\omega}) = \sum_{r\in\Omega} (r - m(\vec{\omega}))^2 f_r(\vec{\omega})$, quantités qui ne dépendent que de la distribution de fréquences et non, par exemple, de la taille de la série statistique.

Le formalisme proposé ici subira une révision sensible dans la version parue en 2003. Tout d'abord, l'ensemble Ω devient l'ensemble E, et il est supposé muni d'un ordre ; ses éléments, toujours au nombre de k, se notent maintenant $e_1, \ldots, e_k$. Une série statistique est notée $\boldsymbol{x}$: c'est une liste ordonnée d'éléments de E. La distribution de la série statistique $\boldsymbol{x}$ ne se note pas $D(\boldsymbol{x})$, mais D tout court. D, au demeurant, n'est plus un n-uplet mais une liste notée à la manière d'un ensemble : $\{ f_1, \ldots, f_k \}$. La fréquence d'un événement A est notée, non pas $D(\boldsymbol{x}, A)$, mais simplement f_A ; quant à son expression formelle en fonction des fréquences élémentaires, elle est maintenant omise. On écrira semblablement la moyenne $\bar{x}$ =

$\sum e_i f_i$, la variance $s^2 = \sum (e_i - \bar{x})^2 f_i$, etc. Tout ce travail d'allègement notationnel a sans doute été inspiré par le souci de proposer un formalisme transposable au lycée. À la rentrée 2000 les documents officiels ne proposent rien de tel. Le GTD a publié en juin 2000, il est vrai, onze fiches de statistique qui sont autant de petites études livrées aux professeurs en vue de nourrir l'élaboration de leur enseignement. L'une de ces études est intitulée *Le lièvre et la tortue* : on y voit apparaître la notation (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6) pour désigner une distribution de fréquences dans un lancer de dés. Mais ce travail spécifique, indispensable, ne fait pas l'objet d'une généralisation qui permettrait d'encadrer par un formalisme léger l'ensemble des travaux de statistique. Ce qui apparaît donc, c'est que les textes officiels instituent un filtrage des moyens ostensifs du travail statistique et, dans un souci évident de simplification, organise sans le vouloir une certaine *pénurie ostensive*, c'est-à-dire un déficit de mots, de tournures, de notations, de formalismes. C'est du moins là une des contraintes dont on peut conjecturer qu'elle va peser sur l'activité du professeur et des élèves, si on contraste les conditions dans lesquelles ceux-ci auront à opérer en statistique avec celles qui prévalent, classiquement, en matière de calcul différentiel par exemple.

La pénurie ostensive est en fait *un* aspect d'un manque plus important, revendiqué par le programme celui-là, mais dont la pesée, en classe, sur les pratiques et les pensées ne saurait pour autant être évacuée : celle des modèles probabilistes des situations statistiques étudiées. La leçon 7 que nous examinons n'a évoqué jusqu'ici que des objets « empiriques » – moyenne et variance d'une série statistique, distribution de fréquences, etc. Notons en ce point que la notion d'événement est introduite de manière informelle mais réelle : dans la leçon 7 de *L'empereur et la girafe*, on mentionne l'événement défini à l'occasion du lancer d'un dé par le fait que « le résultat est divisible par 3 », événement identifié à l'ensemble { 3, 6 }. Pour la classe de seconde, enfin, dans le style prudemment proscripteur mais quelque peu ambigu que les programmes de mathématiques ont adopté au cours des deux ou trois dernières décennies, le document d'accompagnement précise :

> On n'hésitera pas à parler de la fréquence d'un événement (« le nombre observé est pair », « le nombre est un multiple de trois », etc.) sans pour autant définir formellement ce qu'est un événement, ni donner de formules permettant le calcul automatique de la fréquence de la réunion ou de l'intersection de deux événements.

Mais au-delà de la notion d'événement surgit le problème de la modélisation probabiliste : à la diversité des échantillons possibles va correspondre la fixité d'une loi de probabilité ; ce que l'ouvrage que nous suivons souligne dans les termes suivants :

> Nous avons insisté sur la variation d'un échantillon à l'autre, de la distribution des fréquences ; nous en avons déduit la variation de la moyenne et de la variance ; nous avons dit que, expérimentalement, on constate que les fluctuations sont moindres d'un grand échantillon à l'autre que d'un petit échantillon à l'autre. Mais alors, qu'est-ce qui ne varie pas ? Pourquoi parle-t-on d'expériences identiques et comment en rendre compte ? Ce qui ne varie pas, c'est le modèle fait de ces expériences ; un tel modèle est une loi de probabilité sur l'ensemble Ω des issues possibles de l'expérience. Il nous faut donc maintenant définir ce qu'est une loi de probabilité…

Cela fait, pourtant, le travail n'est pas encore achevé : « Pour arriver à faire le lien entre distributions de fréquences et lois de probabilité, écrit l'auteure, nous devons d'abord définir le produit de lois de probabilité. » Dans le cas particulier qui nous intéresse, on part d'un ensemble Ω fini et d'une loi de probabilité P sur Ω, et on définit alors, sur l'ensemble produit Ω^n, une loi de probabilité que l'auteure note ici $P^{\otimes n}$. On peut alors définir la notion d'*échantillon d'une loi de probabilité* : « un élément de Ω^n tiré selon la loi $P^{\otimes n}$ est appelé un échantillon de taille n de la loi P. » C'est là ce qui fournit la mathématisation probabiliste de la notion d'échantillon statistique : « … un échantillon statistique est, au niveau de la modélisation, considéré comme un échantillon d'une loi P connue ou à déterminer. » Cette définition conduit à un énoncé du « théorème des grands nombres » : Ω étant l'ensemble des k premiers entiers, $\vec{\omega}$ « un échantillon d'une loi P sur Ω », on peut, en un langage « familier », énoncer qu'il est « très probable que pour n grand, en choisissant un élément $\vec{\omega}$ de Ω^n selon la loi $P^{\otimes n}$, les fréquences $f_i(\vec{\omega})$ soient très proches de p_i, $i = 1, \ldots, k$ ». Ce qui « se démontre rigoureusement dans le cadre de la théorie des probabilités ».

On voit ici se mettre en place la moitié probabiliste – « théorique » – de la statistique, sans laquelle l'appréhension de l'empirie statistique reste peu exploitable, dans la mesure où l'*inférence* statistique travaille toujours peu ou prou la *description* statistique. Un échantillon statistique, c'est ainsi une « série statistique à n éléments composée des résultats d'expériences identiques et indépendantes ». Or cet énoncé n'a de sens qu'en termes probabilistes : il suppose l'ensemble Ω des résultats des « expériences » en cause, ainsi qu'une loi de probabilité P sur Ω, que cette loi soit connue ou supposée. C'est en termes de couple (Ω, P) que l'on pense alors le recueil statistique aboutissant à la série considérée : celle-ci résulte, dans cette vision des choses, de n réalisations *identiques* de l'expérience, c'est-à-dire qu'elle est identifiée à la suite de n choix successifs dans Ω, la probabilité d'un résultat étant chaque fois déterminée par la loi P. Le fait que les n expériences soient, de plus, *indépendantes* s'exprime par le fait que l'échantillon statistique est regardé comme un élément de Ω^n choisi selon la loi $P^{\otimes n}$, c'est-à-dire comme un échantillon de taille n de la loi P. Le jeu lexical est serré : une *série* statistique ne suppose pour être pensée aucune notion de probabilité ; un *échantillon* statistique relève d'un concept profondément ancré dans la théorie probabiliste : dans le passage de la série à l'échantillon (statistiques), le Rubicon de la théorie des probabilités est franchi !

C'est en principe par rapport à une loi de probabilité que l'on peut parler de simulation. On ne simule pas une *série* statistique ; on ne simule pas, même, un *échantillon*. Mais on simule *la loi de probabilité P* par laquelle on pense pouvoir modéliser cet échantillon statistique, c'est-à-dire grâce à laquelle on pense pouvoir regarder la série statistique donnée comme un échantillon d'une certaine loi de probabilité. En bonne doctrine, donc, le fait de pratiquer la simulation en classe de seconde pose problème. Le document d'accompagnement du programme le reconnaît sans façon : « Formellement, y lit-on, simuler une expérience, c'est choisir un modèle de cette expérience puis simuler ce modèle. » Or la considération de modèles probabilistes d'expériences aléatoires est, on l'a noté, différée jusqu'à la classe de première. En seconde, donc, simuler n'est pas simuler une loi de probabilité : c'est simuler une expérience aléatoire, concept dont on suppose alors qu'il fait sens en lui-même, alors que dans la conceptualisation probabiliste classique, il est un intermédiaire utile mais éphémère entre le recueil statistique empirique et sa modélisation par une loi de probabilité. D'une façon toute opportuniste, le document cité déclare donc : « Dans le cadre du programme de seconde, simuler une expérience consistera à produire une liste de résultats que l'on pourra assimiler à un échantillon de cette expérience… »

Le pivot de la construction conceptuelle à faire recevoir des professeurs se situe ici, en conséquence, dans la notion d'expérience aléatoire. D'où une attention certaine aux conditions de construction de ce concept cardinal : on choisira ainsi, indique le même texte, de « simuler des situations très simples », subsumées sous des expériences aléatoires « où toutes les issues ont des chances égales d'apparaître ». Les probabilités sont donc bien présentes, de façon on ne peut plus discrète, il est vrai, masquées sous l'hypothèse d'équiprobabilité. On peut craindre à cet égard, notons-le en passant, que la non-disponibilité assumée d'une conceptualisation probabiliste pleine et entière [46] ne pousse en avant une élaboration conceptuelle de substitution appuyée sur l'idée culturelle d'égalité *a priori* des

[46] Le même document d'accompagnement précise à cet égard : « le langage des probabilités présenté en première S, ES et en option de première L, formalisera le langage naïf des *chances* et du *hasard* employé en seconde ; le calcul des probabilités permettra ensuite d'expliquer certains phénomènes observés. »

« chances » et faisant fond sur un postulat d'équiprobabilité dont on montrera plus loin qu'il constitue un obstacle redoutable à la reconnaissance de la *variabilité*. Lorsque, par exemple, le programme de seconde évoque la simulation, il lie étroitement cette notion à celle de fluctuation d'échantillonnage : simuler une expérience aléatoire – plutôt que la réaliser effectivement – permet d'obtenir à vil prix des échantillons multiples, de diverses tailles, et donc amène à constater concrètement et la fluctuation d'échantillonnage et la stabilisation des fréquences lorsque la taille de l'échantillon croît. Mais l'attention n'est pas alors attirée sur la variété des *distributions* de probabilités correspondant à la variété des distributions de fréquences empiriques « stabilisées » que peuvent présenter les phénomènes aléatoires qui nous entourent dans le monde naturel et social.

Dans *L'empereur et la girafe,* la leçon 8 – l'avant-dernière – s'intitule précisément C*hoisir au hasard*. Bien entendu, les éléments de théorie probabiliste utiles y sont mobilisés. L'auteure y précise d'emblée que, quand on parle de « choisir au hasard une carte dans un jeu classique de 52 cartes », on se réfère à un « modèle de l'expérience » qui, par définition, est « la loi de probabilité équirépartie sur l'ensemble Ω des 52 cartes ». Elle précise encore que choisir au hasard 10 nombres dans un ensemble Ω de nombres signifie que chacun des 10 choix « est fait dans Ω selon la loi de probabilité équirépartie » et que ces 10 choix sont indépendants, ce qui revient à dire, finalement, qu'on choisit au hasard un élément de Ω^{10}, soit encore que l'on choisit dans Ω^{10} un élément selon la loi équirépartie sur Ω^{10}. Car, pour résumer, « choisir n nombres au hasard, ou choisir au hasard un élément de Ω^n sont deux phrases dont le sens est le même ». Un des grands problèmes qui rendent les choses subtiles tient au fait que choisir au hasard – ou, plus généralement, choisir selon telle loi de probabilité – participe d'une supputation et ne peut pas se vérifier aisément. La notion de probabilité est ici à la fois conceptuellement indispensable et, dans les premiers pas qu'elle autorise à faire, instrumentalement déficiente. L'auteure écrit ainsi : « dire qu'on choisit des nombres au hasard dans { 1, … , 10 }, c'est bien parler d'une probabilité, et ce n'est pas dire que dans la série des résultats, les fréquences des dix nombres 1, …, 10 sont égales. » Plus loin, elle écrira :

> … il n'y a pas, pour un échantillon statistique donné $\vec{\omega}$, un modèle unique. Il existe plusieurs modèles « voisins », c'est-à-dire plusieurs lois telles que $\vec{\omega}$ puisse être considéré comme un échantillon de ces lois. Si l'on se réfère au tirage de boules, il existe donc plusieurs urnes, de compositions voisines, dans lesquelles on aurait pu tirer des boules et obtenir la série $\vec{\omega}$.

L'une des sections de la leçon 8 s'intitule « Pourquoi les statisticiens tirent-ils souvent des boules dans des urnes ? » Dans cette configuration emblématique qu'est l'urne, ses boules de couleurs différentes, les tirages qu'on peut y faire – de préférence avec remise – se trouvent les germes de toute la construction probabiliste élémentaire. Supposons ainsi une urne contenant k_1 boules rouges, k_2 boules noires, k_3 boules blanches. Posons $q_i = \frac{k_i}{k}$ où $i = 1, 2, 3$ et $k = k_1 + k_2 + k_3$. L'urne évoquée matérialise une loi de probabilité P' sur l'ensemble à trois éléments $\Omega' = \{$ *rouge*, *noir*, *blanc* $\}$ telle que P'(*rouge*) = q_1, P'(*noir*) = q_2, P'(*blanc*) = q_3. Formellement, la théorie des probabilités fait apparaître P' par le truchement d'une variable aléatoire X définie sur l'ensemble Ω des boules de l'urne et qui associe à une boule donnée sa couleur : P' n'est autre que la loi de probabilité P_X de la variable X. Pour tirer par exemple un échantillon de taille 20 de la loi P', on peut tirer dans l'urne, au hasard, c'est-à-dire selon la loi équirépartie sur l'ensemble Ω des boules de l'urne, 20 fois avec remise : la variable X, c'est-à-dire le relevé des couleurs des boules tirées fournira ainsi un échantillon de taille 20 de la loi non équirépartie P'. L'auteure conclut : « on remarquera que considérer la loi équirépartie sur Ω relève d'une hypothèse de modélisation, mais celle-ci étant faite, la loi de la variable X est obtenue par calcul, sans hypothèses supplémentaires. Autrement dit, dans le modèle $\{ \Omega, P \}$ où P est la loi équirépartie, la couleur de la boule tirée relève nécessairement du modèle $\{ \Omega', (q_1, q_2, q_3) \}$ », où le triplet (q_1, q_2, q_3) désigne la loi P'.

Ce qui précède fournit la clé de l'intérêt du statisticien pour les urnes. Supposons une expérience aléatoire quelconque modélisée par un ensemble Ω de k éléments et une loi de probabilité $Q = (q_1, \ldots, q_k)$. On peut regarder comme une expérience « semblable », c'est-à-dire qui relève du même modèle probabiliste $\{ \Omega, Q \}$, le tirage au hasard d'une boule dans une urne contenant des boules de k couleurs différentes 1, …, k, la proportion des boules de couleur i étant égale [47] à q_i. L'auteure conclut :

> Ainsi, la plupart du temps, étant donné une expérience aléatoire relevant d'un modèle $\{ \Omega, Q \}$, où Q est une loi de probabilité quelconque sur un ensemble Ω fini, on peut définir une expérience semblable basée sur l'observation d'une caractéristique (par exemple la couleur) d'une boule tirée au hasard dans une urne.

Il résulte de là – et du fait que « les expériences de tirages de boules dans des urnes sont simples à décrire » et « aisées à concevoir » – que ces expériences-là sont, à l'instar des tirages de cartes dans un jeu ou des lancers de dés et autres tirages à la roulette, regardées

[47] La chose est possible, en principe, dès lors que les réels q_i sont des rationnels.

comme des *expériences de référence*. Elles le sont conceptuellement, bien sûr, mais elles le sont aussi pratiquement, et elles permettent alors de « vérifier l'étonnante adéquation entre les calculs probabilistes et les résultats expérimentaux ».

Pour un grand nombre de lois de probabilité sur un ensemble fini, on peut donc concevoir une expérience de tirage dans une urne qui relève de cette loi (par le truchement d'une variable aléatoire qui est en général la couleur de la boule tirée). Peut-on dire alors qu'une telle expérience de référence, qui, par hypothèse, admet pour modèle la loi de probabilité considérée, est elle-même un *modèle* d'autres expériences aléatoires modélisables par la même loi ? En d'autres termes, peut-on dire que les expériences de référence dont on a parlé jouent le rôle de modèles d'expériences aléatoires que l'on peut vouloir étudier ? Sans doute pourrait-on accepter la chose dans le cadre de ce qui serait une statistique (purement) *expérimentale*. Mais il n'en va pas de même dans une perspective de mathématisation concrétisée par la création et le développement historique d'une statistique *mathématique*, ou plutôt d'une statistique *théorique* [48]. À la question posée, l'ouvrage que nous suivons répond donc sans ambiguïté par une petite leçon d'épistémologie :

> … l'analogie entre une expérience aléatoire et un tirage d'une boule dans une urne est éclairante, mais ne doit pas être confondue avec une modélisation. En statistique comme en physique ou en biologie, un modèle est un objet mathématique (ici un couple $\{ \Omega, Q \}$) et non une expérience.

Cette position épistémologique est peut-être trop rigide, et l'on pourrait la retoucher en disant, en forme de lapalissade, que, « en statistique comme en physique et en biologie, un modèle *mathématique* est un objet mathématique (…) et non une expérience ». Un modèle est d'une manière générale un système que l'on peut mettre en relation d'une manière déterminée avec un autre système, dont il est regardé, à certains égards, comme un modèle. Lorsque le système modélisant est un système mathématique, on parle de modèle mathématique du système – qui, lui-même, peut être mathématique ou non. En seconde, dans la mesure où le formalisme probabiliste n'est pas encore disponible, on peut très bien regarder une urne comme un

[48] À propos de la statistique, on peut reprendre, *mutatis mutandis*, la distinction classique que Jean-Marc Lévy-Leblond formule ainsi à propos de la physique : « La physique théorique dégage et applique des lois ; elle crée et met en œuvre les concepts physiques sous la contrainte de la physique expérimentale et en interaction étroite avec celle-ci. Elle comporte différents niveaux, qui peuvent aller de l'interprétation de tel résultat expérimental spécialisé à l'aide des lois physiques connues jusqu'à la recherche de lois fondamentales nouvelles. Elle est mathématique dans la mesure où les mathématiques jouent un rôle constitutif […]. On désigne en général sous le nom de physique mathématique une activité beaucoup plus spécialisée, que l'on pourrait décrire comme une tâche de refonte et d'épuration de la physique théorique. » (Lévy-Leblond, 1982, pp. 203-204).

modèle d'un certain système, éventuellement extramathématique. Une telle urne est-elle un objet mathématique ? Elle ne l'est pas plus, *mais ne l'est pas moins* que la règle et le compas de la géométrie élémentaire [49]. De l'urne comme du compas et de la règle tels qu'on s'y réfère, voire qu'on les manipule dans la classe de mathématique, on pourrait dire qu'ils sont des objets *quasi mathématisés*, dont la mathématisation plus complète est, précisément, l'un des objectifs de la formation donnée au cours des études secondaires (et au-delà). Supposons un examen oral où le choix du sujet sur lequel un candidat est interrogé se fasse ainsi : le candidat choisit au hasard deux sujets parmi les 52 proposés ; puis, sans prendre connaissance des sujets ainsi choisis, le jury choisit l'un d'eux au hasard. Parmi les 52 sujets, 8 relèvent d'une matière A, 20 d'une matière B et 24 d'une matière C. Ces effectifs étant proportionnels à 2, 5 et 6, on se demande si, le jury ayant examiné un nombre de candidats voisin de 2000, la distribution des sujets « sortis » sera approximativement proportionnelle à 2, 5 et 6. Ici, l'urne modèle est évidente ; mais la simulation à l'aide de cette urne – c'est-à-dire la mise en fonctionnement de cette urne modèle – en vue de répondre à la question posée serait évidemment très coûteuse. On peut alors modéliser l'urne modèle à l'aide d'un mécanisme de tirage aléatoire facile à définir – même si l'on ne dispose pas des notions de théorie probabiliste qui permettraient de dire qu'il s'agit de simuler à l'aide d'un générateur de nombres pseudo-aléatoires la loi de probabilité P sur l'ensemble $\Omega = \{ A, B, C \}$ telle que $P(A) = \frac{2}{13}$, $P(B) = \frac{5}{13}$, $P(C) = \frac{6}{13}$. Le concept manquant de cette loi de probabilité est en quelque sorte matérialisé – réifié – dans l'urne évoquée, et il se trouvera « opérationnalisé » par la simulation que l'on en fera.

Mais revenons à la leçon 8. Sa dernière section, intitulée *Tables de chiffres au hasard*, contient deux études de simulation. La première a trait à la question suivante : soit un pays où tout couple suit strictement l'injonction d'avoir des enfants jusqu'à obtenir un garçon, après quoi les naissances doivent s'interrompre définitivement. L'application de cette consigne conduit-elle à un déséquilibre entre effectifs des deux sexes dans la société en question ? Notons d'abord que l'injonction proposée contient une difficulté : le premier garçon peut n'apparaître qu'au bout d'un nombre irréaliste de naissances. On modifie donc la règle en

[49] Le compas et la règle « mathématiques » ne sont pas assimilables au compas et à la règle matériels, que l'on trouvent dans le commerce : le compas mathématique est ainsi supposé permettre de tracer des cercles de rayon quelconque (non borné), et la règle, de même, est censée avoir un bord « infini dans les deux sens », et en outre n'avoir *qu'un bord*, qui plus est *sans marque aucune* (jointe au compas, une règle portant *deux* marques permet en effet de réaliser la trisection des angles, ce que la règle et le compas seuls ne permettent pas).

supposant que tous les couples s'arrêtent au premier garçon si celui-ci paraît dans les quatre premières naissances, et s'arrête après la quatrième naissance sinon. Avec des symboles évidents, un couple sera caractérisé par l'une des cinq suites ci-après : *g* ; *f*, *g* ; *f*, *f*, *g* ; *f*, *f*, *f*, *g* ; *f*, *f*, *f*, *f*. L'urne qui permettrait de modéliser cette situation serait, en l'espèce, une pièce de monnaie, qu'on lance une fois, deux fois, trois fois, ou quatre fois selon le cas. Mais au lieu de *réaliser* cette expérience aléatoire de lancers d'une pièce, on peut se proposer de *simuler* l'expérience pour en observer le résultat. C'est là que la notion de « table de chiffres au hasard » est introduite :

> Une table de chiffres au hasard est un ensemble de *n* chiffres tels que si on les numérote de 1 à *n*, par exemple dans l'ordre où on les lit sur la table (ligne par ligne et de gauche à droite), alors la série $\vec{\omega}$ obtenue peut être considérée comme un échantillon de la loi équirépartie sur l'ensemble des 10 chiffres arabes 0, 1, 2, …, 9.

Bien entendu, la définition pose problème : comment savoir si une suite de *n* chiffres « peut être considérée etc. » ? Sans répondre véritablement, la suite du texte enchaîne des commentaires sur quelques aspects classiques de la question abordée. Tout d'abord, il est souligné que la liste de mille chiffres « au hasard » placée en annexe de cette leçon 8 n'a pas d'origine expérimentale : elle résulte d'un calcul déterministe qui ne fournit qu'une suite « pseudo-aléatoire » de chiffres, la liste fournie étant obtenue en recommençant indéfiniment le même calcul (dont rien n'est dit au lecteur). Ensuite, l'auteure fait une remarque sur les opérations de modélisation (d'un échantillon statistique par une loi de probabilité) et de simulation, opération inverse qui fait passer d'une loi de probabilité à un échantillon de cette loi : « une table de chiffres au hasard, note-t-elle ainsi, est […] une simulation de la loi équirépartie sur l'ensemble des chiffres ». Une autre remarque porte sur le fait qu'une table de chiffres au hasard peut se lire dans un ordre quelconque, ou en ne lisant qu'un chiffre sur deux ou sur trois, ou par tranches de deux, ou de trois (ce qui, en ces cas, fournit une simulation de la loi équirépartie sur les entiers de 0 à 99 ou de 0 à 999), etc. De la même façon, si on ne retient que les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, la table fournit un échantillon de la loi équirépartie sur cet ensemble de chiffres. Enfin se trouve évoqué le problème de simuler des lois non équiréparties à partir de l'exemple de la loi $P = \{ 0{,}26 ; 0{,}18 ; 0{,}56 \}$ sur $\Omega = \{ r_1, r_2, r_3 \}$.

On revient alors au problème posé. En supposant qu'une naissance se ramène à un tirage au hasard entre une naissance masculine et une naissance féminine, on simule ce tirage au hasard en identifiant, dans la table de chiffres au hasard, l'occurrence d'un chiffre pair à la naissance d'une fille, celle d'un chiffre impair à la naissance d'un garçon. Les premiers chiffres dans la table proposée sont 7, 0, 5, 3, 1, 5, 8, 5, 9, 5, 7, 2, ce qui donne : *g, f, g, g, g, g, f, g, g, g, g, f*. Du point de vue de la simulation des naissances, cette suite peut se lire ainsi : une première famille a un garçon (7) dès la première naissance ; une deuxième famille commence par avoir une fille (0) mais a un garçon (5) à la deuxième naissance ; ensuite se trouvent trois familles qui ont chacune un garçon dès la première naissance (3, 1, 5) ; une sixième famille a d'abord une fille (8) puis un garçon (5), etc. En exploitant ainsi complètement la table proposée, l'auteure aboutit à la conclusion que l'on aura, avec l'échantillon en question, 486 naissances de garçons et 512 de filles. En fait, dans la mesure où la table est un échantillon de la loi équirépartie sur les chiffres de 0 à 9, le codage réalisé fournit un échantillon de la loi équirépartie sur l'ensemble $\{ f, g \}$, et il devient dès lors évident que la politique nataliste envisagée *n'influera pas* sur les proportions d'hommes et de femmes dans la société concernée. Cela constaté, la leçon fait ensuite envisager une autre situation, en supposant que les naissances successives ne sont pas indépendantes, en cela que le n-ième enfant a, pour $n \geq 2$, une probabilité $\tau = 0{,}8$ d'être du même sexe que le précédent. On passe donc ici à un autre modèle probabiliste. Sans doute pourrait-on le matérialiser – le « modéliser » – par un système d'urnes, par exemple au moyen de trois urnes dont la première contiendrait en proportion égale des boules bleues et des boules rouges, la deuxième contenant 80 % de boules bleues et 20 % de boules rouges, et la troisième ayant 20 % de rouges et 80 % de bleues, avec une règle de tirage (avec remise) évidente. L'auteure va en fait directement de la formulation de type probabiliste à une simulation à l'aide de la table de chiffres au hasard proposée et écrit :

> Pour faire une simulation de la répartition des sexes dans ce modèle, en supposant maintenant que la politique nataliste considérée est appliquée, on peut faire ainsi :
> – Pour un premier enfant, un nombre pair est associé à une fille ;
> – Pour le n-ième enfant, $n > 1$, un chiffre dans $\{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$ signifie que l'enfant est du même sexe que le précédent.

Cette procédure est, certes, plus subtile que le système des trois urnes évoqué plus haut : traduite en termes d'urne, elle revient à supposer une urne contenant des proportions égales de boules marquées des chiffres de 0 à 9, le premier tirage codant une naissance féminine si le chiffre est pair, masculine sinon, tandis que le n-ième tirage code une naissance du même sexe que la $(n–1)$-ième naissance si le chiffre tiré est l'un des huit premiers et une naissance du sexe opposé si le chiffre tiré est 8 ou 9. Quant on utilise la liste de chiffres au hasard proposée dans la leçon (7, 0, 5, 3, 1, 5, 8, 5, 9, 5, …), on voit apparaître ainsi une famille ayant d'emblée un garçon (7), puis une famille à quatre filles (0, 5, 3, 1), suivie d'une famille avec un garçon (5) à laquelle succède une famille qui a d'abord deux filles (8, 5) avant d'avoir un garçon (9), etc. L'auteure invite les lecteurs à faire la simulation par eux-mêmes, non sans indiquer que le calcul des probabilités fournit un pourcentage théorique de filles de 66 %. En ce cas, note-t-elle, « la politique nataliste a pour effet d'augmenter le pourcentage de filles dans la population. »

La leçon n'est pas terminée ; mais une conclusion est posée qui entretient, par transposition didactique, un rapport évident avec la situation des classes de seconde, où l'on ne peut utiliser la théorie des probabilités pour formaliser les expériences aléatoires étudiées : « La simulation d'un modèle, lit-on en effet, est le plus souvent utilisée lorsque les statisticiens qui étudient ce modèle n'arrivent pas à obtenir le résultat cherché par le calcul (soit qu'ils ne savent pas, soit que cela prendrait trop de temps). » Les circonstances évoquées ici sont alors illustrées par une dernière étude, intitulée *Les chèvres et la voiture*. L'objet en est un certain jeu télévisé présenté ainsi :

> Il y a quelques années, une chaîne de télévision américaine a proposé le jeu suivant : sur le plateau de télévision, il y a un écran où figurent trois portes. Derrière ces portes, il y a des boxes dont le contenu est invisible. Dans un des boxes se trouve une voiture, et dans les deux autres se trouvent des chèvres. Le candidat doit désigner une des portes. Ceci étant fait, le présentateur désigne au candidat une des deux autres portes en lui disant qu'elle cache une chèvre. Le candidat a alors une deuxième chance : il peut confirmer son choix initial, ou choisir la porte que ni lui ni le présentateur n'ont désignée. La porte qu'il choisira sera alors ouverte, et il devra ensuite partir avec ce qu'elle cachait.

La question proposée est alors la suivante : en supposant que l'on puisse jouer de nombreuses fois, on souhaite apprécier l'efficacité de certaines stratégies possibles, par exemple celle où le premier choix est fait au hasard entre les trois portes et où le candidat change de porte au second choix (c'est-à-dire désigne celle des deux portes restantes que le présentateur ne lui a pas désignée comme dissimulant une chèvre). L'auteure précise à l'aide d'un tableau un premier modèle du jeu. Ce modèle tabulaire comporte quatre colonnes, la première précisant la porte gagnante (derrière laquelle se trouve la voiture), la deuxième la porte choisie d'abord par le candidat, la troisième étant celle désignée par le présentateur comme indiquant une chèvre. La quatrième colonne indique ce que le candidat gagne, voiture ou chèvre. Si l'on désigne les portes par A, B et C, on aura par exemple les lignes ci-après.

porte gagnante	porte choisie au départ	porte désignée par le présentateur	ce que le candidat gagne
C	*B*	*A*	Voiture

A	*A*	*B* ou *C*	Chèvre
B	*C*	*A*	Voiture
B	*C*	*A*	Voiture
⋮	⋮	⋮	⋮

Ce qui importe, c'est de voir que, la stratégie étant fixée comme nous l'avons indiqué, le gain est entièrement déterminé par les deux premières colonnes. Ou bien en effet leur contenu est différent (par exemple, *B* et *C*) et l'animateur sera obligé de désigner la troisième porte (ici, *A*) en sorte que le candidat choisira la porte qui n'a été désignée ni par lui (*C*), ni par le présentateur (*A*) – il choisira donc *B*, porte gagnante ! Ou bien le candidat a désigné d'emblée la porte gagnante ; mais, comme il va changer de porte, il choisira finalement une porte perdante ! Conclusion : si on tire au hasard deux fois parmi trois possibilités et que ces deux tirages sont différents, le candidat gagne ; s'ils sont identiques, le candidat perd. La simulation à l'aide d'une liste de chiffres au hasard s'ensuit : on code avec 1, 2, 3 la porte *A*, 4, 5, 6 la porte *B* et 7, 8, 9 la porte *C* ; une suite de deux chiffres donne tout un jeu. Si l'on reprend la liste déjà utilisée (7, 0, 5, 3, 1, 5, 8, 5, 9, 5, …) on a d'abord une partie gagnante (7, 5), ensuite une partie perdante (3, 1), puis deux autres parties gagnantes (5, 8 et 5, 9), etc. Dans *L'empereur et la girafe*, le lecteur est invité à procéder lui-même aux simulations utiles. Dans les *Contes et décomptes de la statistique*, paru en 2003, un additif a été apporté à la leçon 8. Le lecteur y est informé que la mise en œuvre de la stratégie précédente permet de gagner « environ deux fois sur trois », qu'on peut le démontrer et qu'on peut aussi l'expliquer – d'une manière qui, sans fournir une démonstration, gagne en force de conviction auprès de quiconque « a effectivement simulé l'expérience ».

8. Onze fiches et une leçon

La place de la simulation dans le programme de seconde est fortement marquée dans ce que les auteurs de ce programme ont appelé des « thèmes d'étude » – que nous appellerons nous-mêmes *thèmes d'études libres*, en les désignant en outre par le sigle TEL. S'agissant de la statistique, les TEL proposés [50] sont uniformément exprimés en termes de simulation :

[50] Une ambiguïté demeure à ce propos dans les textes officiels. D'une part, le programme indique que l'enseignant « a toute liberté pour choisir les thèmes au-delà » de la liste des thèmes proposés. D'autre part, le document d'accompagnement, publié et vraisemblablement rédigé ultérieurement, indique : « Pour chacun des chapitres (statistique, calcul et fonctions, géométrie), l'enseignant doit choisir un ou plusieurs thèmes dans la liste proposée par le programme. »

simulations d’un sondage, simulations de jeux de pile ou face, simulations du lancer de deux dés identiques et distribution de la somme des faces, simulations de promenades aléatoires sur des solides ou des lignes polygonales, simulations de naissances. Ce dernier TEL correspond à l’étude statistique de la leçon 8 de *L’empereur et la girafe*, puisque le libellé du programme énonce simplement : « distribution du nombre d’enfants par famille d’au plus quatre enfants lorsqu’on s’arrête au premier garçon, en admettant que pour chaque naissance, il y a autant de chances que ce soit un garçon ou une fille. » Pour aider les professeurs, le GTD de mathématiques publie en octobre 2000 au CNDP des propositions d’activité sous la forme de onze « fiches ». L’une d’elle est intitulée « Politique nataliste » : elle reprend dans une forme adaptée certaines des considérations de la leçon 8, mais évidemment sans référence probabiliste aucune. Les quatre autres TEL sont semblablement traités dans l’ensemble de ces fiches. La première fiche fait travailler sur la notion de chiffres au hasard tels que les fournit la touche *random* d’une calculatrice – qui permet à chacun de se fabriquer sa propre table de chiffres au hasard. Ce dispositif et ce matériel sont alors utilisés pour simuler des lancers de pièces ou de dés, par codage des chiffres au hasard obtenus. Chose importante, le texte introduit la notion d’*urne à chiffres*, c’est-à-dire d’urne contenant en quantités égales des boules marquées 0, 1, 2, …, 9, manière de penser en termes d’urnes des listes de chiffres au hasard et leur utilisation. « Pour simuler des lancers d’un dé équilibré, indique ainsi cette première fiche, on pourra retirer de l’urne les boules marquées 0, 7, 8, 9. S’il est impossible de tirer ces boules on fera des tirages avec remise sans tenir compte des boules 0, 7, 8, 9. » La touche *random* de la calculatrice permet elle-même de simuler une telle urne à chiffres, en même temps que l’urne à chiffres permet de penser – c’est-à-dire de modéliser – les suites de chiffres affichés en pressant la touche *random* : tout se passe comme si cette touche effectuait des tirages successifs de *k* chiffres dans une urne à chiffres, *k* étant le nombre de chiffres après la virgule affichés par la calculatrice (du moins lorsque ceux-ci ne valent pas 0 : il convient « de toujours compléter l’écriture par des 0 jusqu’à avoir *k* chiffres après la virgule »). La suite de la fiche montre divers usages des chiffres affichés. Ainsi de la simulation des naissances dans une famille de quatre enfants en supposant que le sexe d’un enfant ne dépend pas du sexe des enfants précédents de la famille. C’est là l’occasion de présenter différents codages utilisant les chiffres affichés, l’un associant aux chiffres pairs la naissance d’une fille, l’autre associant une telle naissance aux chiffres de 0 à 4. Une liste substantielle d’exercices est proposée qui permet au lecteur d’exercer sa dextérité dans la construction d’algorithmes simples de simulation. Dans deux d’entre eux, les auteurs ont appendu ce commentaire qui montre bien la valeur transitionnelle et transactionnelle de la notion d’urne à chiffres : « Les élèves pour qui le résultat n'est pas intuitif pourront se reporter mentalement au tirage dans une urne à chiffres. »

La deuxième fiche, intitulée *De plus en plus de lancers d'un dé*, présente au lecteur le phénomène de fluctuation d'échantillonnage pour des échantillons de lancers d'un dé équilibré, les graphiques montrant la réduction de cette fluctuation quand *n* passe de 10 à 100, de 100 à 1000, de 1000 à 10 000. Une étude analogue est présentée pour un dé truqué : le même phénomène de diminution de la fluctuation d'échantillonnage est observé quand on passe d'échantillons de taille 10 à des échantillons de taille 100, à ceci près que, cette fois, ce qui apparaît comme étant une distribution limite possible n'est plus la distribution uniforme. La troisième fiche est intitulée *Le lièvre et la tortue*. Il s'agit d'étudier un jeu prenant la forme d'une course – entre un lièvre et une tortue – réglée comme suit : un dé ayant été lancé, si le 6 sort, le lièvre atteint directement l'arrivée et gagne ; si le 6 ne sort pas, la tortue avance d'une étape – elle en a six à parcourir ainsi pour gagner la course, à moins que le lièvre n'ait atteint le but avant elle ! Si les lancers successifs du dé donnent par exemple 1, 4, 3, 2, 5, 6, la tortue atteint presque au but quand le lièvre lui souffle la victoire. La question à étudier est la suivante : « Quelle est la situation la plus enviable : celle du lièvre ou celle de la tortue ? » La fiche illustre l'une des recommandations que prodigue le document d'accompagnement. Tout d'abord on y suppose que dix élèves, chacun muni d'un dé, ont réalisé effectivement dix parties en comptant le nombre de victoires du lièvre : sur ces dix parties, en l'espèce, les dix élèves ont vu le lièvre gagner en moyenne 6,1 fois sur 10 (le minimum est de 4 victoires, le maximum de 8). Sur les données ainsi rendues disponibles, des fréquences sont calculées : l'événement « le lièvre a gagné » a, par exemple, une fréquence égale à 0,61. L'étude est amplifiée au cas d'une suite de jeu de 1000 parties, mais cette fois on procède par simulation : sur dix suites de 1000 parties, le lièvre a gagné 6701 fois. Bien entendu le nombre de parties gagnées pour chaque suite de 1000 parties fluctue (entre 656 et 683), mais il fluctue moins que dans les suites de 10 parties. Sur les 10 000 parties « observées », le lièvre gagne dans environ 67 % des cas. Les auteurs de la fiche soulèvent la question de la possibilité d'expliquer ce pourcentage et, pour cela, évoquent la théorie des probabilités, laquelle, indiquent-ils, montre que la « chance théorique » du lièvre est égale à $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6$, « soit à peu près 0,665 ». La suite de l'étude soulève encore la question de la durée moyenne d'une partie (mesurée en nombre de lancers d'un dé). Les auteurs font observer qu'« on n'a pas recueilli les durées des parties » et qu'on ne dispose donc pas des fréquences concernant la durée. D'où cette morale à l'adresse des statisticiens en herbe : « en statistique, on a toujours intérêt à réfléchir à tout ce qui peut être intéressant avant de faire des expériences, pour ne pas risquer d'avoir à tout recommencer. » En réexaminant les données disponibles, on s'aperçoit tout de même qu'il est possible de calculer la durée moyenne des 100 parties réalisées par les élèves ou des 10 000 parties simulées : on obtient respectivement 4,14 et 3,958. À nouveau le texte examiné évoque la valeur théorique μ de cette moyenne et fournit même la formule qui en permet le calcul : $\mu = \sum_{i=1}^{i=5} i \times \frac{5^{i-1}}{6^i} + 6 \times \frac{5^5}{6^5} \approx 3{,}99$. La fiche se termine par l'observation qu'on peut modifier les paramètres du jeu, par exemple en augmentant le nombre d'étapes que la tortue doit atteindre pour arriver au but, etc.

La quatrième fiche a pour titre *Des chances inégales*. L'argument en est un peu différent de ceux déjà rencontrés : on lance deux pièces équilibrées et on compte le nombre de piles, égal à 0, 1 ou 2. Sur 300 réalisations de l'expérience, la fréquence correspondant à la non-apparition de pile est trouvée égale à 0,24, celle de l'apparition d'un pile à 0,51, celle de deux piles à 0,25. Il semble que l'on table ici sur l'étonnement des élèves devant cette inégalité, puisque l'on pourrait s'attendre à une distribution *uniforme* des fréquences sur l'ensemble { 0, 1, 2 }. Il y a là une motivation pour aller plus loin et passer, comme dans la situation précédente, d'une réalisation effective à une simulation. La fiche offre des résultats pour 3000 puis pour 300 000 expériences simulées : les fréquences obtenues confirment le fait que les fréquences tendent à être proportionnelles à 1, 2, 1. À nouveau le problème de l'explication théorique est soulevé, sans pour autant que, cette fois, des résultats soient mentionnés. En revanche, on évoque des variations possibles, par exemple l'étude de la distribution des fréquences du nombre de piles lorsque trois pièces équilibrées sont lancées, le jeu avec les pièces étant présenté ensuite comme un modèle permettant d'étudier la distribution des fréquences du nombre de filles dans les familles de n enfants sous des hypothèses simplificatrices déjà évoquées.

La cinquième fiche a déjà été mentionnée : elle a trait à certaine « Politique nataliste ». La sixième fiche est intitulée simplement *Faites vos jeux*. Le problème proposé est le suivant : on suppose un joueur qui aurait observé, sur une série de 100 jeux à la roulette, l'apparition six fois consécutivement d'une même couleur, *rouge* ou *noir* ; doit-il s'étonner, voire s'inquiéter, d'une si longue série monocolore ? L'événement dont l'apparition surprend est le fait que la longueur maximale m de résultats d'une même couleur est supérieure ou égale à 6. La simulation va, là encore, permettre d'éclairer l'interrogation posée : sur 2000 simulations de 100 résultats, 82 % des séries observées réalisent cet événement, lequel n'est donc nullement exceptionnel ! Ici, précisent les auteurs, on peut montrer que la probabilité théorique est voisine de 0,8. La technologie probabiliste nécessaire est celle des chaînes de Markov, dont la fiche présente l'emploi dans ce cas – cela sous une rubrique adressée évidemment aux professeurs et clairement intitulée *Aperçu théorique*. On y établit que la probabilité d'observer au moins six coups consécutifs égaux lors de r lancers d'une pièce équilibrée vaut 0,094 lorsque $r = 10$ mais passe à 0,544 pour $r = 50$, atteint 0,807 lorsque $r = 100$ et 0,994 lorsque $r = 300$. L'étude mathématique présentée fait apparaître par contraste l'intérêt des simulations lorsque les moyens mathématiques idoines sont hors de portée, même s'il est vrai qu'on n'atteint jamais, par simulation, que des cas particuliers – que seule une étude théorique permet de dépasser. La septième étude a pour titre *Jeu de pile ou face*. Une somme s est misée par le joueur, puis une pièce est lancée ; si pile sort, le joueur gagne $2s$; si face sort, le joueur perd sa mise. Un joueur dispose d'une somme de 1000 F ; il hésite entre deux stratégies (qui comportent l'une et l'autre une condition d'arrêt). L'étude a pour objet de comparer ces stratégies, et cela selon un critère qui n'est pas *a priori* précisé : maximisation du gain moyen ou de la durée du jeu (pour les joueurs impénitents), etc. La proposition est, ici, nous semble-t-il, moins heureuse que les précédentes. Les simulations nécessaires ne sont guère explicitées et le travail évoqué tend à être dominé par une structure mathématique plus complexe (dont l'outil essentiel, les suites géométriques, n'apparaît qu'au programme de première), ce qui masque quelque peu les ressorts du travail statistique, et conduit même les auteurs à commettre des erreurs de calcul qui rendent la lecture hésitante [51]. La huitième fiche s'intitule *Promenades aléatoires*. La notion de promenade aléatoire – en anglais *random walk* – est *a priori* tout à fait inconnue dans la culture mathématique du secondaire français. Son introduction dans la liste des TEL constitue donc un geste inédit, au contenu complètement neuf, que le texte du programme présente ainsi :

---

[51] Trois erreurs se sont glissées dans le tableau relatif à la deuxième stratégie. Tout d'abord, le total des mises au 6e coup est donné égal à 384 au lieu de 364 (= 121 + 243) : il peut s'agir là d'une simple erreur de calcul ou de report. Ensuite, au 7e coup, ce total est affiché comme valant 972 alors qu'il vaut 364 + 729 = 1093 : 972 est sans doute obtenu (par erreur) en additionnant les mises à la 6e et à la 7e parties (243 + 729 = 972). Au lieu d'additionner la valeur inscrite dans la 3e ligne à propos de la 6e partie (7e colonne du tableau) avec celle de la 1re ligne, 7e partie, les auteurs de la fiche ont additionné le résultat de la première ligne, 6e partie (résultat qui, de plus, est faux, comme on l'a vu) et celui de la 7e partie (colonnes 7 et 8 du tableau). Cette deuxième erreur a pour conséquence que les auteurs des fiches considèrent, à tort, qu'une septième partie est « jouable », puisqu'ils trouvent un total engagé inférieur à la somme disponible (qui est de 1000 F). Enfin, la troisième erreur est sans doute une erreur de calcul : le bénéfice total affiché est faux même avec la valeur (erronée) du total engagé trouvée à l'issue de la 7e partie : 1458 – 972 = 486 ≠ 586. Sans cette erreur, il est vrai, le résultat affiché eût été faux tout de même, à cause des erreurs précédentes.

Simulations de promenades aléatoires sur des solides ou des lignes polygonales, fluctuation du temps et estimation du temps moyen mis pour traverser un cube ou pour aller d'un sommet donné à un autre sommet donné d'une ligne polygonale.

La huitième fiche, qui explicite ce thème, présente le cas d'une promenade sur les sommets d'un tétraèdre : toutes les secondes on déplace un pion d'un sommet vers l'un des trois autres ; on s'interroge sur le temps moyen pour revenir pour la première fois au point de départ de la promenade en supposant qu'on choisit chaque fois au hasard celui des trois sommets vers lequel le déplacement aura lieu, la promenade s'arrêtant automatiquement au bout d'une minute. L'étude du problème proposé est illustrée d'abord par l'exemple d'une promenade en cinq pas (« en cinq coups »). L'attention est ici donnée au codage des arêtes, c'est-à-dire à la mise en relation entre le nombre que fait apparaître le lancer d'un dé et le choix de l'arête sur laquelle se déplacer. L'étude de tels codages est ébauchée, mais n'est pas développée ; le principe de réalisation (ou de simulation) ayant ainsi été évoqué, la fiche propose un tableau donnant les résultats de 30 « jeux », chaque jeu étant fait de 20 promenades aléatoires, chacune de 60 pas en principe. Pour chaque promenade on observe le temps de premier retour : ce temps, dans l'ensemble considéré, n'excède pas 19 secondes. En réalité sur l'ensemble des promenades observées, il est en moyenne bien inférieur à 19 secondes : la médiane est de 3 secondes, la moyenne arithmétique de moins de 4 secondes. C'est ainsi que, pour les 20 premières promenades observées, le temps de premier retour est de 2 secondes dans deux cas, 3 secondes dans cinq cas, 4 secondes dans six cas, etc. Sur les 600 promenades observées, 433 repassent au point de départ avant le cinquième pas. Le travail suggéré sur le tableau proposé ne manque pas de pertinence mais est, en conformité avec le programme, des plus modestes. Ainsi demande-t-on de reconnaître parmi quatre colonnes donnant respectivement le minimum, le maximum, la moyenne et la médiane des temps de retour pour chacun des trente jeux de 20 promenades, celle de ces colonnes qui affiche le maximum. De même, le lecteur est-il invité à dire ce que représente la dernière ligne du tableau, qui totalise les colonnes pour ce qui est des différents temps de retour observés et traite de manière idoine les quatre autres colonnes (minimum des minimums, maximum des maximums, etc.) que l'on vient d'évoquer. La même fiche se poursuit par un aperçu théorique à l'adresse du professeur. Les auteurs changent ici subtilement de définition : alors que dans ce qui précède, une promenade était toujours de 60 pas et qu'on étudiait le temps de premier retour au point de départ, ici une promenade s'arrête dès qu'on est revenu au point de départ ou que le soixantième pas a été accompli. Avec cette convention, on peut dire ceci : si on note A le sommet de départ et B, C, D les autres sommets, l’événement « le temps de premier retour est de k secondes » (où $k = 2, \ldots, 59$) se produit si et seulement si, au deuxième pas, au troisième pas, au (k–1)-ième pas, on reste dans l’ensemble des sommets { B, C, D }, ce qui se produit avec une probabilité égale à $\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}$, et si, au k-ième pas, on revient en A, événement de probabilité $\frac{1}{3}$. La probabilité de cet événement est donc $p_k = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \times \frac{1}{3}$. Par ailleurs la probabilité que la promenade ne s’achève qu’au soixantième pas survient soit si, dans la formule précédente, on a $k = 60$, soit si le soixantième tirage fait demeurer dans l’ensemble { B, C, D }. La probabilité que la promenade dure 60 pas est donc $p_{60} = \left(\frac{2}{3}\right)^{60-2} \times \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^{60-2} \times \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{58}$. La probabilité que la promenade se termine *sans repasser* par le sommet de départ est extrêmement faible puisque elle vaut $\left(\frac{2}{3}\right)^{59}$, soit environ $4{,}08 \times 10^{-11}$. Malgré cela, il n’est pas certain qu’il y ait, au cours des 60 premiers pas, un retour au point de départ. De là la modification subreptice de la définition de la promenade étudiée, qui permet de substituer au temps moyen de premier retour (non toujours défini) le temps moyen de durée de la promenade, dont la valeur est ici $\mu = \sum_{k=2}^{59} k \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \times \frac{1}{3} + 60 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{58}$, ce qui est peu différent de 4.

Dans une deuxième partie, la fiche présente l’étude d’une promenade aléatoire sur un carré. Cette fois, c’est un promeneur qui est censé se déplacer d’un sommet à l’autre d’un terrain carré en partant du coin sud-ouest et en se soumettant à la règle suivante : se trouvant en un sommet, et un tirage ayant été effectué au hasard parmi les chiffres de 0 à 9, si le chiffre tiré est pair le promeneur va vers le sommet le plus proche en tournant dans le sens trigonométrique ; si le chiffre tiré est impair il tourne au contraire dans le sens des aiguilles d’une montre. On suppose que le trajet d’un sommet à un sommet voisin prend une minute et on limite la promenade à 60 minutes. Appelant jeu un ensemble de 20 promenades, on simule 30 jeux. Le temps de premier retour observé n’excède jamais 18 minutes sur les 600 promenades simulées. Là encore un tableau est proposé, de même structure que celui relatif aux promenades sur un tétraèdre, et des questions de même facture sont proposées (« la légende de ce tableau s’est perdue, etc. »). Le problème est ici légèrement différent de celui étudié dans le cas du tétraèdre. Désignons par SO le point de départ puis NO, NE et enfin SE les autres sommets quand on parcourt le carré dans le sens des aiguilles d’une montre (par exemple). On voit aisément que le nombre mesurant le temps de premier retour est pair, la probabilité que ce nombre soit égal à $2k$ étant $p_{2k} = \left(\frac{1}{3}\right)^{k}$. Des calculs analogues, notamment celui de la moyenne théorique de la durée de la promenade, sont présentés dans un *Aperçu théorique* qui fait suite au tableau obtenu par simulation : celui-ci donnait pour moyenne empirique sur 600 promenades une durée de 4,1 minutes, quand la moyenne théorique est de 4 minutes.

Tel est, *grosso modo*, le viatique en matière de promenades aléatoires qu'apporte aux professeurs la fiche proposée sur un sujet jusque-là inconnu des professeurs. Il est suggestif, à cet égard, de rapprocher ce thème de celui de la neuvième fiche, que ses auteurs ont intitulée simplement *Sondages*. Le contenu de cette fiche répond, en principe, au TEL que le programme suggère sous le libellé suivant :

> Simulations d'un sondage ; à l'issue de nombreuses simulations, pour des échantillons de taille variable, on pourra introduire la notion de fourchette de sondage, sans justification théorique. La notion de niveau de confiance 0,95 de la fourchette peut être introduite en terme de « chances » (il y a 95 chances sur 100 pour que la fourchette contienne la proportion que l'on cherche à estimer) ; on pourra utiliser les formules des fourchettes aux niveaux 0,95, 0,90 et 0,99 pour une proportion observée voisine de 0,5 afin de voir qu'on perd en précision ce qu'on gagne en niveau de confiance. On incitera les élèves à connaître l'approximation usuelle de la fourchette au niveau de confiance 0,95, issue d'un sondage sur n individus ($n > 30$) dans le cas où la proportion observée $\hat{p}$ est comprise entre 0,3 et 0,7, à savoir : $\left[\hat{p} - \frac{1}{\sqrt{n}} ; \hat{p} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

Comme dans les cas précédents, la fiche présente tout d'abord des résultats de simulations, puis un aperçu théorique destiné aux professeurs. Les sondages envisagés se rapportent à la proportion p de boules numérotées 1 dans un urne contenant aussi des boules numérotées 0 : la question est de savoir quelle information peuvent apporter, à propos de la proportion p, n tirages avec remise. Une première partie de l'étude consiste à supposer la valeur p connue, pour examiner ce qui se passe alors : la simulation est dans ce cas un bon moyen d'étude qui permet de fournir des résultats obtenus sur 50 sondages de taille n, pour n = 10, 100 et 1000. En l'espèce, la valeur de p adoptée est 0,5. Un tableau fournit moyenne, médiane, écart interquartile, minimum, maximum, étendue, écart type, la fiche signalant que l'intervalle interquartile et l'écart type ne seront introduits qu'en première et précisant que les simulations réalisées pourront être réutilisées dans cette classe [52]. Semblablement, la fiche montre des diagrammes en boîte, lesquels ne sont pas au programme de seconde mais à celui de première. Une représentation graphique sous forme de croix (pour les sondages de taille 10), de ronds

[52] Rappelons qu'il est prévu de conserver et d'utiliser en première puis en terminale le cahier de statistique où tous les travaux sont consignés.

(pour les sondages de taille 100) et de signes + (pour les sondages de taille 1000) fait apparaître le resserrement des moyennes observées autour de la valeur « théorique » $p = 0{,}5$. Les mêmes observations sont reprises pour les valeurs $p = 0{,}8$ et $p = 0{,}3$ avec, là encore, une double représentation graphique, qui permet au passage d'illustrer l'efficacité informative des diagrammes en boîte. Enfin, pour $p = 0{,}5$ à nouveau, 1000 sondages de taille 100 ont été simulés. En l'espèce, la moyenne est de 0,499, l'écart type de 0,05, le minimum et le maximum ayant respectivement pour valeur 0,32 et 0,65. L'observation des 1000 points représentatifs montre leur concentration autour de la droite $y = 0{,}5$ et permet, par des comptages un peu incertains mais encore réalistes, de déterminer le pourcentage des sondages, parmi les 1000 simulés, donnant une proportion comprise entre 0,4 et 0,6, puis entre 0,45 et 0,55. Cette observation est alors formalisée par l'affirmation, présentée comme issue de la théorie des probabilités, selon laquelle « si on fait un grand nombre de sondages de taille n, environ 95 % d'entre eux vérifient : $f \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ », assertion qui est alors contrôlée grâce aux dénombrements précédemment effectués.

On passe ensuite au cas où p est inconnu – ce qui est bien sûr le problème à étudier. Une clé première de l'affaire est de voir que sont équivalentes les deux propositions « f est dans l'intervalle $[p - \delta\,;\, p + \delta]$ » et « p est dans l'intervalle $[f - \delta\,;\, f + \delta]$ ». La formule donnée précédemment permet alors de dire que « si on fait un grand nombre de sondages de taille n, environ 95 % d'entre eux vérifient : $p \in \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ ». L'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est appelé « fourchette de sondage au niveau 0,95 ». La fiche précise encore qu'on dit aussi que « f estime p avec une précision de $\frac{1}{\sqrt{n}}$ au niveau de confiance 0,95 ». L'exposé, ici, s'opacifie quelque peu, nécessairement : il repose en effet sur des concepts qui, dans le cadre où la fiche se place, ne sont pas pleinement élaborés ni réellement disponibles. Deux représentations graphiques complètent, il est vrai, l'exposé. La première donne à voir des « fourchettes » au niveau 0,95 à propos de 20 sondages de taille 100 : une seule des fourchettes sur les 20 ne contient pas la valeur théorique p recherchée (et conduirait donc à une estimation erronée). La seconde présente, de même, 1000 fourchettes correspondant à des échantillons de taille 100 : 965 d'entre elles contiennent la valeur théorique p, tandis que les 35 autres ne la contiennent pas. L'objet graphique exhibé ici est un rien déconcertant : les 35 fourchettes « erronées » sont représentées par autant de traits rouges qui frappent l'œil, alors que les 965 autres (qui contiennent p) se fondent dans une masse continue qui ne parle pas immédiatement. Ici, la représentation graphique a, pour le profane, besoin du secours du dénombrement numérique effectif : en ce cas, 3,5 % des fourchettes ne contiennent pas la proportion théorique, ce qui est plus faible que les 5 % correspondant à une fourchette sur 20 du graphique précédent ! L'aperçu théorique qui suit cette présentation est évidemment plus lourdement chargé en contenus mathématiques : l'objectif est de « produire » le résultat utilisé, sans justification, pour aboutir à une fourchette à partir des simulations réalisées. La formule indiquée apparaît ici comme procédant d'approximations successives qui aboutissent en fin de parcours à une expression très dépouillée, valable seulement lorsqu'on choisit le niveau de confiance 0,95. Les indications données s'étendent toutefois au niveau de confiance 0,90 ou au niveau 0,99, voire à des niveaux quelconques, moyennant alors la disponibilité d'une tabulation de la loi normale centrée réduite.

Sur le thème des sondages, *L'empereur et la girafe* apportait, bien sûr, des informations davantage détaillées. Sa leçon 9, intitulée *La marmite du statisticien*, sous-titrée « Intervalle de dispersion, test, fourchette de sondage, intervalle de confiance », s'ouvre ainsi par l'étude de la courbe de Gauss. Le lecteur y apprend notamment que, si on note $\psi(a)$ l'aire de la surface comprise entre la courbe de Gauss, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -a$ et $x = +a$ (où $a \geq 0$), alors on a $\psi(1{,}64) \approx 0{,}90$, $\psi(1{,}96) \approx 0{,}95$, $\psi(2{,}57) \approx 0{,}99$. Considérons alors un échantillon $\vec{\omega}$ d'une loi de probabilité $P = (1-p, p)$ sur l'ensemble $\Omega = \{ 0, 1 \}$. La moyenne de P est p et il est quasi immédiat que l'écart type est $\sigma = \sqrt{p(1-p)}$. Si on désigne par f_1 la proportion des composantes dont la valeur est 1, on peut démontrer (ce que l'auteure ne fait pas dans ce cadre) que l'on a : $P^{\otimes n}\left(p - \frac{a\sigma}{\sqrt{n}} \leq f_1 \leq p + \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}\right) \approx \psi(a)$. Cette approximation, dont la précision n'est pas indiquée, est simplement présentée comme « suffisante » dès lors que la taille n de l'échantillon est supérieure à 30 en même temps que p et $1-p$, ne sont pas trop petits et, plus précisément, sont supérieurs à $\frac{5}{n}$. Dans le cas où on prend $a = 1{,}96$, la probabilité pour que la proportion observée f_1 soit comprise entre $p - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ et $p + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ est d'environ 0,95. L'intervalle $I_{(a)} = \left[p - \psi^{-1}(a)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\, p + \psi^{-1}(a)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ est l'intervalle de dispersion de f_1 au niveau a. Lorsqu'on lance 100 fois une pièce équilibrée, la probabilité est ainsi de 0,95 que la fréquence des piles appartienne à l'intervalle [0,40 ; 0,60]. Pour 10 000 lancers de la même pièce, cet intervalle se resserre autour de 0,5 : la probabilité est de 0,95 que la fréquence des piles appartienne à l'intervalle [0,49 ;0,51]. Une remarque souligne ce qui, de prime abord, peut ressembler à un paradoxe mais qu'un instant de réflexion fait apparaître comme tout à fait intuitif : bien que les fréquences f_1 se concentrent autour de p, et ceci de manière de plus en plus accentuée lorsque n croît, la probabilité pour qu'une telle fréquence f_1 soit *exactement* égale à p tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. On montre, précise l'auteure, que, pour un échantillon de taille $2n$, avec $n > 30$, on a, lorsque p = 0,5, $P^{\otimes n}(f_1 = 0{,}5) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$. Cette remarque n'est pas qu'une curiosité : le profane en matière statistique peut être tenté de sur-valoriser les échantillons de taille 4 (par exemple) dans lesquels se trouvent deux piles et deux faces, en oubliant les échantillons de même taille constitués, par exemple, de quatre piles, ou d'un pile et de trois faces, etc., et se montrer en conséquence déçu, quand il simule des échantillons de taille 400 (par exemple), de ne pas voir apparaître d'échantillons dans lesquels figurent *exactement* 200 piles et 200 faces. La fin de la section examinée évoque d'autres niveaux de confiance possibles et introduit la notation d'un niveau sous la forme $1-\alpha$, en précisant que, usuellement, on prend $\alpha < 0{,}1$. Pour une valeur p fixée, et pour un certain choix du seuil α (le mot de seuil n'est pas prononcé dans ce contexte), on déduit d'une manière évidente de la formule donnée que « plus n est grand, plus l'intervalle de dispersion $I_{1-\alpha}$ est petit ». Si p et n sont fixés, de même, on voit aisément, à partir de la considération de la fonction ψ, que « plus α est petit, plus l'intervalle de dispersion $I_{1-\alpha}$ est grand ». Au seuil $\alpha = 0$, bien sûr, on a $I_1 = [0\ ;\ 1]$.

La suite de la leçon est formée d'études successives annoncées dans les leçons précédentes : roulette de casino (leçon 8), comptine des pâquerettes (leçon 4), fréquences des voyelles (leçon 2). Toutes ces études particulières ont trait à des tests d'hypothèse par la technique du χ^2 : nous n'en dirons rien de plus ici. La dernière section de la leçon est intitulée *Proportion et probabilité* et nous fait retrouver la question des sondages. On y reprend des éléments déjà vus en y introduisant l'intervalle à un niveau de confiance donné pour une proportion inconnue p. Pour le niveau 0,95, par exemple, on peut prendre pour fourchette le sur-intervalle $F_{0,95} = \left[f_1 - 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ f_1 + 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$. L'écart type $\sigma = \sqrt{p(1-p)}$ étant par hypothèse inconnu, on pourrait le remplacer par l'écart type de l'échantillon observé ; mais on peut noter que, lorsque $p \in [0, 1]$ on a $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ et donc $\sigma \leq \frac{1}{2}$; on peut donc se rabattre sur un nouveau sur-intervalle, obtenu en majorant 2σ par 1 : $F'_{0,95} = \left[f_1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f_1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$. Ainsi, lorsque $n = 1000$, si on a observé la fréquence $f_1 = 0{,}61$, la proportion p qu'on cherche à estimer a une probabilité au moins égale à 0,95 de tomber dans la fourchette $F'_{0,95} = \left[0{,}61 - \frac{1}{\sqrt{1000}}\ ;\ 0{,}61 + \frac{1}{\sqrt{1000}}\right]$, c'est-à-dire d'être comprise entre (environ) 0,58 et 0,64. Les cas où les conditions de validité des procédures précédentes ne sont pas satisfaites (par exemple parce que n est petit ou parce que f_1 ou $1 - f_1$ est nettement inférieur à $\frac{5}{n}$) font l'objet d'une remarque rapide. Les sondages proposés dans les médias reçoivent une attention un peu plus grande (que la fiche du GTD commentée ci-dessus ne leur accordait pas) : l'auteure indique ainsi que, si le résultat d'un sondage « se présente normalement » comme une fourchette de valeurs possibles pour la proportion p à estimer à un certain niveau de confiance, les médias ne donnent, en règle générale, que le centre de la fourchette, ou, plus exactement, une valeur arrondie de f_1, ainsi que la taille de l'échantillon (parce que la loi l'exige). L'information donnée laisse ainsi « chacun libre de se choisir un niveau de confiance et d'en déduire la fourchette ». Les développements consacrés aux tests, que nous n'avons pas commentés ici, permettent alors d'ébaucher une comparaison entre sondage et test, présentés ensemble comme actualisant « deux aspects complémentaires de la modélisation » :

> Avec les intervalles de confiance, on cherche tous les modèles compatibles à un niveau $(1-\alpha)$ avec les données, et plus la taille de l'échantillon sera grande, plus l'éventail des modèles compatibles sera restreint. Avec les tests, on cherche à savoir si un modèle particulier, auquel on pensait à l'avance, ou qui est spécialement simple, est compatible avec les données, au niveau $(1-\alpha)$.

Nous refermerons sur ces lignes l'ouvrage dans lequel s'était cristallisé nombre de thèmes essentiels de la réforme de l'enseignement de la statistique au lycée [53]. Des onze fiches rédigées par le GTD de mathématiques, deux manquent encore à notre rapide inventaire, toutes deux brèves, occupant moins d'une page. La première a trait à la linéarité de la moyenne, phénomène mathématique dont elle illustre l'exploitation dans le traitement de données. La seconde, intitulée *Un cube moyen ?*, explicite le fait que si une série (x_i) de valeurs numériques a une moyenne m et si f est une fonction *non* linéaire, alors la série $(f(x_i))$ n'a pas, sauf exception, pour moyenne $f(m)$. Autant d'aspects élémentaires parmi d'autres qu'il va échoir aux professeurs de mathématiques d'enseigner.

[53] L'ouvrage paru avant la réforme, toutefois, ne contenait rien sur les promenades aléatoires. Ce thème semble avoir été un ajout tardif, suscité par la volonté d'offrir aux professeurs une matière aisément compréhensible, et productrice de situations variées appelant autant de simulations relativement simples.

Chapitre 3

La réception de la réforme

1. L'APMEP et la réforme : le choc initial

La noosphère de l'enseignement des mathématiques est, comme toute noosphère [1], composite, sans véritable cohésion d'ensemble, animée de mouvements divers où des collectifs plus ou moins intégrés tentent d'acquérir une influence, voire un véritable *leadership*. Pour ce qui est des mathématiques, toutefois, un collectif ancien existe qui a conquis au fil des décennies une visibilité certaine : l'APMEP, l'association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public fondée en 1910. Cette association est un interlocuteur incontournable de toute instance ministérielle qui prétend influer sur l'enseignement des mathématiques au collège ou au lycée, voire « de la maternelle à l'université ». C'est ainsi qu'un communiqué de presse du ministère de l'Éducation nationale daté du 14 janvier 1999, qui annonce la nomination des présidents des groupes techniques disciplinaires (GTD), et en particulier celle de Claudine Robert à la présidence du GTD de mathématiques, précise [2] :

> Le ministre, répondant à une demande de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, de la Société Mathématique de France et de celle de Mathématiques Appliquées et Industrielles, a demandé au CNP de mettre en place un groupe de travail qui préparera l'enseignement des mathématiques du XXI^e^ siècle.

---

[1] Par *noosphère* – la sphère « où l'on pense » –, on désigne l'ensemble des institutions qui entourent l'École sans en faire partie *stricto sensu* et qui se vouent à « réfléchir » sur l'École, à critiquer, suggérer, impulser, entraver les changements qui l'affectent ou pourraient l'affecter. D'une manière générale, la noosphère d'une institution donnée – ici cette partie de l'École qu'est l'enseignement des mathématiques au secondaire – est indispensable à la vie de l'institution.

[2] Reproduit dans le *Bulletin à Grande Vitesse*, n° 85 (mars 1999), page 8. Le CNP est le conseil national des programmes.

Le travail du GTD de mathématiques occupe les premiers mois de l'année 1999. Un projet de programme pour la classe de seconde, daté des 10 et 11 mai 1999, est reçu à l'APMEP le 21 mai, le GTD demandant à cette association de réagir avant qu'il se réunisse les 28 et 29 mai ! Les délais sont très courts : un texte de synthèse est élaboré par l'APMEP et transmis le jeudi 27 mai au GTD de mathématiques. Ce texte sera également examiné lors du séminaire de l'APMEP tenu les 29 et 30 mai. Il paraît dans le numéro 87 de son *Bulletin à Grande Vitesse* en juin 1999 – où il est au reste présenté comme un texte du… 28 mai [3]. On y prend acte de ce que le projet comporte trois grands volets : *statistique*, *géométrie*, et ce qui s'appelle alors *calcul numérique, calcul algébrique, fonctions*. On y dit apprécier aussi la présence de rappels relatifs aux programmes du collège, et on regrette en conséquence que de tels rappels n'aient pas été prévus en ce qui concerne la statistique – preuve, s'il en était besoin, d'une élaboration exogène par rapport aux programmes antérieurs de la partie du programme de seconde relative à la statistique. La pierre d'achoppement essentielle, cependant, est la question du temps effectivement alloué à l'enseignement des mathématiques. Après une critique enflammée de ce qui ne s'appelle pas encore « thèmes d'étude » – que nous avons nommé TEL dans le chapitre précédent – mais que l'on désigne alors sous le nom générique d'« activités », le texte de synthèse soulève la question cardinale : devant un programme jugé pléthorique, étant donné le temps d'enseignement alloué, il faut se résigner à revoir le programme proposé pour en faire diminuer la masse. L'entreprise est raisonnable mais soulève alors une autre question : que doit-on enlever ? La note de synthèse passe en revue, dans l'ordre, les trois grands domaines du programme. C'est – sans surprise – sur la statistique que les auteurs ont le plus à dire – et à médire. D'emblée la rhétorique du « Oui, mais non… », déjà utilisée à propos des « activités » notamment, est mobilisée. Le développement sur la statistique commence par des lignes qui, au demeurant, proposent une variante du « Oui, mais non… », le « Non, même si c'est vrai que oui… » :

> Étant donné que les futurs S n'en feront plus (et seront sans doute aptes à s'y mettre…) et que de toute façon les ES en refont en 1re, certains ne voyaient guère l'intérêt d'en faire vu qu'actuellement c'est la plupart du temps bâclé en fin d'année si c'est fait… Mais nous sommes gênés de demander qu'on supprime les stats alors qu'on revendique des maths citoyennes…

Sur le fond, les choses sont plus claires qu'il n'y paraît : les bons sentiments ne sauraient cacher que la statistique – que l'APMEP s'obstinera à appeler « *les* statistique*s* », voire « les

[3] D'après le site Internet de l'APMEP (http://www.apmep.asso.fr/BGV87sec.html#Texte), la plume responsable du texte paru dans le *BGV* n° 87, pp. 9-12, serait celle de Jean-Pierre Richeton.

stats », comme ici – est désignée comme une matière sans noblesse, que l'on « bâcle » en fin d'année sans que cela soulève de vraie réprobation, et à laquelle les meilleurs élèves scientifiques du lycée sont supposés pouvoir « se mettre » quand ils en auront besoin, s'ils en ont un jour besoin, sans avoir besoin d'une initiation précoce.

Les rédacteurs de la note de synthèse prolongent ce point de départ en forme de non-recevoir en mettant en avant l'avis émis par un membre – dont le nom n'est pas cité – d'un groupe de recherche intitulé « Probabilités et statistiques en Europe », tel que le consignerait un document daté du 4 mai 1998 adressé à divers responsables de l'enseignement des mathématiques (doyen de l'inspection générale, etc.). Notons que la statistique est le seul domaine où les rédacteurs de la note de synthèse, au lieu de parler en première personne, reprennent à leur compte un discours exogène dont l'auteur est laissé dans l'anonymat. Que dit donc cet « expert » dont on met en avant les analyses ? Ou du moins que retient-on de ses préconisations ? Tout d'abord, on le sollicite à propos du sort fait, dans le projet de programme de seconde, à la notion de *dispersion* d'une série statistique. Selon une opinion qui deviendra un temps commune [4], l'auteur du texte cité énonce que l'étendue est un indicateur sans intérêt, et va jusqu'à affirmer que « tous les statisticiens sont d'accord pour dire qu'il ne correspond à rien ». Quant à lui, il préconise en seconde (au cas où on se refuserait à introduire l'écart type) que l'on familiarise les élèves avec l'écart moyen à la médiane ou avec l'écart interquartile. D'autant, ajoute-t-il, que les quartiles se calculent facilement, à la main comme avec une calculatrice « bas de gamme », et ouvrent la voie à l'emploi des diagrammes en boîte. Sur ce dernier point, les rédacteurs de la note ajoutent ceci :

> En ce qui concerne les diverses représentations graphiques vues au collège il faudrait clairement les citer et du coup vous verrez que la boîte à moustaches dont il est question ci-dessus en fait partie…

L'affirmation peut sembler bien hasardeuse lorsqu'on examine les contenus des programmes d'enseignement du collège. La deuxième cible de l'assaut est une notion qui, précise la note examinée, a été ajoutée entre la première et la deuxième version du projet de programme de seconde : la « fourchette de sondage ». L'irritation manifestée est d'autant plus significative de l'animosité générale à l'endroit de cette partie du programme qu'elle concerne, ici, un des TEL proposés, et non une partie incontournable du programme. Cette fois, l'auteur anonyme est cité beaucoup plus longuement. Contre les « experts du GTD », l'APMEP fait ainsi donner

[4] Mais que Claudine Robert s'efforcera de réfuter dans un article publié dans le numéro de novembre-décembre 1999 du *Bulletin* de l'APMEP : voir notre chapitre 2.

ses propres experts et pilonne sans façon cette infime partie du programme de statistique, en un passage que nous reprenons ci-après *in extenso* pour en faire entendre tout le mordant :

> Je suis atterré quand je vois qu'on va faire apprendre « par cœur », sans surtout chercher à comprendre quelque chose, la « formule de la fourchette » pour l'estimation d'une proportion obtenue par échantillonnage [au passage, tout le monde aura compris qu'il est évident que l'échantillon doit être tiré de façon aléatoire dans la population, et pourquoi on a imposé $n > 30$ et $0{,}3 < \hat{p} < 0{,}7$… le fameux $n \times p > 10$ sans lequel l'approximation par la loi normale n'est plus valable car il y a un problème de limite caché derrière !], alors qu'on aurait pu leur faire faire un petit peu de maths en calculant un écart moyen (avec un tableur ou une calculette actuelle, pas de problème) ou un intervalle interquartile… notions auxquelles on pouvait au moins donner du sens !

Le débat semble ici se fourvoyer. Sans doute l'auteur cité a-t-il une tendresse particulière pour les indicateurs de dispersion. On voit mal pourtant en quoi, dans l'épistémologie professorale de l'époque, la boîte noire qu'est une calculette vaudrait mieux que la boîte noire fournie par une formule, au demeurant simple, dont la mise en œuvre est encore perçue comme un petit geste mathématique, et que l'on peut contrôler, ainsi qu'on l'a vu, par des simulations appropriées.

Mais le texte de synthèse ne s'en tient pas à la critique précédente : ses auteurs y mobilisent alors un autre avis, celui d'un professeur qui « enseigne les probas-stats inférentielles à des BTS biotechnologies et qui a une seconde (…) depuis des années ». Cette fois, la charge est étendue à un autre thème qui, lui, est au cœur même du programme de statistique : la fluctuation d'échantillonnage. Contre cette innovation curriculaire, le second anonyme cité ne recule pas devant des imputations d'ignorance dont l'excès même est significatif d'une irritation mal contenue, puisqu'il lance :

> … jusqu'à présent, avec les BTS, j'en restais à des propos vagues, intuitifs ; l'auteur du texte programmatique peut-il concéder à la masse ignorante de lui ouvrir les yeux sur des TD ou TP crédibles (ça dure 1,5 h au cas où il ne le saurait pas) permettant de faire observer expérimentalement cette fluctuation ?

Hormis le procès d'intention, l'argumentaire est pauvrement développé. Le même praticien, pourtant, est appelé à dire son mot à propos des sondages, il indique :

> … qu'est-ce qu'un sondage ? Qu'est-ce qu'une fourchette au coefficient de confiance de 95 % ? Tous les enseignants savent ça ? Mes collègues et moi, on a mis quelques temps à apprendre à perfectionner notre explication aux étudiants ; tous les profs de seconde vont comprendre facilement une notion marginale dans le programme (en BTS biotechnologies, c'est essentiel à l'examen !) ? Là encore, une référence bibliographique ça ne peut pas faire de mal !

La conclusion de la note de synthèse suit, typique d'une rhétorique visant à diaboliser le nouveau et l'autre :

> **En clair** : le dernier ajout ne nous paraît pas raisonnable en 2[de] et nous préférons pouvoir faire davantage réfléchir nos élèves. Par exemple, mettre ou suggérer des exercices de lectures de données, genre articles de journaux (cela permettra de travailler sur fractions, pourcentages etc.)…

La déraison du GTD qui porterait à des activités décérébrées est opposée ici sans vergogne au souci des membres de l'association de « faire davantage réfléchir nos élèves ». Implicitement mais clairement le projet de programme est présenté comme une arme de guerre contre les élèves ! Par contraste, la sagesse autoproclamée des rédacteurs de l'APMEP les conduit à proposer des types de tâches qui, pour eux, sont apparentés au travail statistique – telle la lecture de données contenues dans des articles de journaux – et qui, faute de paraître intéressants en eux-mêmes aux professeurs de mathématiques que réunit l'association, leur permettraient de faire ce qui, à leurs yeux, possède une légitimité forte – travailler sur les fractions et sur les pourcentages par exemple. En d'autres termes, en matière d'enseignement de la statistique, il s'agit de faire reculer le nouveau et le différent au profit de l'ancien et du même.

2. « Experts » et « politiques »

Le débat engagé par l'APMEP l'est dans un style dépourvu d'afféterie. Sa rudesse exprime une réalité de l'état historique de la profession, celle d'un certain retard de développement professionnel et, corrélativement, une rusticité parfois revendiquée dans la conduite des affaires de l'association. Sur ce point, les deux « partenaires » s'accordent tacitement pour se rudoyer l'un l'autre. Le choc initial causé par le projet de programme transmis à l'APMEP le 21 mai et le choc en retour concrétisé par le texte de synthèse commenté plus haut ne constituent pourtant que le premier temps d'une affaire qui va se poursuivre durablement. Les événements se précipitent. Le nouveau programme de seconde élaboré par le GTD de mathématiques est présenté en juillet 1999 au Conseil supérieur de l'éducation (CSE). Il s'agit cette fois du programme définitif, qui sera publié dans le numéro hors série n° 6 du *BOEN* daté du 12 août 1999. Le texte présenté au CSE est reproduit par l'APMEP dans un supplément au numéro 87 de son *BGV* qui paraît en août 1999 et est consacré à la classe de seconde. Depuis Marseille, où il anime une université d'été organisée à l'instigation de l’APMEP [5], Bernard Parzysz signe un texte de réaction intitulé « Propositions de l’APMEP pour l’enseignement de la statistique en classe de seconde ». Notons l’ambiguïté d’un texte affichant des propositions de l’APMEP et signé pourtant d’un auteur particulier : tout semble se passer, en matière de statistique, comme si l’APMEP se déchargeait de sa responsabilité sur son expert maison, sans être capable de parvenir à un point de vue associatif véritable. Le ton adopté par Bernard Parzysz est, certes, plus amène que ne l’était celui du texte de synthèse ; mais la question demeure : parle-t-il en son nom – en faisant valider par l’APMEP ce qui lui tient à cœur – ou est-il simplement la plume de l’association ? L’exorde du texte mobilise une rhétorique convenue. L’auteur s’y félicite d’abord de ce que la statistique « occupe une place non négligeable dans ce programme » ; mais alors qu’un béotien s’attendrait à ce qu’elle occupât un tiers du temps, ce dont on se félicite, ici, c’est qu’elle n’en occupe qu’un huitième. La statistique étant ainsi ramenée à une plus juste place, il est loisible d’en chanter la louange. Ce que l’auteur des « Propositions » fait en ces termes :

> Nous sommes en effet convaincus de la nécessité de développer chez les élèves de l’enseignement secondaire une culture substantielle dans ce domaine, important du point de vue de la formation aussi bien scientifique que citoyenne de l’individu.

Un second paragraphe énumère quelques autres points de satisfaction. Ainsi de l’insistance du programme sur la nécessité de travailler avec « des données en nombre suffisant », condition qui peut seule, souligne l’auteur [6], « donner du sens au projet d’entreprendre une étude statistique ». Le béotien, là encore, attendrait plutôt l’affirmation que l’absence de données ne permet pas, tout simplement, de *réaliser* une étude statistique : on touche ici du doigt, subtilement, une déformation transpositive des pratiques statistiques authentiques, qu’une intention didactique insuffisamment analysée tend à instrumentaliser au lieu d’en faire les enjeux d’un apprentissage approprié. Un autre motif de satisfaction de l’auteur que nous suivons se trouverait dans l’intention affichée par le programme « de placer l’enseignement de la statistique du lycée dans le prolongement de celui du collège ». Mais là, déjà, une objection s’élève, qui n’est pas neuve : Bernard Parzysz regrette « qu’aucun nouvel indice de dispersion ne soit étudié en classe de Seconde ». Il propose à nouveau l’intervalle interquartile et, dans

---

[5] Cette université d’été se tient du 12 ou 17 juillet 1999 au lycée Marseilleveyre, sur le thème « Les défis que doit relever la formation des enseignants de mathématiques ».

[6] Observons ici que, si *L’empereur et la girafe* contenait bien plusieurs études portant sur de données « réelles », il n’en va plus de même des fiches de statistique examinées au chapitre précédent, ce qui semblerait montrer un déport, dans la conception officielle même, vers le recours à la simulation au détriment du recueil de données authentiques.

son sillage, les « boîtes de dispersion ». Au-delà, le texte examiné aborde la question de la « répétition d'une expérience aléatoire ». L'auteur regrette cette fois que le programme semble renoncer à « l'observation de la relative stabilisation [de la] fréquence [d'un événement] lorsque le nombre d'épreuves pris en compte devient de plus en plus élevé ». Accusation dont le document d'accompagnement fera justice, sans pour autant céder à la pression pour introduire trop vite le modèle probabiliste [7]. On tient ici la principale pomme de discorde entre le point de vue assumé par le programme et ses auteurs, d'une part, et un autre point de vue, qui s'autorise d'une certaine orthodoxie épistémologique de la culture professorale en matière statistique. Laissons la parole à l'auteur :

> … se contenter de simuler l'expérience aléatoire ne permet pas de donner du sens à l'activité, car la touche « random » de la calculatrice ou le générateur (pseudo)aléatoire de l'ordinateur ont besoin d'être validés par les élèves en tant qu'outils de simulation. En effet, simuler ne peut se faire que par rapport à un référent, référent dont ne disposeront pas les élèves avant d'avoir eux-mêmes réalisé des séries d'expériences.

Le « réfèrent », ici, n'est pas, semble-t-il, une loi de probabilité : le mot renvoie à ce que l'auteur appelle « une expérimentation réelle », qu'il serait alors, mais alors seulement, loisible – et « sensé » – de prétendre *simuler*. La simulation, conclura l'auteur, « ne doit pas se substituer à l'expérimentation, mais la prolonger [8] ». La protestation se fait plus âpre encore à propos d'une pierre d'achoppement déjà rencontrée : le TEL relatif à la simulation d'un sondage. L'auteur affirme d'abord l'excellence de l'ambition de donner à tout citoyen des connaissances de statistique *inférentielle*. Mais, objecte-t-il alors, comment attribuer un sens

---

[7] Ce document précise en effet : «On observera aussi que l'ampleur des fluctuations des distributions de fréquences calculées sur des échantillons de taille *n* diminue lorsque *n* augmente ». Le texte cité se poursuit alors ainsi : « Par ailleurs, on n'hésitera pas à parler de la fréquence d'un événement ("le nombre observé est pair", "le nombre est un multiple de trois", etc.) sans pour autant définir formellement ce qu'est un événement, ni donner de formules permettant le calcul automatique de la fréquence de la réunion ou de l'intersection de deux événements. »

[8] À cela aussi le document d'accompagnement répondra : les élèves, à l'instar de l'honnête homme du XVII[e] siècle, ont une familiarité avec des expériences aléatoires culturellement communes (lancers de dés équilibrés), avec lesquelles il s'agira de reprendre contact pour les « enrichir ». Mais il y a plus. L'utilisation de générateurs pseudo-aléatoires, qui peut être faite dans un but de simulation, peut en même temps être regardée comme une authentique expérimentation – portant sur le dispositif générateur lui-même. Le document d'accompagnement précise à cet égard : « Les calculatrices et les ordinateurs permettent la production aisée de listes de chiffres au hasard ; la production de telles listes fera partie, à coté des lancers de dés ou de pièces équilibrés, à côté de tirage de boules dans des urnes, du bagage d'expériences de référence de l'élève. »

au mot « *chances* », alors que le programme prétend faire l'économie de la notion de probabilité ? Sans parler de la notion de « fourchette », dont certains adhérents de l'association qui enseignent dans des formations post-baccalauréat ont souligné la difficulté conceptuelle. Bref, le thème des sondages, fût-il abordé sous l'angle de la simulation, est à repousser beaucoup plus loin dans le cursus des études. La suite du texte introduit alors une question classique mais jusque-là non abordée : celle de la *formation des professeurs*, de ceux notamment « qui auront, l'année prochaine, à enseigner ce programme ». Sur ce point l'auteur note que le laps de temps disponible est on ne peut plus réduit. Cette observation le conduit à énoncer une liste de contre-propositions, qui se ramènent pour l'essentiel à *différer* tout changement important en la matière – tout en renouvelant l'approbation donnée au *principe* d'un changement.

Dans le même supplément au *BGV* n° 87, on trouve encore un texte de semblable facture, intitulé longuement « Commentaires de la commission inter-IREM "Statistiques et probabilités" sur la partie "Statistique" du projet de programme de mathématiques de Seconde ». L'argumentaire développé à l'encontre du programme est très voisin de celui que Bernard Parzysz mobilise au nom de l'APMEP. On déplore ainsi la disparition de l'écart type, on fustige l'usage de la notion d'étendue, on suggère l'intervalle interquartile et, à sa suite, les « boîtes à pattes », décidément très prisées dans la noosphère d'alors. Mais surtout on vitupère l'absence d'une introduction formelle et opérationnelle de la notion de probabilité, ce qui, souligne-t-on, mine nombre de parties du programme. En outre, on craint l'opacité du recours à la touche *random* de la calculatrice, qui, dit-on, « occultera tout questionnement ». Quant à l'intention d'introduire les intervalles de confiance ou, pire encore, « les promenades aléatoires sur des solides », elle est jugée par ladite commission inter-IREM injustifiable avant le baccalauréat. La conclusion rejoint clairement celle prêtée à l'APMEP : on propose d'une part de « consolider et prolonger les outils statistiques présentés au collège », d'autre part de « faire une initiation à l'aléatoire et l'introduction à une "fréquence limite" par des expérimentations sur des objets (pièces, dés, etc.) directement manipulables. » De fait, les deux « textes d'experts » mis en avant par l'APMEP sont structurés par une opposition traditionnelle (mais discutable) que le travail du GTD tendait quelque peu à gommer : celle de la statistique descriptive et de la statistique inférentielle, « parties » de la statistique dont il semble, à suivre les textes en question, qu'elles soient séparées par une frontière difficilement franchissable. La statistique inférentielle, en particulier, apparaît comme un objet inaccessible, qui symboliserait une expertise de niveau supérieur. Les commentateurs « experts » sont, à son propos, pris entre deux logiques. D'une part, ils semblent – à l'instar de Bernard Parzysz

– « convaincus que des connaissances en statistique inférentielle doivent faire partie du bagage intellectuel de tout citoyen ». D’autre part, ils donnent à voir la statistique inférentielle comme un objet noble, élevé, auquel on ne saurait accéder de plain-pied. Bernard Parzysz, par exemple, indique que l’APMEP souhaite reporter à moyen terme « l’introduction de la statistique inférentielle au lycée » et « profiter de ces quelques années pour préparer avec tout le soin désirable » cette introduction, afin d’organiser « une formation de tous les professeurs concernés dans de bonnes conditions », et cela pour pouvoir « envisager sans appréhension un enseignement de statistique inférentielle en fin de lycée ». Plus circonspect encore, le texte de la commission inter-IREM souligne les résistances prévisibles de la part de professeurs « qui pour la plupart n’ont pas reçu de formation de base en statistique inférentielle ». Manifestement, pour ceux qui ont eu l’audace et fait l’effort de le franchir, il y a là un Rubicon qu’ils ne souhaitent pas voir combler. En cela, cette fraction de la noosphère, attachée à son capital symbolique, reconduit subrepticement l’état de la transposition didactique en matière de statistique qui prévalait dans la littérature d’enseignement du premier tiers du XXe siècle [9].

L’APMEP, cependant, ne reste pas inerte. Sa présidente de l’époque, Catherine Dufossé, écrit dès le 26 juillet 1999 à Didier Dacunha-Castelle, conseiller du ministre Claude Allègre, ancien président du Conseil national des programmes. Lui-même statisticien mathématicien, Dacunha-Castelle semble n’avoir été étranger ni à l’acceptation par Claudine Robert de la présidence du GTD, ni à la volonté du GTD de rénover l’enseignement de la statistique. Dans sa lettre, Catherine Dufossé lui indique d’abord que le comité national de l’APMEP s’est réuni les 19 et 20 juin 1999 et que l’examen de la situation a conduit l’association à écrire aux syndicats et aux fédérations de parents d’élèves pour leur exprimer ses réserves, tandis que son bureau national était mandaté pour organiser une pétition auprès des adhérents de l’association. La présidente précise toutefois que, depuis lors, certaines choses ont bougé, grâce à des conversations téléphoniques avec Claudine Robert ou des discussions de vive voix, lors de l’université d’été de Marseille, avec Philippe Clarou, membre du GTD. Elle rappelle que des textes d’accompagnement ont été promis, ainsi qu’une expérimentation des nouveaux programmes, avec révision éventuelle à la suite de cette expérimentation. En outre, des réunions de travail communes au GTD et aux représentants de l’APMEP sont envisagées. Mais rien de tout cela n’a été jusque-là officialisé, ce qui motive sa

[9] Et qui prévaut encore dans certaines institutions d’enseignement que leur position dominée en matière de statistique conduit, faute de disposer d’assez de légitimité pour « innover », à valider un état ancien du champ.

lettre, qui explicite alors, à l'adresse de Didier Dacunha-Castelle, une série de questions – sur l'assurance qu'existeront des textes d'accompagnement (et sur l'amélioration des conditions de travail, jugées par l'APMEP déplorables, dans lesquelles le GTD serait amené à les élaborer), sur la formation des professeurs, sur les expérimentations à mener, sur la révision des programmes soumis au CSE et les conditions d'une telle révision, sur la qualité de l'écoute, de la part des instances ministérielles concernées, de l'apport de l'APMEP à l'amélioration de la situation. Dans cette perspective, la lettre se termine par une proclamation d'excellence de l'association :

> Nous sommes déterminés à faire tout ce qui sera en notre pouvoir pour aider le GTD à écrire les textes les plus aptes à être compris et appliqués au mieux auprès de leurs élèves par nos collègues des lycées, dans le souci de promouvoir un enseignement de qualité, comme notre association y a toujours contribué.

Mais alors que, depuis son lieu de vacances (nous sommes le 26 juillet), Catherine Dufossé vient à peine de poster sa missive, elle reçoit un coup de téléphone de Didier Dacunha-Castelle. Pour sa part, il loue surtout l'excellence de la manière de procéder du ministère, si du moins on en croit le propos suivant, que rapporte Catherine Dufossé dans le compte rendu de cette communication téléphonique paru dans le supplément au *BGV* n° 87 d'août 1999 [10] :

> On se lance pour la première fois dans une procédure intelligente d'expérimentation et de correction. On a devant nous un an de travail. Si les choses avaient été ainsi menées à l'époque des maths modernes, les programmes de l'époque n'auraient jamais vu le jour.

S'agissant des textes d'accompagnement, précise le conseiller ministériel, le GTD va y travailler, et dans de bonnes conditions (avec, notamment, des décharges de service pour ses membres professeurs de l'enseignement secondaire). S'agissant de la formation, Didier Dacunha Castelle annonce la mise en place sur le site du GTD d'un « volet formation », avec une « partie théorique » et « des études de cas nombreuses et plus ou moins complexes », sans que cela exclue, bien entendu, les modalités usuelles de la formation continue, dont les animateurs pourront cependant s'appuyer, pour ce qui est de la statistique, sur des ressources nouvellement mises en ligne. Touchant les expérimentations, il rappelle à la présidente de l'APMEP que c'est le CSE lui-même qui, lors de sa réunion de juillet, a demandé « que les nouveaux programmes de lycée soient expérimentés, puis revus à la lumière de ces

[10] Dans l'assertion qui suit, les programmes de la réforme des « maths modernes » sont utilisés comme repoussoir, et la réforme elle-même comme parangon des mauvaises pratiques en matière de pilotage du changement curriculaire.

expérimentations ». Outre plusieurs dizaines de classes de seconde dans lesquelles seront essayés les nouveaux programmes – en prélude à une révision du programme et à une nouvelle consultation du CSE –, des réunions interacadémiques rassembleront les inspecteurs chargés de l'expérimentation, les professeurs expérimentateurs et des membres du GTD. Enfin, pour ce qui est des réunions de travail conjointes APMEP-GTD, le conseiller du ministre en accepte le principe, en indiquant cependant clairement qu'il souhaite voir le GTD travailler « sans avoir sous la gorge le couteau des syndicats ou le canif des associations ». Rendant compte de cette communication téléphonique, Catherine Dufossé apportera aux lecteurs du *BGV* quelques commentaires supplémentaires. Elle note les bonnes intentions apparentes, et se félicite même de la procédure évoquée par le conseiller du ministre, même si le recours à Internet ne lui semble pas, à l'époque (en 1999), tout à fait réaliste encore. Mais elle ajoute aussitôt que tout cela n'est pour le moment que « belles paroles » et que l'association n'a pas obtenu de réponse *écrite*. Dans la foulée, elle annonce tout de même que le projet de pétition annoncé est différé. Pour le reste, elle prend date, au nom de l'association, non sans laisser entendre que la force de frappe de celle-ci n'est nullement négligeable, et qu'elle continue d'être mise au service d'une volonté de progrès.

Lorsque le numéro 89 du *BGV* paraît, en novembre 1999, la grande affaire des responsables et des militants de l'APMEP, ce sont les journées nationales de cette association, qui viennent de réunir plus de 650 participants à Gérardmer du 3 au 6 novembre. L'éditorial de la présidente est euphorique, et elle ne manque pas d'y signaler les propos sans nuance de l'inspecteur général Attali, qui a su dire aux participants qu'ils étaient les meilleurs, et recevoir en écho les applaudissements nourris de la salle. La présidente ne fait pas pour autant un bilan unanimiste des débats et échanges menés à bien, puisqu'elle écrit :

> On revient en se disant que, somme toute, l'enseignement des mathématiques est en de bonnes mains : des gens pas d'accord sur tout, certes, et qui discutent parfois âprement. Mais leurs coups de colère sont à la hauteur de leur engagement dans le métier.

Les problèmes de la profession se traitent-ils seulement par des coups de colère ? Il semble que ce soit là, sinon la réalité, du moins l'image qu'il est traditionnel de mettre en avant, comme un signe de bonne santé morale et physique. Au demeurant, depuis la rentrée, les choses ont évolué : la pétition, qui avait été différée en juillet, est maintenant d'actualité, et la présidente de l'association se félicite que les journées nationales se soient tenues dans un établissement où « imprimer au pied levé 1000 pétitions » n'est pas un problème ! Cette action s'accompagne d'une lettre datée du 5 novembre que Catherine Dufossé adresse au ministre Claude Allègre [11]. Dès l'exorde, elle y fait état du souci de l'association d'alerter le ministre sur « l'organisation de l'enseignement en seconde, les allègements du programme du lycée, les horaires d'enseignement de mathématiques, l'orientation des élèves vers les sections scientifiques, les projets pour un nouvel enseignement de la statistique ». Sur ce dernier point, l'association, écrit-elle, souhaite avoir des garanties sur le fait que la rénovation envisagée « sera conduite avec le soutien et la coopération de la communauté des statisticiens ». La demande est, certes, légitime mais elle est aussi paradoxale puisque deux « statisticiens » au moins – Claudine Robert et Didier Dacunha-Castelle – pilotent ou parrainent cette rénovation. En vérité, on a là sans doute un écho d'un constat que les responsables de l'APMEP croient pouvoir exploiter à leur avantage : il n'y aurait pas, chez les spécialistes de statistique, un point de vue *unique* sur la rénovation engagée. La communauté des « statisticiens » n'est pas, à cet égard, structurée autour d'un discours consensuel, même alimenté contradictoirement. Significativement, au reste, Catherine Dufossé note : « Nous sommes inquiets devant la diversité des avis qui en émane… » La situation est donc particulière : car on n'imagine guère l'invocation de la communauté savante correspondante à propos d'un enseignement beaucoup plus traditionnel dans son contenu, comme il en irait par exemple de la géométrie ! Ici, en revanche, l'accent est mis sur l'incompétence relative de la profession, effet mécanique de l'indigence de la formation initiale des professeurs de mathématiques dans le domaine de la statistique. Aussi Catherine Dufossé réclame dans sa lettre « une véritable formation à la fois théorique et didactique », laquelle est déclarée « urgente et indispensable ». Se substituant à la profession tout entière, l'APMEP précise ainsi par le truchement de sa présidente :

> … faute [d'une telle formation] nous serions dans l'impossibilité d'enseigner ce programme à la rentrée 2000, ce qui aurait pour conséquence de ne pas atteindre l'objectif de fournir aux futurs citoyens des outils pour comprendre le monde d'aujourd'hui.

Cette lettre accompagne l'envoi au ministre du texte de la pétition, qui recueillera quelque dix mille signatures [12]. La pétition demande « avec insistance » que soient réalisées quatre « conditions minimales », dont la quatrième est la mise sur pied d'une « formation sérieuse, dès cette année scolaire, pour tous les professeurs de mathématiques, faute de quoi beaucoup seraient dans l'impossibilité d'enseigner le programme de statistique de seconde à la rentrée 2000 ».

---

[11] Cette lettre sera publiée dans le numéro 89 du *BGV*, p. 4.

[12] C'est ce qu'annoncera Catherine Dufossé au successeur de Claude Allègre au ministère, Jack Lang, dans une lettre datée du 27 mai 2000 et reproduite dans le numéro 93 du *BGV* qui paraît en juin 2000.

3. Une profession surprise et troublée

L'euphorie des journées de Gérardmer va laisser place à une irritation non contenue après une rencontre, le 11 décembre 1999, du bureau national de l'APMEP avec Didier Dacunha-Castelle : les représentants de l'association se heurtent en effet, sur plusieurs points sinon sur tous, à une fin de non-recevoir de la part du conseiller du ministre. La réaction à ce camouflet est tardive : la lettre que Catherine Dufossé adresse au conseiller afin de l'informer de la « perception » que l'APMEP a de cette réunion est datée du 18 janvier 2000 [13]. S'y trouvent abordées successivement les questions de l'aide individualisée, des horaires planchers de mathématiques en collège, de l'option sciences, de l'horaire des classes de première S, des TPE, enfin du programme de seconde. Sur ce dernier point, le statisticien Dacunha-Castelle a fait durement la leçon aux membres de l'APMEP qu'il a reçus, et Catherine Dufossé le lui rappelle sans aménité :

> Vous avez annoncé qu'en cas de nécessité, vous étiez prêt à soumettre une nouvelle fois le programme au CSE ; les éditeurs sont prévenus qu'ils auront peut-être à ajouter des feuillets correctifs aux nouveaux manuels. Mais vous ne comprenez pas notre demande de formation en Statistique. Dans le même temps, vous critiquez certains manuels scolaires et vous nous reprochez de ne pas réagir aux erreurs qu'ils contiennent.

L'argumentation développée par la présidente de l'APMEP met en scène une tension créatrice entre, d'une part, les professeurs regardés en tant qu'individus, dont l'excellence est soulignée (ce qui rend d'autant plus significative l'existence d'erreurs, que le conseiller du ministre a relevées, dans les manuels que certains d'entre eux ont écrits), et, d'autre part, la profession qui, face aux objectifs d'enseignement nouvellement fixés, se présente démunie, singulièrement en statistique. La dialectique de la profession et de ses membres qui est ainsi ébauchée est de nature à faire apparaître cette entité qui a tant de mal à émerger : la *profession* elle-même. Les professeurs peuvent donc être comme ci, et la profession comme ça : les professeurs peuvent être excellents et la profession totalement démunie ! La toute première revendication de l'APMEP a ainsi trait à l'exigence de formation de *tous* les professeurs concernés. Mais cette demande de formation est sous-tendue par une demande de « développement » d'un curriculum que le programme évoque plus qu'il ne le concrétise. Le conseiller du ministre, souligne Catherine Dufossé, est resté sourd aux observations des quelques professeurs qui ont conduit des travaux de faisabilité à propos du nouveau

[13] Elle est reproduite dans le numéro 90 du *BGV*, pp. 18-19.

programme, sans au reste se laisser enfermer dans le cadre des seuls manuels disponibles. Or les difficultés qu'ils ont vu s'élever devant leurs collègues praticiens sont telles que le risque est fort que « cette partie du programme ne soit tout simplement pas traitée ». Une première pierre d'achoppement, à cet égard, est constituée par le problème de l'*évaluation*. « Tant que nous ne verrons pas des évaluations pertinentes sur ce sujet, y compris au baccalauréat, note la présidente de l'APMEP, qui pourra croire qu'il y a un véritable enjeu de formation ? » Le problème est classique, à plusieurs titres. D'un côté les concepteurs des programmes ont oublié la question de l'évaluation, qui suppose que soient dessinés des types de tâches, en nombre suffisant, apparaissant eux-mêmes représentatifs du domaine, raisonnablement authentiques et adéquatement calibrés pour être maîtrisés par le tout-venant des élèves de seconde. De l'autre côté, on n'envisage pas de « sculpter », dans la matière évoquée par le programme, de tels types de tâches, d'autant moins que, faute d'une tradition d'enseignement reconnue, la profession devrait pour cela s'autoriser d'elle-même, ce qu'à l'évidence elle prétend ne pas pouvoir faire. En même temps, on n'y envisage pas de laisser à chaque professeur le choix de donner un contenu aux épreuves d'évaluation en matière de statistique, ce que Catherine Dufossé énonce en ces termes : « Quant à évaluer cette partie en contrôle continu, ce serait laisser chacun lui donner l'importance qu'il veut bien lui accorder. »

La suite de l'argumentation, qui pénètre plus avant dans la spécificité de la matière, aborde plusieurs éléments. Le secteur d'études intitulé « simulation et fluctuation d'échantillonnage » ne comporte, souligne ainsi Catherine Dufossé, qu'une seule « capacité attendue », le fait de « concevoir et mettre en œuvre des simulations simples à partir d'échantillons de chiffres au hasard ». Or la bonne maîtrise de ce type de tâches est jugée – sur quelle base ? – comme ne constituant pas pour les élèves une « réelle compétence ». Il semble qu'on ait là un effet de ce que l'auteure de la lettre ne cesse de clamer : la relative méconnaissance par la profession, et par les meilleurs de ces membres, du domaine de la statistique, jugé par eux souvent « hypo-mathématique », conduit ici à tenir pour peu de chose un type de problèmes que, par contraste, les concepteurs du programme tiennent sûrement pour crucial au plan statistique et grandement formateur pour ceux qui s'y affronteront. La critique portée se nourrit aussi de griefs plus nettement dessinés : comment, s'interroge la présidente de l'APMEP, les professeurs pourraient-ils enseigner la simulation « sans référence aux probabilités », avec pour seul viatique le fait de réaliser (ou de faire réaliser) des expériences ? Une note de bas de page est à cet égard révélatrice. Soit, dit l'auteure, à « faire choisir à l'élève la bonne simulation » d'un jet de neuf pièces, pour étudier le nombre de faces obtenues lors d'un jet ; pourquoi, demande-t-elle, ne regarderait-on pas ce nombre comme étant « le premier chiffre après la virgule du nombre fournit par la calculatrice ? », c'est-à-dire une variable qui suit une loi « à peu près » uniforme sur l'ensemble { 0, 1, 2, 3, …, 9 }, alors même que le nombre de faces suit, lui, une loi binomiale de paramètres $n = 9$ et $p = 0,5$! Là encore, il semble qu'on évoque moins des difficultés normales dans le cheminement ordinaire des élèves que le relatif malaise d'enseignants qui découvrent, non sans une certaine amertume, la matière à enseigner à la veille de le faire. Le trouble est évident, et il est de nature épistémologique ; ce que, sans plus de façon, mais non sans cohérence argumentative, la présidente de l'APMEP finit par exprimer en ces termes :

> Constater une variabilité, c'est évident, percevoir les stabilités sur un grand nombre d'échantillons, c'est difficile, accepter qu'on puisse la mesurer, ce n'est plus qu'un acte de foi de l'élève. Fondamentalement, le type de résultat et la forme des démonstrations sont différents de ce qui est habituellement fait en classe de Mathématiques.

Le propos est ponctué à nouveau d'une demande de formation pour les professeurs et, plus largement, toujours, d'une exigence que des travaux soient entrepris et menés à bien – en particulier dans les IREM – pour apporter une substance à un projet d'enseignement qui en manquerait singulièrement. Le dénuement relatif de la profession est vigoureusement souligné : la touche *random*, cible de choix de nombreuses attaques venant de professeurs, est encore une fois prise à partie car, pour beaucoup d'entre eux, elle est *a priori* une touche « opaque », sur laquelle la documentation disponible paraît indigente et qui est donc promise à demeurer une boîte noire pour une profession dans laquelle ce qui s'enseigne doit pouvoir recevoir le statut subjectif de boîte claire, c'est-à-dire doit participer de l'univers des réalités – intellectuelles ou matérielles – que l'on a le sentiment de « comprendre » de part en part.

Un encadré intitulé « Dernière minute » signale, dans le même numéro du *BGV*, la récente tenue à Lyon, le 4 février 2000, d'une réunion interacadémique consacrée au programme de statistique de seconde. Nous sommes alors dans une période de grandes tensions : plus sans doute que la réunion de Paris le 4 décembre 1999, la rencontre lyonnaise a été l'occasion de protestations parfois plus que triviales de la part de certains participants à l'endroit de Claudine Robert, qui vient y défendre le programme dont elle a dirigé l'élaboration. Mais ce sont peut-être là les derniers feux d'une rébellion à laquelle va succéder le silence des travaux et des jours : à partir de la rentrée 2000 le nouveau programme s'applique.

4. Vers un enseignement rénové ?

L'entrée en vigueur du programme rénové a fait l'objet d'une préparation particulière, on l'a vu. Le 26 juin 2000 paraît ainsi un document publié à l'enseigne du ministère de l'Éducation nationale, du CNDP et du GTD de mathématiques [14], qui propose un « bilan de la mise en œuvre anticipée durant l'année scolaire 1999-2000 du programme de mathématiques de la classe de seconde (applicable à la rentrée 2000) ». Vingt lycées, répartis dans cinq académies [15], ont été impliqués dans l'expérimentation souhaitée par le CSE et impulsée par la direction de l'enseignement scolaire du ministère : la MOA – comme l'appelle le document cité, c'est-à-dire la « mise en œuvre anticipée » – a concerné quelque cinquante classes de seconde et semble avoir mobilisé une énergie considérable à tous les niveaux, notamment chez les « professeurs MOAistes », volontaires et sans doute non représentatifs de l'ensemble des professeurs de seconde, dont un certain nombre participent par ailleurs, avec leurs collègues de toutes disciplines, à ce que la brochure, se faisant l'écho du vif conflit syndical et politique avec le ministre Claude Allègre, désigne comme une « confusion entre enjeu éducatif et opposition politique ». Pour ces raisons et quelques autres, l'analyse des observations résultant de cette mise en œuvre anticipée, nous dit-on, « relève plus de l'étude de cas que de l'enquête statistique ».

Le bilan global est plutôt positif. Le programme est apparu « faisable » et, s'agissant plus particulièrement des thèmes examinés ici, on y mentionne deux éléments favorables. « La démarche expérimentale, lit-on ainsi, a permis une plus forte implication des élèves et favorisé une meilleure compréhension. » Quant au cahier de statistique, on constate plus sobrement qu'il a été « expérimenté par certains avec succès ». Des facteurs généraux sont notés comme porteurs de contraintes clairement indésirables : ainsi de la relative rareté des matériels de calcul – calculatrices et ordinateurs – ainsi que de l'absence de personnel en charge de la maintenance et de l'information en ce domaine. Les besoins de formation signalés concernent surtout la statistique et les TICE. Sur le premier point, l'effet bénéfique sur les MOAistes de la journée parisienne du 4 décembre 1999 est souligné, en même temps qu'est notée la difficulté éprouvée par ces professeurs pour transmettre à leurs collègues ce qu'ils y avaient reçu. Les cinq journées interacadémiques de formation statistique animée par le GTD – telle celle de Lyon, mentionnée plus haut – ont touché un millier de professeurs.

[14] Voir GTD de mathématiques (2000).

[15] Il s'agit des académies de Grenoble, Lille, Nantes, Paris et Versailles. On notera l'absence des académies de la moitié sud du pays.

Mais l'effort consenti paraît encore bien insuffisant : les actions de formation devront continuer, en même temps que les professeurs concernés recevront, avec le document d'accompagnement du programme, les fiches de statistique dont nous avons parlé plus haut – à quoi s'ajouteront « un certain nombre de manuels ou d'ouvrages spécifiques » sur lesquels nous allons revenir. Lors d'une réunion de bilan de la MOA tenue le 8 mars 2000, la statistique ne se signale qu'à travers les besoins de formation déjà cités et la difficulté de propager le « nouvel état d'esprit » parmi les professeurs non MOAistes. Le compte rendu note que, d'une manière générale, la statistique a été bien accueillie par les élèves. La question des « fourchettes de sondage » a fait l'objet de demandes de références. Une dernière réunion des MOAistes aura lieu le 14 juin 2000. Les représentants de l'académie de Nantes y notent que « les statistiques *(sic)* ont été perçues comme amusantes », même si plusieurs questions demeurent. Dans l'académie de Grenoble, la partie statistique du programme a été considérée comme intéressante et facile, n'appelant guère de pré-requis et amenant de « meilleurs résultats ». Le cahier de statistique, lui, a été tenu pour « motivant » et cela notamment « dans la perspective de son utilisation pour l'évaluation dans les années ultérieures ». Les représentants de l'académie de Versailles ne mentionnent guère le domaine, hormis pour signaler « un intérêt pour les questions de sondages », sujet qui n'apparaît que « dans le cadre des "thèmes d'étude" ». Tout cela est vu du côté des élèves. Un inspecteur général, André Warusfel, a, dans trois villes, réuni trois élèves par classe – un « bon », un « moyen » et un élève « ayant quelques difficultés ». Il résume ses observations à propos de la statistique en soulignant que, si les élèves lui ont parlé de moyenne, de médiane et même d'écart type (certains d'entre eux avaient en effet étudié l'ancien programme !), aucun n'a mentionné les mots « fluctuation », « échantillonnage », « hasard » ou « *random* ». Le discord entre les discours ainsi rapprochés peut paraître énigmatique : la statistique serait facile, amusante, mais volatile – à moins qu'on n'ait pas enseigné la statistique que désigne le nouveau programme ! À la suite d'André Warusfel, Claudine Ruget, doyenne de l'inspection générale, fait une synthèse des interventions des inspecteurs généraux dans les établissements : la statistique n'y apparaît pas, du moins dans le compte rendu que propose le document examiné. La même absence se constate dans la synthèse proposée par les professeurs représentant les académies de Nantes et de Grenoble, qui mentionnent surtout des problèmes liés à l'emploi des TICE. Les représentants de l'académie de Lille, eux, se montrent positifs ; s'agissant de la statistique, ils indiquent ainsi que « les documents fournis ont été très utiles ». Le compte rendu examiné est un peu plus disert à propos des ateliers qui, ce 14 juin 2000, ont examiné différents aspects du document d'accompagnement. L'atelier 1 est consacré aux éléments concernant la géométrie et la statistique ; le compte rendu en propose le bilan suivant :

> Préciser, sans effrayer, quelques éléments théoriques sous-tendant le programme.
>
> En particulier, nécessité de préciser la notion d'échantillon.
>
> Expliciter la démarche expérimentale préconisée pour cette partie du programme et préciser en quoi l'étude des expériences de référence et la simulation, c'est aussi des maths.

Comme on le voit, la commotion est, tout à la fois, *mathématique* et *épistémologique*. Le compte rendu du travail de l'atelier 3, qui examinait les aspects généraux du document d'accompagnement, montre qu'elle est aussi *didactique*. Ce document demandant que chaque séance d'enseignement laisse des traces écrites dans les cahiers des élèves, les participants à l'atelier se sont demandé si cela valait aussi pour les travaux « expérimentaux », lesquels, au reste, soulèvent de forts problèmes d'évaluation : faut-il, et comment, évaluer les cahiers de statistique ou les productions de groupes par exemple ? En même temps qu'ils se soucient de voir chaque professeur disposer d'un « système de projection collective », les participants à cet atelier expriment le souhait de disposer d'un traitement plus approfondi de la notion de « démarche expérimentale » et des notions connexes d'induction et de déduction. Didactique, épistémologie, mathématiques sont les ingrédients indispensables à la rénovation entreprise. Le compte rendu se termine par un bilan des travaux de l'atelier 4, consacré à l'examen d'une « progression annuelle » dans le traitement du programme. De nombreux problèmes sont examinés : les contraintes de toutes sortes font apparaître l'introduction d'une démarche expérimentale comme difficile, à nouveau. Ce nonobstant, le rapporteur – Philippe Clarou, membre du GTD – conclut sur une note optimiste pour ce qui est de la statistique : celle-ci, ont souligné plusieurs participants à l'atelier 4, gagnerait à être abordée « relativement tard dans l'année », pour cette raison que « c'est quelque chose qui marche bien et qui accroche tous les élèves ».

La situation semble confuse. Le groupe de mathématiques de l'inspection générale a, de son côté, procédé à une évaluation de la MOA. Or le ton du compte rendu – que l'on trouve dans le même document – est tout différent à propos de statistique. L'attitude de rejet semble cette fois évidente : le passé ne veut pas mourir et empêche le neuf de venir à la vie. On se contentera de reproduire, sans commentaire, l'intégralité du bilan proposé par l'inspection générale.

2. Statistique

Quel contenu mathématique (concepts, raisonnement, acquisition d'automatismes) ?

Le contenu mathématique est très réduit et le raisonnement encore plus, pour ne pas dire inexistant. La partie « statistique descriptive » a été traitée partout, parfois en s'attachant plus que par le passé à souligner la propriété de linéarité de la moyenne. Quant à la partie « statistique inductive » elle a surtout donné lieu à expérimentation et observation ; on a appris du vocabulaire.

Quels exercices a-t-on proposés, quelle évaluation a-t-on réalisée ?

Les exercices traditionnels de statistique descriptive. Pratiquement pas d'évaluation.

Comment les notions "délicates" (échantillon, fluctuation) sont-elles introduites ? Qu'en retiennent les élèves ?

La documentation du GTD a été assez abondamment utilisée. Les notions d'échantillon et de fluctuation ont été introduites essentiellement à partir de simulations. Les élèves n'ont pas semblé surpris des phénomènes observés, y compris de l'ampleur des fluctuations d'échantillonnage.
Il est bien délicat d'apprécier ce qui en restera, sinon peut-être des « images », beaucoup de professeurs ont des doutes.

Quel contenu les enseignants donnent-ils à la notion de "chances" ? Qu'en retiennent les élèves ?

C'est le concept de fréquence, d'ailleurs pas totalement acquis par tous les élèves, qui y conduit. La notion de « chances » a été employée comme synonyme de probabilité mais pour les élèves il y a parfois confusion avec l'utilisation courante du terme (je n'ai pas eu de chance !). À noter d'ailleurs que tous les enseignants n'ont pas parlé de « chances ».

Quelle est l'intervention de l'ordinateur, de la calculatrice ?

Cette intervention est importante, sauf d'assez rares cas où le matériel faisait encore défaut (dans certains lycées au contraire l'expérimentation a grandement facilité la mise en place d'installations performantes).
C'est un des effets induits des nouveaux programmes de statistiques : ils ont conduit nombre de professeurs vers l'utilisation de l'informatique (et notamment des tableurs), au delà de celle des simples calculatrices.

Le nouveau point de vue passe-t-il mieux auprès des élèves ?

Plutôt oui mais c'est toutefois variable selon les élèves. Beaucoup se disent intéressés par cette partie du cours (qu'ils croient plus « utile » que d'autres), mais ce sont souvent les élèves plus ou moins en difficulté, attirés par les expérimentations et la non-évaluation de toutes ces activités, et non ceux qui souhaitent aller ensuite en filière scientifique. Beaucoup de bons élèves ont au contraire trouvé cela « nul », « évident ».

Le temps consacré est-il bien $1/8^e$ (sic) ?

Grosso modo oui.

Quelle représentation mentale de la statistique les élèves gardent-ils ?

Difficile à dire bien entendu, mais émerge souvent l'idée que « ce n'est pas des mathématiques » et d'ailleurs ça, ça sert… !

Que reste-t-il dans les cahiers de statistique ? Les utilise-t-on pour l'évaluation ?

Dans la majorité des cas il n'y a pas eu de cahiers de statistiques. Sinon c'est assez variable : ou bien on y trouve tout, cours et activités en classe, travail d'expérimentation à la maison, graphiques produits par le tableur, mais parfois c'est une collection de résultats sans aucune structuration ; ou bien ils contiennent surtout les textes issus du GTD, photocopiés par le professeur ; ou bien encore c'est un document type TPE. Sauf dans un cas ils ne sont pas utilisés pour l'évaluation.

Les mêmes évaluateurs ajouteront, à propos des TEL, que la plupart d'entre eux ont été « abordés ici ou là », à l'exception de certains d'entre eux, dont les « simulations de sondages et les promenades aléatoires ». L'avenir est ouvert mais le passé pèse.

En parallèle à la MOA organisée et impulsée par le ministère, une autre expérimentation, de taille réduite, a eu lieu à l'initiative de la régionale de Grenoble de l'APMEP : cinq classes de seconde du lycée de Vizille ont « expérimenté » le cours de statistique, auquel ont été consacrées quatre semaines de travail, « évaluations incluses ». Le document qui en est issu est intitulé simplement *Statistique de seconde clés en main pour la rentrée 2000*. Il s'adresse aux enseignants « peu familiarisés avec cette nouvelle approche » de la statistique. Sept activités sont proposées qui, avertit-on le lecteur, peuvent être conduites même si on ne dispose pas des matériels informatiques utiles. La brochure est composée de deux parties : la première s'intitule *Statistiques descriptives* (sic), la seconde, *Échantillonnage et simulation* ; la première propose cinq activités, la seconde deux seulement. La première activité est intitulée *Relevés de notes d'élèves de Première en LV1*. Les élèves des classes « expérimentales » concernées ont disposé des relevés de douze classes de leur lycée. D'une manière plus générale, les auteurs du document préconisent ainsi l'utilisation de données prélevées dans l'établissement même, dûment anonymées, et relatives, par exemple, au premier trimestre de l'année en cours et aux trois trimestres de l'année précédente. (Dans le cas d'espèce, seule l'indication du sexe de l'élève était conservée, mais cette variable n'a pas été utilisée dans l'activité.) Un fait mérite d'être souligné : aucune question n'est proposée dont l'étude appellerait l'exploitation des données proposées aux élèves. Une question A demande à l'élève de commencer par arrondir les notes au demi-point supérieur puis de procéder à une série de gestes descriptifs traditionnels : calcul de la moyenne, production d'un diagramme en bâtons, détermination du ou des modes, calcul de l'étendue, détermination de la médiane, production d'histogrammes. Le problème de la motivation de ces gestes n'est pas soulevé. Il en ira de même dans les questions B et C qui complètent l'activité. Un certain questionnement est bien adressé à l'élève, qu'on ne retrouvera pas toujours dans les manuels, nous le verrons. C'est ainsi que la question C a le libellé suivant :

> Question : peut-on trouver la moyenne, l'étendue, le mode et la médiane pour l'ensemble des classes de Première étudiées à partir de ce qui est affiché ? Si oui, comment ? Si non, que nous manque-t-il ?

Mais il s'agit là, toujours, de questions *secondes*, dont le problème des raisons d'être est occulté. L'activité 2, intitulée *Pluviométrie*, fournit aux élèves un relevé journalier des précipitations en deux lieux, l'un en montagne, l'autre en plaine. Les données sont réputées authentiques : elles proviennent, indique le document, de la station météorologique de Saint-Martin d'Hères. Plus encore peut-être que dans l'activité précédente, on peut subodorer ici la question qui *pourrait* être génératrice du travail statistique assigné aux élèves, et qui, en vérité, est explicitée dans le troisième point de l'activité : « on dit que le massif de la Chartreuse est en général plus humide que la plaine. Qu'en pensez-vous ? » Bien entendu, une telle interrogation aurait dû se trouver au principe de l'activité [16]. Les données travaillées sont utilisées pour provoquer certaines tâches usuelles en matière de description statistique : calcul de la moyenne ou d'une moyenne élaguée, de l'étendue, détermination de la médiane. D'une certaine manière, les choses vont trop vite : il eût été utile, ici, de s'attarder sur le tableau de données, de l'examiner à l'œil nu pour y saisir certaines propriétés que les calculs viendront ensuite confirmer ou nuancer, voire réfuter. C'est ainsi, que *grosso modo*, le volume de précipitation pour un jour donné est supérieur ou égal, à quelques exceptions près, en montagne à ce qu'il est en plaine, à l'exception notable du 25^e^ jour où, d'après le commentaire, la plaine a été inondée. Cette observation aurait gagné à être produite par la classe elle-même. Ainsi en va-t-il encore avec le fait suivant : sur trente jours observés en montagne, les précipitations ne concernent que 13 journées ; la série statistique correspondante comporte donc 17 zéros (sur 30 valeurs), en sorte que la médiane est *nulle*, ce qui donne une information utile pour réfuter l'idée que, « en montagne, il pleut très souvent », mais non pour réfuter l'assertion selon laquelle « en montagne, il pleut beaucoup » (car, pour cela, c'est vers la *moyenne* qu'il faut se tourner). On voit ainsi que, non seulement une question génératrice manque qui aurait ordonné l'ensemble de l'étude, mais que manque aussi

[16] Son libellé pourrait, au reste, être légèrement retouché – le « Qu'en pensez-vous ? », de coloration subjective et qui ne suppose nullement un travail statistique, pourrait être remplacé par la question « Qu'en est-il effectivement ? », qui fait résonner une exigence d'objectivation à caractère scientifique.

un travail sur cette question qui aurait amené la distinction entre *souvent* et *beaucoup* – distinction peut-être plus utile, il est vrai, en pays méditerranéen que dans le massif de la Chartreuse.

L'activité 3 n'est pas développée : les auteurs renvoient le lecteur vers les exercices proposés par les manuels. Or son thème – les « calculs de moyennes à partir de fréquences ou de regroupements par classes » – est, en vérité, partiellement hors programme, comme l'indique ce passage du document d'accompagnement :

> Estimer la moyenne de séries de données quantitatives en les regroupant par classe n'est plus une pratique utile en statistique depuis que des ordinateurs calculent la moyenne de milliers de données en une fraction de seconde…

L'activité 4 est intitulée *Salaires des employés d'une entreprise*. Là encore, le questionnement qui pourrait l'animer reste second, quand il n'est pas tout à fait implicite. On dispose d'une série statistique donnant, dans une certaine entreprise, l'effectif des employés ayant un certain revenu, entre 7 et 30 kF. Le même tableau fournit également l'effectif cumulé croissant des salaires. Une première question demande de calculer la moyenne et la médiane de la série, sans qu'on sache à quoi le calcul de ces indicateurs répondra. Les deux autres questions sont faites de jeux numériques proposés, en l'espèce, à peu près *in vacuo* : dans la deuxième question, par exemple, on suppose que les effectifs correspondant aux salaires de 7 kF et de 10 kF ont été permutés. On refait calculer moyenne et médiane, non sans demander si les variations constatées étaient prévisibles. La gymnastique ainsi ébauchée se poursuit avec la question 3, dont nul contexte générateur possible n'est évoqué, et qui fait examiner une situation dans laquelle 35 personnes (au lieu de 8) auraient un salaire de 30 kF avec un effectif échangé : il s'agit d'imaginer une répartition des effectifs dans laquelle la médiane soit la même que précédemment (alors que la moyenne est libre de varier). On souligne simplement à l'adresse du professeur que la moyenne peut *baisser* – contre une attente spontanée, liée évidemment à l'augmentation sensible du nombre de personnes gagnant le salaire maximal. L'activité 5 est intitulée *Exemples d'utilisation de la linéarité de la moyenne*. Trois exemples sont proposés. Le premier a trait à la notation de copies : ici l'appareil statistique est intérieur à la situation du monde étudiée. Un professeur a noté des devoirs sur 40, et obtient une moyenne de classe de 16 ; mais il rend les notes sur 20 : on demande quelle est la moyenne de la classe en ce cas. Ce professeur décide alors de rajouter un point à chacun, parce qu'il trouve cette moyenne trop faible ; on demande ce qu'est la nouvelle moyenne. Notons que le problème inverse, que le professeur a en fait « résolu », n'est pas évoqué : que peut-on faire pour que la moyenne augmente d'un point ? Le deuxième exemple est beaucoup plus proche de l'emploi usuel, dans le travail statistique, de la linéarité de la moyenne. Le problème proposé est en fait celui de la 10e des onze fiches publiées par le ministère [17]. Enfin, le troisième exemple reprend, dans une situation simple – il s'agit de calculer la moyenne des notes 6, 7, 9 et 12 –, le principe du calcul précédent, mené à bien, cette fois, « de tête ». L'élève doit justifier qu'on obtient bien la moyenne en retranchant 10 à chaque nombre et en calculant alors la moyenne des valeurs obtenues, avant de rajouter 10 à cette moyenne. L'intention est louable, mais manque de pertinence : contrairement à ce qu'il en est de l'exemple 2, ici un « jeu » simple – ne sollicitant pas la linéarité de la moyenne – avec les valeurs données permet d'arriver très simplement au résultat [18].

La deuxième partie de la brochure s'intitule, on l'a dit, *Échantillonnage et simulation*. Elle ne comporte que deux activités, dont la première – l'activité 6 du document tout entier – est intitulée *Expérience de lancers de dés* [19]. L'idée de l'activité est d'observer les résultats de séries de 50 lancers de dés, chaque binôme d'élèves de la classe produisant deux telles séries. Sans plus d'explication, les élèves doivent déterminer l'effectif de chacune des six valeurs possibles ainsi que les fréquences correspondantes. On procède alors graphiquement. Tout d'abord chaque binôme établit le diagramme des fréquences de chacune des deux séries de 50 lancers qu'il a réalisés ; ensuite on réunit les séries obtenues par trois binômes, ce qui permet d'établir un diagramme des fréquences portant sur 300 lancers ; enfin, on établit le diagramme des fréquences relatif à l'ensemble des lancers de dés réalisés dans la classe. Tout cela est présenté sans qu'aucune question ait été posée : les élèves sont censés agir sans autre motif que l'injonction magistrale. Ce n'est qu'à la fin de la feuille d'activité qu'apparaît une rubrique appelée « interprétation des graphiques », où surgit l'inévitable question « Que constatez-vous ? » – que constatez-vous, en l'espèce, en comparant vos deux premiers diagrammes aux diagrammes analogues d'autres binômes. La réponse est soufflée : ce que

[17] Il s'agit du calcul de la moyenne de six nombres décimaux $x_i = (a_i + 432567000) \times 10^{-11}$, où a_i est un entier à trois chiffres. Ce type de problèmes avait déjà été évoqué lors de l'examen du chapitre 4 de l'ouvrage de Claudine Robert, *L'empereur et la girafe* : voir notre chapitre 2.

[18] On peut remplacer, à somme constante, la série par 8, 8, 8, 10, dont la somme vaut 4 fois 8 plus 2 et dont la moyenne est égale à 8 plus 0,5, soit 8,5. On peut aussi additionner 6 et 12 d'une part, 7 et 9 d'autre part : le quotient par 4 de 16 plus 18 est égal à 4 augmenté de la moitié de 9, ce qui redonne 8,5.

[19] Ce titre est différent de celui proposé dans le sommaire de la brochure : *Fluctuation d'échantillonnage sur des lancers de dés*. On notera que, de même, le sommaire indique, pour l'activité 2 (« Pluviométrie »), le titre plus développé suivant : *Relevés pluviométriques fournis par la station météorologique de Saint-Martin d'Hères.*

l’on constate, c’est le phénomène de la « fluctuation d’échantillonnage sur des séries de même taille ». Une deuxième question conduit à comparer les graphiques successivement obtenus : ici, le phénomène que les élèves ne manqueront pas de constater – la stabilisation des fréquences quand la taille des séries augmente – n’est pas même mentionnée. L’activité 7, intitulée *Marche à 5 pas* [20], est précédée d’un intermède intitulé lui-même *Simuler : Pourquoi ? Comment ?* La première question fait l’objet d’une réponse concise : aux lancers de dés réalisés dans l’activité 6, la simulation permet de substituer un procédé rapide et économique. Les auteurs avancent aussi cet argument, ambigu s’agissant de la classe de seconde (où les rudiments du calcul des probabilités ne sont pas disponibles) : la simulation « permet d’avoir une bonne approximation de la fréquence d’un événement lorsque celle-ci n’est pas calculable ». Cette remarque, à nouveau, va trop vite : *la* fréquence dont il est question ressemble furieusement à la probabilité de l’événement, notion qui n’est pas donnée à l’avance mais qu’il s’agira de voir émerger, entre seconde et première, sur fond de stabilisation des fréquences. De plus longs développements sont consacrés à la seconde question – comment simuler ? La réponse, dans le cadre institutionnel où elle doit se concrétiser, est sans surprise. On peut d’abord simuler un phénomène à l’aide de lancers de dés (ou de pièces de monnaie) : ainsi pour simuler la naissance de filles ou de garçons. On peut aussi utiliser une table de nombres aléatoires, technique dont les auteurs soulignent l’avantage pratique, notamment à l’occasion d’un devoir surveillé en classe entière, parce qu’elle fournit des travaux d’élèves sur lesquels figureront – sauf erreur de l’élève – les mêmes résultats, dès lors que le professeur aura prescrit une consigne unique d’utilisation de la table. Au-delà s’ouvre le recours au générateur pseudo-aléatoire de la calculatrice ou du tableur : les auteurs lui consacrent quelques remarques pratiques succinctes et renvoient, pour des projets de simulation plus ambitieux, à une brochure de l’IREM de Paris-Nord intitulée *Simulation d’expériences aléatoires*. L’activité 7 elle-même porte alors sur un problème de promenade aléatoire simple : « On place un pion sur un axe gradué à la position 0. Au hasard, le pion avance ou recule d’un pas. Il fait cinq pas. Quelle est sa position d’arrivée sur l’axe ? » Plusieurs traitements sont d’abord envisagés : avec une pièce de monnaie, avec un dé, avec les résultats de lancers de dés obtenus à l’activité 6, avec la touche *random* de la calculatrice. C’est ce dernier dispositif qui sera ensuite mobilisé : chaque binôme d’élèves dispose d’un tableau où il peut consigner les résultats de 25 marches aléatoires à cinq pas. Le tableau possède 25 lignes et ses colonnes sont étiquetées par les abscisses entières de –5 à 5. Bien que

[20] Le sommaire lui donne pour titre : *Exemple de simulation. Marche à 5 pas sur un axe.*

les abscisses –4, –2, 0, 2, 4 ne puissent être atteintes à l'issue d'une marche, le tableau comporte volontairement les colonnes correspondantes. Plus généralement, et contrairement à ce qui se passait dans l'activité 6, l'élève n'a pas ici une bonne intuition de l'allure de la distribution des fréquences, observe un commentaire des auteurs. La détermination de ces fréquences sur les 25 marches aléatoires réalisées est faite par chaque binôme. Le procédé déjà envisagé consistant à réunir des séries obtenues indépendamment permet ensuite d'examiner les fréquences pour 50 puis pour 200 marches, enfin pour l'ensemble des marches aléatoires observées dans la classe. En même temps sont construits des diagrammes en bâtons pour représenter les différentes distributions de fréquences obtenues. Aucune question n'est formulée. L'activité se poursuit par la mise à disposition des élèves d'un tableau présentant les effectifs correspondant à 10 séries de 100 marches aléatoires. Les élèves doivent établir le tableau des fréquences déduit de ce tableau d'effectifs et encadrer la fréquence de sortie de chacune des valeurs –5, –3, –1, 1, 3, 5 entre les fréquences minimale et maximale observées sur ces dix séries. L'activité continue par le calcul des fréquences des différents résultats possibles sur l'ensemble des 1000 marches aléatoires observées. On invite alors les élèves à comparer les résultats obtenus avec ceux obtenus en utilisant la touche *random* de la calculatrice. Deux questions de même type sont soulevées sur la signification des résultats observés : si je fais dix marches (respectivement 100 marches), suis-je sûr que je trouverai l'encadrement 0,25 ≤ fréquence (–1) ≤ 0,36 ? Question limite, que prolonge brièvement une rubrique intitulée *Pour aller plus loin*, où les auteurs indiquent : « En mathématiques, on démontre que, si on joue un très grand nombre de fois, les fréquences des événements –5 ; –3 ; –1 ; 1 ; 3 ; 5 "tendent à se rapprocher" respectivement des nombres : $\frac{1}{2^5}, \frac{5}{2^5}, \frac{10}{2^5}, \frac{10}{2^5}, \frac{5}{2^5}, \frac{1}{2^5}$. » La consigne est de comparer ces valeurs « théoriques » aux résultats obtenus dans les deux simulations étudiées.

Pour la première fois dans la genèse noosphérienne de l'enseignement rénové, on trouve, dans le document examiné, le texte d'un *devoir à la maison*, ainsi que le texte d'un *devoir surveillé*. Le devoir à la maison reprend l'argument de la 3e fiche de statistique sur le lièvre et la tortue :

> On lance un dé. Si le 6 sort, le lièvre gagne. Sinon, la tortue avance d'une case. On continue jusqu'à ce qu'il y ait un gagnant. Quelle est la situation la plus enviable, celle du lièvre ou celle de la tortue ?

La consigne est de simuler des courses entre le lièvre et la tortue en utilisant les grilles de 100 lancers de dés réalisés en classe. On demande à l'élève de tenter d'évaluer ce que l'énoncé, faute de mots pour le dire, exprime ainsi : « En étudiant les résultats, vous essaierez de prévoir dans quelle proportion l'un ou l'autre gagne. » Le devoir surveillé proposé dans la brochure a été utilisé au lycée de Vizille en avril 2000 : il s'agit d'un extrait d'un devoir d'une heure comportant, à côté d'une partie de statistique, une partie de géométrie plane. Ce devoir utilise, on l'imagine, des tables de nombres aléatoires (qui sont intégrées dans l'énoncé). La partie qui nous concerne est composée de deux exercices. Dans le premier, on étudie la somme des points amenés par le jet de deux dés. L'étude comporte une simulation (à l'aide d'une table de nombres aléatoires de 1 à 6), puis le calcul des fréquences de chacune des valeurs possibles, et s'arrête là. Dans le deuxième exercice, on considère une urne contenant 5 boules rouges, 3 boules noires et 2 boules blanches, de laquelle on tire une boule. La première question revient à demander la probabilité de sortie (le mot n'est évidemment pas prononcé) d'une boule rouge, d'une boule noire, d'une boule blanche. On procède alors à une simulation à l'aide d'une table de nombres aléatoires de 0 à 9. On calcule les fréquences, on compare les fréquences calculées avec les prévisions de la première question de l'exercice. Il s'agit là de gestes effectivement fondamentaux mais accomplis sans réelle motivation.

5. Des mathématiques introuvables ?

Dans l'année qui a précédé la MOA conduite sous l'égide du ministère et l'expérimentation impulsée par la régionale de Grenoble de l'APMEP, une expérience pédagogique a eu lieu, en avril et mai 1999, à l'initiative de Daniel Schwartz, avec la collaboration de l'inspection pédagogique régionale et du CRDP de l'académie de Versailles. Le travail entrepris sollicite 28 classes de seconde totalisant 782 élèves. Un article paru dans le numéro de novembre-décembre 1999 du *Bulletin de l'APMEP* en rend compte [21]. « L'idée, écrit l'auteur, était, d'une part de réaliser une étude statistique sur une expérience réelle effectuée par les élèves, d'autre part de disposer d'un effectif qui dépasse largement celui d'une seule division. » L'expérience est la suivante : « Chaque élève, sans avoir été prévenu, a coupé à vue une longueur de ficelle de 200 mm. » L'élève, en fait, effectue deux fois la coupe. Le compte rendu publié n'explicite pas la problématique initiale, ignore tout questionnement et suit une pente bien connue, celle de la défonctionnalisation et de la monumentalisation corrélative du savoir statistique. L'auteur écrit ainsi sans autre préalable :

> Les résultats recueillis au sein de la classe ont permis d'introduire les paramètres et les représentations classiques (étendue, médiane, quartiles, moyenne, diagramme en boîte), de comparer les paramètres pour les deux coupes effectuées, de demander à chaque élève de se situer par rapport à la moyenne

[21] Coste (1999).

(écarts bruts, en valeur absolue), de faire un regroupement en classes (de même amplitude puis d'amplitudes inégales), de faire un vrai histogramme, de calculer la moyenne pondérée avec les fonctions de la calculatrice, de comparer cette moyenne pondérée à la moyenne initiale, de fabriquer un tableau numérique dans lequel chaque colonne est une étape de calcul de l'écart-type.

Aucun détail du monument n'est laissé dans l'ombre ! L'auteur note que le travail accompli constitue « une excellente initiation au tableur ». Il énonce ensuite ce qui a été l'objectif essentiel du travail avec les élèves : les amener « à réfléchir et à débattre sur la façon d'exploiter les résultats, sur la signification et la pertinence de tel ou tel paramètre ».

Il semble étrange d'évoquer ainsi l'exploitation de résultats, la signification et la pertinence de tel ou tel indicateur *dans l'absolu*, quand aucune question n'est proposée à l'étude. Sans doute les résultats mécaniquement obtenus sont-ils supposés engendrer des questions auxquelles ils sont en même temps censés permettre de répondre. On se demande ainsi, semble-t-il, si une différence apparaît entre droitiers et gauchers (il n'y en a pas), ou entre filles et garçons (les filles coupent plus long que les garçons). L'étude fait ressortir que la longueur moyenne est supérieure à 200 mm : 223 pour la première coupe, 213 pour la seconde (avec des écarts types de 38 et 33, respectivement). On calcule donc le pourcentage de coupes trop longues (c'est-à-dire supérieure à 200 mm) : il est de 72 % pour la première coupe, de 64 % pour la deuxième coupe, tous élèves confondus. Des données recueillies, 140 échantillons de 80 mesures sont extraits au hasard et sont communiqués à chaque classe où ils sont répartis entre les élèves, chaque élève recevant ainsi 4 ou 5 d'entre eux. Avec chaque échantillon est communiqué le pourcentage de coupes trop longues. L'objectif est de rencontrer le phénomène de fluctuation d'échantillonnage, notamment à travers la variation du pourcentage de coupes trop longues. Les élèves, indique le compte rendu que nous suivons, ont été convaincus que « se contenter d'un échantillon pour évaluer une population (ce qui est inévitable dans la plupart des études statistiques) comporte un risque d'erreur ». Ce constat a été le point de départ d'un travail sur la notion « d'intervalle de confiance ou de fourchette ». À ce stade, la complexité croît en même temps que l'opacité augmente : la chose tient au sujet étudié d'abord. Un échantillon de 80 mesures comporte 78 % de coupes trop longues ; que peut-on en déduire quant au pourcentage de coupes trop longues dans la population des 782 mesures dont il est extrait ? Là intervient la notion d'intervalle de confiance. La notion est, on le sait, subtile : si la proportion dans la population est p et si la proportion dans l'échantillon (ici de taille $n = 80$) est $\hat{p}$, un intervalle de confiance au risque α (où α est égal par exemple à 5 % ou à 1 %) est un intervalle $[m(\hat{p})\ ;M(\hat{p})]$ tel que, *quelle que soit* $p \in [0\ ;1]$, on ait : $P_p(m(\hat{p}) \leq p \leq M(\hat{p})) \geq 1 - \alpha$. Ici, l'intervalle de confiance est déterminé à l’aide de tables (au risque de 5 % et 1 %, respectivement), qui sont fournies aux élèves – et qui ont été fournies à leur professeur par l’instigateur de l’expérimentation. Ainsi, si dans tel échantillon dont dispose tel élève le pourcentage de coupes longues est $\hat{p}$ = 78 %, il pourra tirer de la table que la proportion *p* de coupes longues dans la population des 782 mesures a une probabilité d’au moins 95 % d’être comprise entre 67 % et 86 %. Comme on connaît la vraie proportion *p* – elle est de 72 % –, on peut chaque fois contrôler si l’intervalle de confiance contient cette vraie valeur ou non. En l’espèce, sur les 140 échantillons de taille 80, il s’en trouve 7, soit exactement 5 %, qui conduisent à un intervalle de confiance ne contenant pas la valeur *p* = 72 %.

La rédaction du *Bulletin de l’APMEP* a appendu au compte rendu proposé deux notes de bas de page de son cru. La première signale que, si la notion de fluctuation d’échantillonnage figure bien dans la partie obligatoire du futur nouveau programme de seconde, il n’en va pas de même de la notion d’intervalle de confiance, laquelle n’apparaît que « parmi les thèmes, qui ne sont pas tous à traiter ». La seconde est une protestation en bonne et due forme, qui nous fait retrouver le problème de la pénurie de connaissances affectant la profession en matière de statistique théorique. L’auteur du compte rendu ayant donné pour exemple deux échantillons pour lesquels la proportion observée de coupes trop longues est respectivement de 75 % et de 83,8 %, la rédaction écrit ainsi :

> Dans le thème d’étude il est dit « on incitera les élèves à connaître l’approximation usuelle de la fourchette au niveau de confiance 0,95, issue d’un sondage sur *n* individus ($n \geq 30$) dans le cas où la proportion observée (*p*) est comprise entre 0,3 et 0,7, à savoir $\left[(p) - \frac{1}{\sqrt{n}}\,;\,(p) + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ ». Mais, ici, comme (*p*) = 0,75 ou 0,838, aucun des deux échantillons cités n’entre dans ce cadre… Quant au tableau ci-après, son obtention est restée mystérieuse. Il serait pourtant impératif, sous peine de discrédit, que la formation prévue pour les enseignants nous éclaire complètement sur tout cela.

L’auteur du compte rendu n’est lui-même pas en reste. Les tableaux des intervalles de confiance, qu’on dirait sortis de nulle part, ne passent pas. Ils peuvent apparaître en effet comme le fruit d’un double argument d’autorité : du statisticien spécialiste qu’est Daniel Schwartz à l’endroit des professeurs des classes participant à l’expérimentation d’abord, de ces professeurs à l’endroit de leurs élèves ensuite. Mais l’auteur déplace un peu le problème. Ne pas connaître les mathématiques sous-jacentes à un outil dont le mode d’emploi prend dès lors l’allure d’une recette mécaniquement appliquée est une chose ; mais il y a, selon lui, plus grave : le régime de sous-compréhension mathématique que doivent accepter élèves et professeurs va de pair avec, plus généralement, une teneur mathématique du travail que l'auteur du compte rendu juge insuffisante, alors même qu'il reconnaît l'intérêt éminent d'un tel enseignement pour la formation du citoyen :

> Si cet enseignement remplit de façon incontestable une partie de notre mission qui consiste à éduquer un futur citoyen qui devra analyser et comprendre ce type d'informations chiffrées – et en cela c'est à la fois intéressant et indispensable – on peut s'interroger s'il contribue à une formation mathématique réelle (maîtrise d'un outil mathématique, d'un raisonnement, etc.).

En outre se trouve soulevée l'insistante question de la notion de probabilité que, une nouvelle fois, la profession semble regarder comme un préalable *sine qua non* pour aborder de manière pertinente l'étude de la statistique.

En octobre 2000 paraît aux éditions Louis Jean, à Gap, une brochure de l'APMEP de quelque 70 pages intitulée *Les statistiques dans le programme de seconde à la rentrée 2000*. L'auteure en est Pascale Pombourcq, membre du groupe « Probabilités et statistique » de l'IREM de Toulouse, qui a publié l'année précédente une autre brochure, intitulée « Les statistiques dans les nouveaux programmes de collège ». Une courte introduction souligne l'article de foi sur lequel roule la brochure. Ayant ainsi noté que des devoirs à la maison d'un style inédit vont apparaître (« Pour demain vous lancerez 50 fois une pièce de 2 F, et surtout n'oubliez pas d'apporter deux dés à 6 faces ! »), l'auteure indique qu'il convient d'informer les parents d'élèves afin qu'ils ne s'affolent pas devant ces nouvelles activités demandées à leurs enfants, et cela en leur transmettant ce message clair et net : « Oui vos enfants font des mathématiques et sûrement pas au rabais. » Le premier chapitre de la brochure fait le point sur les programmes de collège, tandis que le deuxième présente le programme de seconde. Le chapitre 3 est intitulé « Les outils théoriques ». Sont présentés successivement la moyenne arithmétique et son calcul dans le cas d'une série discrète, ce qui conduit à établir et à utiliser la linéarité de la moyenne, d'une part pour calculer la moyenne de nombres décimaux ayant les mêmes premiers chiffres, d'autre part pour aborder le problème du calcul d'un « cube moyen » (question qui fait par ailleurs l'objet de la dernière des onze fiches publiées par le GTD). Le chapitre se poursuit par le calcul de la moyenne d'une série « groupée en classes » – ce qui, on l'a vu, occupe une place ambiguë dans le nouveau programme de seconde. À propos de la « moyenne élaguée », l'auteure indique que cette expression « n'existe pas officiellement dans le langage statistique », manière un peu maladroite d'indiquer qu'il n'y a pas d'algorithme de calcul unique pour procéder à un élagage [22] ; puis elle traite de la médiane, présentant, à propos d'une série groupée en classes, l'emploi du polygone des

[22] Le débat sur ce point est ancien : voir Droesbeke & Tassi (1990), pp. 67-69.

fréquences cumulées, technique dont on sait qu'elle est désormais hors programme. Elle note *in fine* l'observation – qui, elle, est bien dans le programme – selon laquelle « la médiane d'une série ne peut se déduire des médianes de sous-séries ». L'examen des notions de mode et de classe modale clôt l'étude des paramètres de position. Les paramètres de dispersion sont alors examinés, tout d'abord avec l'*étendue*, qui ne fait l'objet d'aucun développement, ensuite avec l'*écart arithmétique moyen*, dont l'auteure signale le lien avec la médiane, promettant au lecteur d'y revenir un peu plus loin, enfin avec la présentation de l'*écart interquartile*. Pour cela, les premier et troisième quartiles, Q_1 et Q_3 doivent être définis. La « définition » proposée permet de donner une idée au lecteur néophyte sans grand souci de précision formelle [23]. L'*écart interquartile* est alors défini comme égal à $Q_3 - Q_1$. Pour la série 2, 3, 3, 5, 5, 5, 8, 10, 12, par exemple, la médiane est 5 ; le seuil de 25 %, égal à $9 \times 0,25 = 2,25$, est atteint avec la troisième valeur, égale à 3, tandis que le seuil de 75 % n'est dépassé qu'avec la septième valeur, égale à 8 : l'écart interquartile, qui est la longueur de l'*intervalle* interquartile $[Q_1 ; Q_3]$, est donc égal à $Q_3 - Q_1 = 8 - 3 = 5$. L'auteure a, en vérité, défini la médiane comme étant le deuxième quartile, puisqu'elle indique que « la médiane est un nombre qui permet de franchir le seuil des 50 % des fréquences cumulées ». Cette définition l'amène à regarder les premier et deuxième quartiles comme étant la médiane d'une sous-série bien choisie. Dans le cas de la série prise pour exemple, la taille est impaire, égale à 9 : 5 étant le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{9}{2} = 4,5$, l'auteure extrait les 5 premières et les 5 dernières valeurs de la série, obtenant ainsi les deux sous-séries 2, 3, 3, 5, 5 et 5, 5, 8, 10, 12, dont les médianes respectives, constate-t-elle alors, sont bien le premier et le troisième quartiles de la série initiale. L'explicitation est ici minimaliste, l'explication cursive, pour ne pas dire allusive : tout se passe comme si le travail mathématique requis pour élucider ce que l'auteure affirme n'avait pas sa place dans un document qui, pourtant, prétend clarifier les choses pour son lecteur [24]. Sur le modèle déjà utilisé, le texte examiné introduit alors les *déciles* et les intervalles interdéciles, les *centiles* et les intervalles intercentiles. L'examen des paramètres de dispersion se poursuit avec la présentation de la variance $V = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i - \overline{x})^2$, à

[23] « Comme je l'ai déjà dit pour la médiane, note-t-elle ainsi, lorsque la série est discrète, il sera plus pratique d'utiliser les effectifs cumulés croissants. »

[24] Sur la définition de la médiane, voir notre chapitre 5.

propos de laquelle l'auteure évoque la « relation de Koenig-Huyghens [25] », $V = \sum_{i=1}^{p} \frac{n_i}{n} x_i^2 - \bar{x}^2$, en signalant au reste que l'usage de cette égalité, lorsqu'on effectue des calculs « à la main », peut révéler des surprises, des problèmes d'arrondis conduisant parfois à des variances négatives. Cette remarque – datée – accompagne l'introduction de l'*écart type* $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{p} n_i(x_i - \bar{x})^2}$, lequel est calculé (à l'aide de la relation de « Koenig-Huyghens ») dans le cas de la série de taille 9 manipulée plus haut. Cette définition illustrée est alors suivie de deux remarques. La première a trait aux deux touches de calcul de l'écart type qui, classiquement, figurent sur les calculatrices. L'une des touches donne la valeur de σ, tandis que l'autre donne la valeur « corrigée » $\sqrt{\frac{n}{n-1}} \times \sigma$, où n est la taille de la série : l'auteure précise – sans parler bien sûr d'estimateur sans biais – qu'il s'agit là d'une quantité qui permet de « connaître les caractéristiques d'une population tout entière à partir des caractéristiques d'un échantillon », pratique qui a cours, indique-t-elle, en matière de contrôle de qualité par exemple, pour estimer la variance d'une population dont on ne peut guère examiner qu'un échantillon de petite taille (quand n est grand, $\sqrt{\frac{n}{n-1}}$ est proche de 1 et le problème perd de son acuité). La seconde remarque concerne la physionomie de « la courbe en cloche » représentative de la densité d'une loi normale de moyenne $\bar{x}$ et d'écart type σ : le pourcentage des « cas » compris entre $\bar{x} - \sigma$ et $\bar{x} + \sigma$, puis entre $\bar{x} - 2\sigma$ et $\bar{x} + 2\sigma$, enfin entre $\bar{x} - 3\sigma$ et $\bar{x} + 3\sigma$ est respectivement égal à 68,27 %, 95,45 % et 99,75 %. La fin de la section est allouée à des considérations qui rapprochent et distinguent moyenne et médiane. Le problème général, écrit l'auteure, est de remplacer une série $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par une série constante $a, a, \ldots, a$, et cela de façon que la « distance » entre la série initiale et la série constante cherchée soit la plus petite possible. Cette « proximité », annonce l'auteure, peut être mesurée de deux façons : par la somme des carrés des écarts $\sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2$, et l'on obtient alors pour a la moyenne arithmétique $\bar{x}$; ou par la somme des écarts absolus $\sum_{i=1}^{n} |x_i - a|$, laquelle est minimale lorsque a

[25] L'orthographe *Huyghens*, qu'utilise l'auteure, semble moins répandue que *Huygens*. Christiaan Huygens (1629-1695), *Christianus Hugenius* en latin, écrivait, paraît-il, son nom *Hugens*. Samuel Koenig ou König (1712-1757) était un physicien allemand qui vécut longtemps à Berne, où il se forma et enseigna.

est la médiane de la série. Cette dernière affirmation est alors illustrée sur le cas d'une série formée de deux termes distincts, puis de trois, enfin de quatre : sans qu'une démonstration en bonne et due forme soit proposée, le lecteur est ainsi initié au ressort de la démonstration. On notera que, par contraste, le premier résultat ($\bar{x}$ est l'unique valeur qui minimise $\sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2$) est énoncée sans plus de façon. Un petit bilan illustré réunit alors les indicateurs introduits jusque-là – moyenne, médiane, écart type et écart moyen. Trois séries de taille 5 sont examinées : la première (1, 2, 10, 11, 12) illustre ce fait que la moyenne est sensible aux valeurs extrêmes alors que la médiane ne l'est pas ; la deuxième série (8, 9, 10, 18, 19) a la même médiane que la première, le même écart type, le même écart moyen mais a une moyenne bien supérieure à celle de la première série. La troisième série (8, 9, 10, 11, 12), enfin, a toujours la même médiane mais la moyenne est cette fois égale à sa médiane avec un écart moyen et un écart type relativement réduits. L'auteure indique que les indicateurs calculés conduisent à penser que les termes de la série sont peu éloignés les uns des autres. On retrouve ici le caractère minimaliste de la présentation, qui rappelle davantage le style d'un aide-mémoire que celui d'un document destiné à alimenter un travail de fond sur les questions abordées.

La suite du chapitre 3 est consacrée à la notion de *sondage*. On y aborde la question du choix de l'échantillon en distinguant les tirages « exhaustifs ou sans remise » des tirages « bernoulliens ou non exhaustifs ou avec remise », distinction qui tend à s'effacer lorsque la taille N de la population devient très grande. Dans le cas d'une question qui appelle une réponse en *oui* ou *non*, le passage de l'échantillon à la population suppose, en une première étape, l'estimation de la proportion p de *oui* dans la population tout entière par la proportion f de *oui* dans l'échantillon. Mais cette estimation ponctuelle apporte une information fragile : en une deuxième étape on recherche un intervalle centré en f tel que la probabilité que p ne lui appartienne pas soit inférieure ou égale à un seuil α qui peut être égal à 5 % par exemple. La valeur α est le « seuil de confiance de l'estimation », tandis que $1 - \alpha$ est la probabilité que l'intervalle aléatoire centré en f que l'on a obtenu contienne la proportion p cherchée : $1 - \alpha$ est appelé pour cela « niveau de confiance de l'estimation ». Cette deuxième étape, nous dit l'auteure, appelle un détour, ou plutôt « une parenthèse ». Cette parenthèse ouverte, le paysage mathématique change brusquement. Le texte fait ici tout à coup référence à un modèle probabiliste des plus classiques sans doute mais avec lequel, très vraisemblablement, les lecteurs en principe visés n'ont pas, ou n'ont plus, une familiarité opérationnelle. Si X_i est la variable aléatoire qui vaut 1 si la réponse du *i*-ième individu est *oui*, la variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ suit une loi binomiale de paramètres n et p, en sorte qu'on a $E(S_n) = np$ et $V(S_n) = np(1 - p)$. Il en résulte aussitôt que, si l'on désigne par $F = \frac{S_n}{n}$ la variable aléatoire égale à la proportion de *oui* dans l'échantillon, on a $E(F) = p$ et $V(F) = \frac{p(1-p)}{n}$. Lorsque la taille n est assez grande (par exemple lorsque $n = 1000$), d'après le « théorème de la limite centrée » la loi de F est voisine de la loi normale de paramètres p et $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$; la variable aléatoire $T = \frac{F - p}{\sqrt{\frac{F(1-F)}{n}}}$ a donc une loi voisine de la loi normale centrée réduite, en sorte qu'on a par exemple $P\left(-1{,}96 \leq \frac{F-p}{\sqrt{\frac{F(1-F)}{n}}} \leq 1{,}96\right) = 0{,}95$, ce qui peut s'écrire encore

$$P\left(F - 1{,}96\sqrt{\frac{F(1-F)}{n}} \leq p \leq F + 1{,}96\sqrt{\frac{F(1-F)}{n}}\right) = 0{,}95.$$

L'expression obtenue est complexe ; étonnamment, le lecteur se voit gratifié ici d'une petite étude explicite. L'auteure note alors ceci [26] : « Dans le cas d'un sondage, F prend en général des valeurs comprises entre 0,3 et 0,7 ; en effet quand les avis sont très tranchés les sondages n'ont pas d'intérêt. » Façon un peu opportuniste de dire qu'on s'en tiendra au cas de fréquences comprises entre 0,3 et 0,7. Cela étant, $F(1 - F)$ est compris entre 0,21 et 0,25, si bien qu'on a : $1{,}96 \times \sqrt{\frac{F(1-F)}{n}} \approx 2 \times \frac{0{,}25}{n} = 2 \times \frac{0{,}5}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$. On a donc finalement :

$$P\left(F - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq F + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \approx 0{,}95.$$

On retrouve ainsi la fourchette proposée par le programme de seconde dans la présentation du « thème d'étude » (TEL) consacré à la simulation d'un sondage.

Le chapitre 4 de la brochure examinée a pour titre *Fluctuation d'échantillonnage*. S'ouvre par cela une suite de chapitres couvrant, sous l'angle de la simulation, le programme de seconde, y compris les TEL. En préambule, il est souligné que, pour ce faire, on suppose qu'a été observée une suite assez longue de lancers de pièces de deux francs : dans une classe de seconde de 35 élèves, chaque élève réalisant et observant le résultat de 50 lancers, on se munit ainsi d'une liste de 1750 résultats. Il n'y a là encore aucun usage du générateur pseudo-

[26] Le lecteur se rappellera les commentaires de l'auteur anonyme cité dans la section 5 de ce chapitre, à propos des valeurs 0,3 et 0,7 concernant l'expérience des bouts de ficelle.

aléatoire d'une calculatrice ou d'un ordinateur : les lancers sont de « vrais lancers », même si ceux qui apparaissent dans la brochure semblent « parfois tellement proches du modèle probabiliste qu'ils donnent l'impression d'être "truqués" ». Le chapitre 4, cependant, ne traite que du phénomène de fluctuation d'échantillonnage. Trois séries de 100 lancers sont reproduites, auxquelles s'ajoutent trois autres séries ayant respectivement pour taille 103, 203, 257. Le travail opéré sur ces séries consiste d'abord à calculer la fréquence d'apparition du côté pile sur les séries de 100 lancers avant de passer à des séries de 200 lancers, puis de 300 lancers, etc. Les résultats observés, reproduits dans le tableau ci-après, ne sont sans doute pas ceux qu'attendaient l'auteure.

Nombre de lancers	100	200	300	403	606	863
Fréquence des piles	0,510	0,475	0,473	0,464	0,482	0,481

Cette dernière écrit en effet : « J'ai envie de dire que la pièce que j'ai utilisée n'était pas parfaitement équilibrée, elle semble privilégier les faces. » On a sans doute là un des obstacles typiques que l'auteure devrait aider ses lecteurs – et, par leur truchement, leurs élèves – à surmonter, mais sur lequel elle trébuche quelque peu elle-même : l'étonnement devant l'ampleur des fluctuations d'échantillonnage quand on en reste à des échantillons de petites tailles [27]. Le chapitre, fort bref, se termine par l'introduction de la calculatrice comme fournisseur de nombres aléatoires. En l'espèce, l'auteure présente un échantillon de taille 120 dans lequel la fréquence d'apparition de pile est 0,53, valeur qui lui paraît sans doute bien proche de la valeur « théorique » et suscite donc ce commentaire :

> Cette simulation a l'inconvénient de supposer que la pièce est parfaitement équilibrée. La touche *random* repose en effet sur le concept que chaque chiffre de 0 à 9 a la même chance d'apparaître et puisque on associe pile aux chiffres 0, 1, 2, 3, 4 et face aux autres, les chances d'apparition de pile et de face sont les mêmes. C'est pourquoi à mon avis il faut commencer par une expérience manuelle.

Il semble que l'auteure regrette ici le phénomène qu'elle avait cru pouvoir constater – à tort – lors du lancer d'une pièce, laquelle, on l'a vu, se révélait à ses yeux n'être pas « parfaitement équilibrée » : la surprise de découvrir une loi de fréquences singulière, s'écartant de façon peu prévisible de la loi uniforme – comme s'il n'en allait pas fondamentalement de même avec les

[27] L'auteure aurait eu avantage à conduire une petite étude en termes d'intervalle de confiance : toutes les fréquences qu'elle a observées sont en effet compatibles, au seuil de confiance de 5 %, avec le modèle de la « pièce équilibrée » : si l'on calcule les fourchettes correspondantes comme indiqué page 30 de la brochure qu'elle signe, on obtient successivement les intervalles [0,410 ; 0,610], [0,404 ; 0,545], [0,415 ; 0,530], [0,414 ; 0,513], [0,441 ; 0,522], [0,446 ; 0,515], qui tous contiennent la « valeur théorique » 0,5.

générateurs pseudo-aléatoires actuels, même quand ils sont conçus pour se rapprocher le plus possible de la production de chiffres « au hasard » [28]. La conclusion *didactique* qui clôt ce chapitre – « il faut commencer par une expérimentation manuelle » – est donc ici appuyée sur des considérations technologico-théoriques dont le bien-fondé reste incertain.

La brochure reproduit ensuite, à titre d'illustration, une partie des fiches publiées par le GTD portant sur le phénomène de fluctuation d'échantillonnage : ces encadrés, qui complètent le chapitre 4, font la transition vers le chapitre 5, intitulé, lui, *Jeux de pile ou face*. Ici, on s'intéresse, non à la fluctuation d'échantillonnage, mais à un autre type de phénomène, mesuré par la fréquence de « coups consécutifs égaux » – soit la fréquence, dans une série de lancers de pièces, de sorties consécutives de pile et de sorties consécutives de face. Ainsi une série de 100 lancers pourra-t-elle commencer comme suit : FF PPP FFF P FFF PPP FF… Le caractère observé prend, sur la série de taille 100 observée, les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. La moyenne arithmétique du caractère (mot qui n'est jamais employé) est égale, en ce cas, à 2,11, valeur empirique retrouvée sur une autre série de 100 lancers, tandis que la moyenne de la troisième série de 100 lancers est 2,14, les séries de taille 103, 203, 257 ayant respectivement pour moyenne 2,05 , 1,82, 2,05. Devant ces résultats, l'auteure conclut qu'il semble que « le nombre moyen de coups consécutifs égaux tourne autour de 2 », avant de livrer cette conclusion : « Cette simulation est particulièrement intéressante. Contrairement à ce qui se passait dans le chapitre précédent où les résultats étaient prévisibles, ici le calcul des probabilités est difficile [29]. Personnellement, je ne m'attendais pas à trouver 2, je pensais que la valeur serait plus élevée. » On notera aussi que l'ampleur de la fluctuation d'échantillonnage ne provoque pas l'émotion constatée au chapitre 4 : l'écart à l'espérance théorique – conjecturée mais non calculée – est une variable aléatoire dont l'étude par simulation mériterait davantage d'attention. Le chapitre 6 de la brochure que nous suivons porte le titre : *Lancer de deux pièces, lancer de deux dés identiques et distribution de la somme des faces*. Ce chapitre, indique-t-elle d'emblée, « est une bonne introduction aux probabilités ». Un profane en la matière pourra penser que, si on lance deux pièces, les trois

[28] Voir, dans le numéro 381 de *La Recherche* (décembre 2004), le dossier *Fabriquer le hasard* et notamment l'article de Benoît Rittaud, *L'ordinateur à rude épreuve*.

[29] La probabilité d'observer une série de longueur n est 2^{-n} ; l'espérance mathématique de la longueur d'une suite consécutive de sorties identiques est donc $\sum_{n=1}^{\infty} n2^{-n}$. Pour $x \in [0 ; 1[$, soit $\varphi(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$ Il vient $\varphi'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} + (n+1)x^n + \ldots$ On a : $\sum_{n=1}^{\infty} n2^{-n} = 2^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} n2^{-(n-1)} = 2^{-1}\frac{1}{(1-2^{-1})^2} = 2$.

cas possibles – deux fois le côté pile, deux fois le côté face, une fois le côté pile et une fois le côté face – ont la même chance d'apparaître. Or la simulation que l'on peut en faire – par exemple en employant le matériel aléatoire fourni par la série de 203 lancers du chapitre 4 – montre que les choses ne se passent pas ainsi : si on code les résultats par la somme obtenue en attribuant 0 au côté pile et 1 au côté face, la somme 0 apparaît dans environ 25 % des cas, la somme 2 également, mais la somme 1 apparaît, elle, dans quelque 50 % des cas. Le lancer de deux dés à 6 faces permettra, note l'auteure, de relancer le débat dans la classe entre les partisans de l'équiprobabilité et les autres. Mais le lancer de deux pièces lui paraît de nature à mieux mettre en évidence le phénomène de non-équiprobabilité car, écrit-elle, « la multiplicité des cas dans l'exemple des deux dés masque le phénomène ». Un calcul simple, mais qui ne pourra être conduit qu'en classe de première, permet de comparer les fréquences obtenues empiriquement aux valeurs théoriques que fournit la théorie des probabilités. L'auteure, qui a réalisé 150 lancers de deux dés identiques et calculé les fréquences empiriques d'une part, les fréquences théoriques d'autre part, constate la proximité de la distribution des fréquences empiriques observées et des fréquences théoriques calculées. D'une manière un peu implicite, elle paraît proposer à son lecteur d'introduire dès la seconde le type de comparaison auquel elle procède, le tableau des fréquences théoriques – c'est-à-dire des probabilités – étant alors, peut-on supposer, apporté par le professeur. Car de telles comparaisons, conclut-elle, sont « tout à fait accessibles à des élèves de seconde même indifférenciée *(sic)* ». Le chapitre 7 a un titre également prolixe : S*imulations de promenades aléatoires sur des lignes polygonales. Estimation du temps moyen*. Ce chapitre renvoie de manière explicite, à l'instar des autres, à l'un des TEL du programme de seconde. Il s'ouvre par des considérations sur l'idée de procéder à une simulation à l'aide de la touche *random* d'une calculatrice au lieu de lancer réellement des pièces – procédé qui est, reconnaît l'auteure, « relativement fastidieux ». C'est ainsi que, au lieu de lancer un dé à 6 faces, on peut se contenter d'utiliser l'affichage de la calculatrice en ne gardant que les chiffres de 1 à 6. Mais l'attention que porte l'auteure à la réalité des distributions aléatoires dans le monde qui nous entoure l'amène à nouveau à observer qu'une telle pratique ne peut être substituée au lancer d'un dé à 6 faces qui se trouverait être déséquilibré (et dont on chercherait alors à connaître la forme du déséquilibre) :

> Mais il faut faire attention : cette simulation n'a un sens que si on simule le lancer de dés à six faces « normaux ». Si on veut simuler le lancer d'un dé pipé, l'expérimentation manuelle est obligatoire. Elle va permettre de mettre en évidence des fréquences d'apparition de chacune des faces, de repérer la ou

les faces avantagées. Ensuite à partir de ces données recueillies manuellement, il faudra construire une expérimentation machine qui répondra à ces conditions.

Il y a là un thème insistant – celui du recueil empirique des données – qui se mêle d'une façon parfois ambiguë à l'évocation des chausse-trapes les plus communes de la modélisation probabiliste élémentaire. C'est ainsi que, évoquant le projet de simuler l'apparition d'une voiture blanche dans un flux automobile, l'auteure note que « l'expérience a deux issues », avant d'ajouter : « je ne peux pas pour autant la simuler avec le lancer d'une pièce puisque les deux issues "blanche" ou "pas blanche" n'ont pas la même probabilité d'apparition. » Et de conclure : « Il faudra d'abord des statistiques sur la proportion de voitures blanches dans le parc automobile, et en fonction des valeurs trouvées, je construirai ma simulation. » On en vient alors au thème de la simulation de promenades aléatoires sur des solides ou des lignes polygonales. L'auteure s'en tient à une promenade sur un *carré*, en soulignant que la mention, dans le programme de seconde publié, à une promenade sur un *cube* semble être le fruit d'un *lapsus calami* : le problème est en effet, dit-elle, « beaucoup plus complexe », et il lui semble même que Claudine Robert ait affirmé, lors d'une journée de présentation du programme, qu'il était en tout état de cause « trop difficile pour des élèves de seconde ». L'étude des promenades sur un carré réutilise le matériel aléatoire produit à l'occasion de travaux relatés au chapitre 4 – c'est-à-dire produit par des lancers effectifs de pièces. Une série de 100 lancers permet de simuler 31 promenades aléatoires permettant d'aller d'un sommet du carré au sommet opposé : le temps de parcours étant compté en nombre de coups, le temps moyen est de 3,12 coups. Si la sortie de pile correspond au parcours d'un côté du carré dans le sens des aiguilles d'une montre tandis que face correspond au parcours d'un côté en sens inverse, on peut remarquer, indique l'auteure sans plus de façon, qu'une promenade est terminée si et seulement si elle comporte un nombre *pair* de coups et si ses deux derniers coups sont de même nature (pile ou face) : ainsi en va-t-il par exemple dans les promenades codées PP, FF, PFFF, etc. On a là un moyen simple de découper, dans une série aléatoire de piles et de faces (ou de 0 et 1, etc.), des promenades aléatoires dont, en même temps, on met en évidence la durée. C'est ainsi que si l'on part de la suite FFPPPFFFPFFFPPPPF… on obtient les promenades aléatoires FF, PP, PFFF, PFFF, PP, PP, F... On obtient ainsi des durées moyennes de 4,46 pour 22 parties et de 4,68 pour 44 parties (après avoir obtenu, on l'a noté, une moyenne de 3,12 pour 31 parties). Cette fluctuation de la moyenne ne fait pas, ici, l'objet de davantage de commentaires ; mais à nouveau le calcul des probabilités est sollicité : l'espérance du temps de parcours est trouvée égale à 4, précise l'auteure, qui, à l'instar de la fiche correspondante du GTD de mathématiques, mais de manière peut-être plus argumentée, explicite le calcul nécessaire. Une promenade en 10 pas, par exemple, se scinde en 4 promenades de 2 pas qui, partant de A, reviennent en A, et une ultime promenade qui va de A en C. Chacune de ces promenades de 2 pas a une probabilité égale à $\frac{1}{2}$, en sorte que la promenade complète a une probabilité de $\left(\frac{1}{2}\right)^5$. De façon plus générale, une promenade en $2p$ pas a une probabilité égale à $\left(\frac{1}{2}\right)^p$. Le temps moyen pour aller de A en C est donc [30] : $E(t = 2p)$ $= \sum_{p=1}^{\infty} 2p \times 2^{-p} = \sum_{p=1}^{\infty} p \times 2^{-(p-1)} = 4$.

Le chapitre 8 s'intitule *Simulations de naissances*. Il reprend l'argument de la fiche du GTD intitulée *Politique nataliste* en réduisant l'étude au cas de familles d'au plus 4 enfants avec arrêt des naissances après le premier garçon. À nouveau, le stock de nombres aléatoires disponible est mis à contribution. Le nombre moyen d'enfants par famille obtenu ainsi par simulation est de 1,97, alors qu'un calcul probabiliste simple donne pour espérance 1,875. La question de savoir si une législation visant à produire le comportement de procréation modélisé ici engendrerait un déséquilibre entre filles et garçons dans la population est soulevée : la manière même dont la simulation a été réalisée – à partir de sorties supposées équiprobables de 0 et de 1 (de piles et de faces, etc.) permet de répondre aussitôt par la négative – comme nous l'avions vu déjà en commentant la fiche correspondante du GTD. La conclusion fait observer en outre que la simulation obtenue par des lancers de pièces aurait pu l'être tout aussi bien avec un dé – la sortie d'un nombre impair désignant un garçon, celle d'un nombre pair, une fille. Le chapitre 9 reprend, sous le même titre, la fiche du GTD intitulée *Le lièvre et la tortue*. La technique déjà plusieurs fois mobilisée permet d'observer que, sur 76 parties, la tortue n'a gagné que 29 fois, le lièvre gagnant 47 fois, et que, de même, sur une série de 137 parties, la tortue a gagné 42 fois et le lièvre 92 fois [31]. Judicieusement, l'auteure note : « il semble bien que la tortue soit désavantagée » – ce qu'un calcul théorique confirme puisque la probabilité que la tortue gagne, égale à $\left(\frac{5}{6}\right)^6$, lui donne environ un tiers des chances d'emporter la victoire. Le chapitre se termine, à nouveau, par la reproduction

[30] Le calcul utile a déjà été mené (voir la note précédente). Soulignons que, en revanche, l'auteure écrit comme allant de soi l'égalité $\sum_{p=1}^{\infty} p \times 0{,}5^{p-1} = \frac{1}{(1-0{,}5)^2}$.

[31] On aura remarqué que $42 + 92 = 134 \neq 137$. Les trois parties manquantes semblent indiquer que le dénombrement « manuel » devient très rapidement peu fiable. Un décompte soigneux montre qu'il y a en fait 43 parties gagnées par la tortue et 94 par le lièvre.

d'éléments figurant dans les fiches du GTD, en l'espèce les tableaux donnant les résultats de la simulation de 1000 courses entre le lièvre et la tortue. Ainsi arrive-t-on au chapitre 10 : ce dernier chapitre de la brochure est intitulé *Les bouts de ficelle* et reprend explicitement la matière de l'article paru dans le numéro du *Bulletin de l'APMEP* de novembre-décembre 1999. L'auteure y souligne d'abord l'intérêt, du point de vue de l'éducation à la citoyenneté, d'une initiation à la notion de sondage, en illustrant son propos d'un exemple : un candidat à de prochaines élections a recueilli 51,4 % des intentions de vote d'un échantillon de 1000 personnes interrogées ; au niveau de confiance 0,95, la fourchette est alors approximativement $\left[0{,}514-\frac{1}{\sqrt{1000}}\,;\,0{,}514+\frac{1}{\sqrt{1000}}\right]$, soit à peu près [0,482 ; 0,546], en sorte que l'élection du candidat n'est nullement assurée ! Le chapitre aborde ensuite l'expérience des bouts de ficelle. Il semble à cet égard que l'auteure ait eu accès à des données non publiées dans l'article du *Bulletin de l'APMEP* puisqu'elle reproduit l'un des 140 échantillons de taille 80 extraits de la population des 782 mesures issues de la première coupe, puis fait apparaître en un tableau les pourcentages de coupes trop longues dans chacun des 140 échantillons, précisant en outre, chaque fois, la fourchette correspondante calculée à partir de la formule [32] établie au chapitre 3. La connaissance de ces 140 moyennes d'échantillons permet de vérifier empiriquement la signification du seuil de confiance : il y a ainsi trois échantillons sur 140 pour lesquels la fourchette de sondage au seuil de 5 % ne contient pas la vraie valeur, ce qui en fait ne représente que 2,14 % des 140 échantillons. Le chapitre se clôt sur la reproduction des représentations graphiques des fourchettes de sondage que propose la fiche du GTD consacrée à ce thème. En dépit du souci apparent qu'a l'auteure des distributions statistiques « réelles », l'expérimentation des bouts de ficelle est ici l'unique référence à une étude statistique « complète » (depuis la constitution du corpus de données empiriques jusqu'à la vérification d'une prédiction théorique), ce qui est assez peu, mais ce qui, il est vrai, se conforme au programme publié. Notons encore que, pour cette auteure, l'expérience des bouts de ficelle permettrait « de traiter l'ensemble du programme de seconde : la partie descriptive, la fluctuation d'échantillonnage et enfin (…) les fourchettes de sondage ».

La brochure se termine par une sélection bibliographique divisée en trois rubriques. Sous l'intitulé *Brochures*, elle comporte d'abord douze titres contenant, outre l'article paru dans le *Bulletin de l'APMEP* de novembre-décembre 1999, des productions sur les

[32] Rappelons que l'auteur de l'article du *Bulletin de l'APMEP* notait que cette formule, qui est supposée d'un emploi légitime seulement lorsque la proportion observée est comprise entre 0,3 et 0,7 ; l'auteure de la brochure examinée ici est muette sur ce point.

probabilités, la statistique et leur enseignement réalisées dans divers IREM ou dues à l'activité de la commission inter-IREM « Statistique et probabilités ». Une deuxième rubrique recense six articles parus dans la revue *Repères-IREM*. Plus curieusement, la troisième rubrique s'intitule *Ouvrages de réflexion sur les statistiques* : elle comporte cinq titres qui relèvent simplement d'une élaboration non strictement ordonnée à l'enseignement dans les collèges et lycées, tel le livre de Claudine Robert paru en 1995 ou le volume de la série Schaum consacré à la statistique. Cette bibliographie fait apparaître un mouvement centrifuge, depuis le noyau de la noosphère le plus proche du quotidien des professeurs jusqu'aux premières couches de l'univers savant ou demi-savant de la statistique des producteurs ou utilisateurs spécialistes. À cet égard on pourra méditer sur la distance qui sépare le travail commenté ici de celui qu'avaient effectué en leur temps Paul-Louis Hennequin et Louis Guerber. Dans l'ouvrage paru en 1967, les apports extérieurs à l'école affluaient pour nourrir le curriculum scolaire ; dans l'opuscule publié à l'automne 2000, on voit plus nettement fonctionner un filtre – qui laisse passer certains éléments mais en refoule d'autres –, ce dispositif fonctionnant de façon nettement excentrée par rapport à la production et à l'utilisation non scolaires des connaissances et savoirs statistiques.

6. Un écho à l'Académie des sciences

Les changements qui se préparent se font sans doute dans le monde protégé de l'enseignement secondaire et dans les couches les plus proches de sa noosphère. Mais l'écho s'en fait entendre très au-delà : sous le titre *La statistique*, l'Académie des sciences rend en effet public en juillet 2000 un rapport issu de l'activité d'un groupe de travail présidé par Paul Malliavin. Le quatrième et dernier chapitre de cette publication est intitulé *Formations et métiers de la statistique*. Après une courte introduction, il comporte un exposé d'Yves Escoufier sur « La formation à la statistique ». Suivent alors deux pages et demie signées de Daniel Schwartz, qui répondent à un titre mentionnant explicitement la question qui nous occupe ici : *Statistique et citoyenneté : l'enseignement de la statistique dans les collèges et les lycées*. Sur les quatre références que l'auteur propose à l'issue de son texte, deux concernent la réforme qui va entrer en vigueur : il s'agit d'une part de l'article de Claudine Robert paru dans le *Bulletin de l'APMEP* de novembre-décembre 1999, d'autre part du numéro hors série du *BOEN* contenant les nouveaux programmes de mathématiques applicables à la classe de seconde à la rentrée 2000. Daniel Schwartz rappelle que, si le groupe de travail estime insuffisant le temps alloué à l'étude de la statistique en seconde (un huitième du temps total alloué aux mathématiques), il souligne aussi que « l'Académie des sciences ne peut que souhaiter le succès de cette difficile entreprise ». Le travail engagé a été marqué notamment par une table ronde, tenue le 17 mai 1999 à Grenoble par l'ASU (association pour la statistique et ses utilisations), où Claudine Robert a présenté le « projet d'avenir français », jugé par l'auteur susceptible de combler la « lacune française » puisqu'à la fin du lycée les élèves seraient en principe équipés de ce que Daniel Schwartz appelle « les notions de base du mode de pensée statistique ». Dans la même période – de mars à juin 1999 –, l'auteur du texte examiné a impulsé dans l'académie de Versailles, nous l'avons vu, « une expérimentation pilote » appuyée par la fondation « La science statistique [33] ». Les professeurs et, à les en croire, leurs élèves, note Daniel Schwartz, « se sont déclarés satisfaits voire enthousiastes de l'expérimentation ». Sans doute une telle réalisation, dont il est souhaité qu'elle se répète en d'autres académies avec un plus grand nombre de classes encore, vise à susciter « une véritable modification dans l'état d'esprit du plus grand nombre », ce pour quoi sans doute il faudra mettre en œuvre « de multiples approches ».

Le problème posé, tel que le perçoit Daniel Schwartz, n'est pas trivial. La « pensée statistique » est insuffisamment diffusée, écrit-il, et cela dans tous les pays. Mais le phénomène affecte la France d'une manière toute particulière. Tout d'abord, dit-il, « les Français ont un esprit rigoureux » et cela ne les aident pas dans leur rapport à « l'incertain ». Mais, de manière plus spécifique encore, on peut noter que la pensée statistique suppose de percevoir avec « acuité » le jeu de deux contraires, « la moyenne et la variance, le collectif et l'individuel ». Or c'est là que les dés sont pipés : à ce jeu, les Anglais sont privilégiés et se révèlent donc « doués pour la statistique ». En d'autres pays, la discipline collective étouffe les individualités, ce qui pèse sur le développement de la statistique. Mais en d'autres pays encore, comme la France, c'est l'inverse qui a lieu : « le sens de l'individualité l'emporte trop sur le sens de la collectivité », empêchant ainsi la diffusion du mode de pensée statistique. Daniel Schwartz souligne à cet égard un premier fait qu'il voit comme une conséquence de ces idiosyncrasies de la société française : la difficulté du développement de l'épidémiologie en France, où cette science a été inventée, mais n'a pu se développer comme elle le fera un peu plus tard dans les pays anglo-saxons. Là n'est pas la seule conséquence négative d'un manque de sensibilité à la dialectique du collectif et de l'individuel. L'attitude des médias vis-

[33] Créée par décret en date du 1er août 1927, cette fondation a pour objet de contribuer au développement de la recherche et de l'enseignement de la statistique et de promouvoir ses applications. Reconnue d'utilité publique, elle est actuellement présidée par Edmond Malinvaud, professeur honoraire au Collège de France et ancien Directeur Général de l'INSEE. (Voir http://www.sfds.asso.fr/metiers/c_meti01.htm.)

à-vis des sondages lui apparaît comme un symptôme de cette même faiblesse de la pensée statistique commune – ce que l'exemple donné par Pascale Pombourcq reproduit plus haut suffit à illustrer. Mais il y a beaucoup plus grave : la mortalité des Français entre 25 et 44 ans est le *double* de celle des Anglais du même âge, précise l'auteur, qui ajoute que cette triste performance française est particulièrement sensible en ce qui concerne les causes de mortalité justiciables de la prévention (sida, alcoolisme, accidents de la circulation, cancers liés au tabagisme). Or, souligne-t-il, « l'esprit de la prévention est indissociable de la pensée statistique », affirmation à propos de laquelle il trouve le secours d'un auteur qui, dans un livre consacré à la santé publique française [34], écrit : « Ce n'est évidemment pas le fruit du hasard si l'Angleterre est à la fois un pays de grande tradition statistique et dotée d'un appareil de santé publique particulièrement développée. » La conclusion découle aisément des quelques considérations précédentes : « le mode de pensée statistique doit absolument faire partie des connaissances du citoyen. » Pour cela, l'inculcation de ce mode de pensée doit commencer tôt, dès le lycée et même dès le collège. Or aujourd'hui, note encore Daniel Schwartz, « en sortant du lycée, nos élèves ignorent ce que sont la variabilité, les fluctuations d'échantillonnage, l'échantillon représentatif, une différence significative, la causalité dans le domaine de l'incertain ». Et de conclure : « Cet état de choses devrait changer. » Ce credo résume ce que l'ouvrage publié en 1994 – *Le jeu de la science et du hasard* – explicitait plus à loisir. On en retiendra une ambition et une espérance : celle d'une meilleure appréhension du mode de pensée statistique, du domaine de l'incertain et du variable dans la culture française.

Ce combat, dont Schwartz note que « l'issue est… incertaine », passe par une mise à jour de l'enseignement des mathématiques. Car, selon le texte du rapport de l'Académie des sciences, les responsables de l'enseignement de la statistique au collège et au lycée doivent être « les professeurs de mathématiques ». Le principe posé vient buter sur un obstacle qui n'est que trop connu : les professeurs, note l'auteur, « sont très peu préparés à cette tâche ». Et c'est une urgence première que de leur donner une formation adéquate, notamment pour ce qui est des jeunes professeurs. Le projet est cohérent, et sans doute à la hauteur d'enjeux cruciaux dans l'évolution de la société. Mais tout n'est pas encore déterminé. Comment l'école va-t-elle réagir et assumer un projet dont les promoteurs, en dépit de leur engagement, sont très loin d'avoir pris la mesure des conditions et contraintes effectives sous lesquelles sa réalisation devra s'effectuer ?

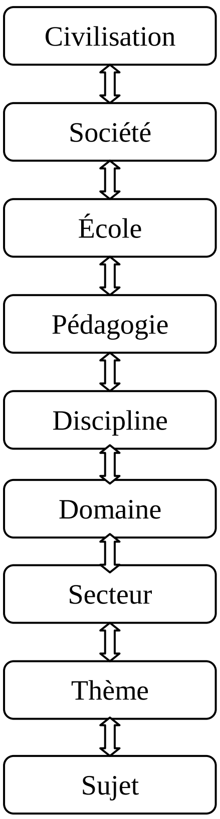
[34] Aquilino Morelle, *La défaite de la santé publique* (Paris, Flammarion, 1996).

Chapitre 4

Enseigner la statistique : conditions et contraintes

1. Niveaux de détermination didactique

On reprend ici un schéma introduit par Yves Chevallard dans plusieurs publications dont la plus récente [1] fournit l'état le plus développé, que nous reproduisons ci-après.



L'idée essentielle derrière ce schéma est que, lorsque le professeur et les élèves se rencontrent dans la classe autour du savoir à enseigner – par exemple autour d'un savoir statistique –, ce qu'il peut advenir est déterminé par des conditions et des contraintes qui ne sauraient se réduire à celles identifiables immédiatement dans la classe – disponibilité de tel ou tel matériel, de tel logiciel, de telle organisation temporelle, connaissances du professeur, etc. –, même si, bien évidemment, ces contraintes et conditions-là jouent un rôle éminent dans le « travail » de détermination. L'échelle des niveaux de détermination didactique est d'abord un outil exploratoire, qui doit aider à identifier des conditions que, à s'en tenir aux fictions institutionnelles établies, on pourrait craindre d'oublier. On l'utilisera ci-après dans cette perspective, sans prétention d'exhaustivité, avec un objectif premier d'illustration des divers niveaux actuellement recensés.

Le niveau supérieur se réfère, comme on le voit, à une notion qui, hormis en quelques usages polémiques, est peu sollicitée aujourd'hui, celle de *civilisation*. De façon volontairement minimaliste, on entendra ici, sous ce nom, un ensemble de complexes praxéologiques présents et mobilisés dans un *ensemble* de sociétés qui, du point de vue de ces praxéologies-là, sont regardées comme apparentées. La notion de civilisation ainsi entendue participe de la dialectique de la *différence spécifique* et du *genre* *prochain* [2]. La civilisation à laquelle appartient une société donnée – la société française, la société britannique, etc. – est ainsi le genre prochain par rapport auquel chacune des sociétés particulières qui en sont partie prenante marque sa différence spécifique : la distinction entre société et civilisation est en quelque sorte distinction de l'autre au sein du même. Les changements civilisationnels sont souvent des changements historiques de longue durée qui modifient en profondeur l'humus praxéologique, même quand ils se produisent subrepticement pour ceux qui en sont les contemporains. S'agissant du paradigme statistique, on peut ainsi noter qu'il existe une très ancienne tension dans les sociétés méditerranéennes entre le souci de dénombrer et l'interdit portant sur une telle opération. Dans les *Nombres*, quatrième livre du *Pentateuque*, on lit ainsi [3] :

> Yahvé parla à Moïse, au désert du Sinaï […]. Il dit : « Faites le recensement de toute la communauté des Israélites, par clans et par familles en comptant les noms de tous les mâles, tête par tête. Tous ceux d'Israël qui ont vingt ans et au-dessus, aptes à faire campagne, vous les enregistrerez toi et Aaron selon leurs formations au combat. »

Ce recensement aboutit au dénombrement de 603 550 hommes de troupe. Quarante ans après la sortie d'Égypte, un autre recensement est ordonné par Yahvé (*Nombres*, 26) ; le chiffre obtenu, 601 730, est peu différent du premier, bien que la population ait été entièrement renouvelée entre temps, puisque la première population recensée avait entièrement péri au désert, à deux exceptions près, dont Josué [4]. Si ces recensements ordonnés par Yahvé sont légitimes, il n'en n'est pas toujours ainsi : Yahvé lui-même l'y ayant poussé en un moment de courroux, David commande un recensement, contre l'avis de son chef d'état-major, Joab, pour qui on ne peut compter les hommes comme on compte des troupeaux (2 *Samuel*, 24). On trouve cette fois qu'Israël compte 800 000 hommes de troupe, et Juda 500 000. Mais David se repent et dit à Yahvé : « C'est un grand péché que j'ai commis ! Maintenant, Yahvé, veuille pardonner cette faute à ton serviteur car j'ai commis une grande folie. » Pour punition, il doit alors choisir entre trois châtiments : sept ans de famine, trois mois de défaites ou trois jours de

[1] Voir Chevallard (2004a).

[2] La distinction remonte au moins à Aristote, qui distingue en fait trois « genres » : le genre *prochain* (qui n'a en dessous de lui que des espèces : ainsi, un fauteuil est un siège d'une espèce particulière), le genre *éloigné* (qui englobe d'autres genres : le siège est un meuble), et le genre *suprême* (qui n'est englobé dans aucun autre : un meuble est un objet).

[3] Nous adoptons ici et dans tout ce qui suit la version française de la *Bible de Jérusalem* (la citation qui suit se trouve dans *Nombres 1*). Voir http://bibliotheque.editionsducerf.fr/par%20page/84/TM.htm.

[4] Nous suivons ici l'étude de Jacqueline Hecht, *L'idée de dénombrement jusqu'à la Révolution* (Hecht, 1977).

peste. Il choisit trois jours de peste. Soixante-dix mille hommes du peuple meurent avant que Yahvé n'arrête la main de l'ange exterminateur ! Les choses vont encore autrement dans le premier livre des *Chroniques* (1 *Chroniques*, 21) ; car, cette fois c'est Satan qui incite David au dénombrement ! Le recensement aboutit à des chiffres nouveaux : 1 100 000 hommes « tirant l'épée » pour Israël, 470 000 pour Juda. À nouveau David sera pardonné. Mais ces événements ne seront pas oubliés. « La mémoire collective, observe Jacqueline Hecht, gardera longtemps le souvenir de la malédiction attachée au dénombrement, la civilisation occidentale n'en acceptera le principe qu'avec difficulté. Au Moyen Âge chrétien saint Ambroise et saint Augustin condamneront le péché d'orgueil commis par David. » D'une manière générale, il existe ainsi une très ancienne tension entre les pouvoirs établis, qui veulent connaître – David les personnifie –, et la sacralité populaire de ce qui est à connaître – la matière humaine – qui porte à voir dans le geste qui dénombre une forme d'impiété.

Au plan civilisationnel, il faut sans doute élargir le propos et prendre plus de champ encore. Dans un article fameux publié en 1948, *Du monde de l'« à-peu-près » à l'univers de la précision* [5], Alexandre Koyré (1902-1968) a souligné la répugnance de la culture grecque antique à regarder comme quantifiable notre monde sublunaire (comme opposé au monde céleste). Dans le monde terrestre, note-t-il, la précision est illusoire, l'à-peu-près est la règle. La métrologie antique est un art limité, et qui ne cherche guère à dépasser ses limites. Ce n'est que lentement que la mesure, tout à la fois en tant que condition de possibilité de la connaissance du monde sublunaire et comme ensemble un peu hétéroclite de procédés et d'instruments techniques, va se constituer. D'une façon plus générale, on avancera ici que tout progrès dans la mesure du monde se heurte à trois obstacles solidaires : tout d'abord, un postulat immémorial d'impossibilité de la mesure (notamment quand la grandeur à mesurer est réputée non définie) ; ensuite, une succession illimitée de difficultés objectives, historiquement vécues et difficilement dépassées, touchant à la définition de la grandeur à mesurer et au système conceptuel et instrumental de mesurage ; enfin, une interprétation tout aussi traditionnelle du projet de mesurer, vu comme violence faite au monde, parce que la mesure serait contemporaine d'une volonté de chosification du mesuré. Il s'agit là d'un ensemble d'obstacles que la civilisation des sociétés méditerranéennes et celles qui en sont issues n'ont surmonté que peu à peu, en même temps que s'élargissait toujours davantage l'empire du mesurable. Nous ne doutons pas aujourd'hui que chacun de nous ait une taille, ou un poids, bien que la première comme le second ne cessent de « bouger » (au cours d'une

[5] Cet article est reproduit dans les *Études d'histoire de la pensée philosophique* (Koyré, 1971, pp. 341-342).

même journée par exemple : nous sommes à cet égard, malgré les réifications de la culture, indéfiniment plongés dans un monde de l'à-peu-près). À l'extrême opposé, beaucoup de nos contemporains rejetteraient d'un haussement d'épaules l'idée qu'on puisse mesurer la beauté d'une personne, même si, il est vrai, la chose se discute [6]. En position médiane entre ces deux extrêmes – la mesure « évidente » et la mesure « évidemment impossible », pour une culture donnée –, on peut situer aujourd'hui la « mesure de l'intelligence », que, en dépit de la tradition psychométrique amorcée par Alfred Binet (1857-1911) et poursuivie jusqu'à aujourd'hui, beaucoup de nos contemporains refusent, au moins en France où, en même temps, nombreux sont pourtant les parents qui s'inquiètent du QI de leur enfant ! Peut-être est-il possible de situer les différentes cultures sur une échelle qui irait de l'indifférence à la quantification, voire de l'horreur face au nombre-mesure, jusqu'à la passion pour l'appréhension chiffrée du monde. L'indifférence, on l'a suggéré, imprègne les civilisations antiques et la culture grecque tout particulièrement. Dans son livre *Origines et développement de la science grecque* (1990), l'helléniste Geoffrey Lloyd souligne ainsi le cas de l'ouvrage d'Aristarque, *Des grandeurs et des distances du soleil et de la lune*, qui date du IIIe s. av. J.-C. : pour le diamètre angulaire de la lune, Aristarque choisit comme hypothèse une valeur notoirement inexacte ; or, note Lloyd, selon toute probabilité, cette erreur s'explique, non par une incapacité à effectuer les observations sommaires qu'appelait l'obtention d'une approximation grossièrement exacte, mais simplement par le fait qu'il s'intéressait moins aux résultats concrets, aux dimensions et aux distances (qu'il exprime d'ailleurs en proportions, non en valeurs) qu'aux aspects purement géométriques du problème. Cette indifférence tranquille se mue chez d'autres en horreur. Ce qu'on peut qualifier ainsi avec un peu d'emphase, nous l'avons rencontré tout près de nous (à l'échelle de l'histoire des civilisations), avec l'opposition farouche, qui court du fameux docteur Double jusqu'à Claude Bernard lui-même, aux premiers efforts pour quantifier l'abord de la maladie. Par contraste, la passion pour la quantification du monde apparaît souvent cynique, irrespectueuse, supposant une position de surplomb par rapport à la chose quantifiée. Un exemple historique violent est celui de la règle des trois cinquièmes adoptée le 12 juillet 1787 par la convention constitutionnelle des États-Unis. Le débat datait de 1783 : fallait-il continuer à répartir l'impôt en fonction de la valeur des terres, alors que les États sous-évaluaient systématiquement cette donnée afin de réduire leur contribution ? L'idée de prendre pour critère la population fit son chemin mais butait sur la prise en compte de la population des esclaves. Les représentants du

[6] Voir ainsi le site http://www.physicsforums.com/showthread.php?t=11947&page=1&pp=15.

nord proposèrent le rapport de quatre pour trois – quatre esclaves valant trois hommes libres – tandis que ceux du sud avançaient le rapport de deux à un, voire le rapport de quatre à un ! James Madison, qui sera le quatrième président des États-Unis d'Amérique (1809-1817), proposa le rapport de cinq à trois. Les États approuvèrent, à l'exception de deux d'entre eux, ce qui suffit à bloquer la situation. Ce n'est qu'un peu plus tard, en 1787, que la suggestion de Madison fut reprise, et cette fois, adoptée. Elle est connue dans l'histoire américaine sous le nom de « compromis des trois cinquièmes » (*3/5 compromise*). En conséquence de cette règle, le premier congrès des États-Unis d'Amérique offrit aux États du sud 45 % des sièges, ce qui surestimait leur importance et eut notamment pour effet que, tout au long de la première partie du XIX^e^ siècle, les États-Unis eurent pour président des propriétaires d'esclaves. Après la guerre civile américaine, le compromis des trois cinquièmes fut aboli avec l'adoption du 14^e^ amendement en 1868. D'une certaine façon, et même si les choses sont complexes, ce compromis pouvait être résumé en disant que *« each slave was considered three-fifths of a person »*. On a ici un cas presque pur où un groupe doté d'une autorité tenue pour légitime – les représentants des différents États – montre sa capacité à quantifier le monde en s'interrogeant certes sur la mesure – un esclave noir vaut-il la moitié d'un patricien blanc, ou le quart, ou les trois quarts ? –, mais en ne doutant pas de la légitimité de principe de la quantification !

Dans la suite des siècles l'évolution de la réponse apportée à la question de la quantification du monde naturel et social constitue un changement civilisationnel fondamental. Toutes les sociétés emportées par un tel mouvement ne le diffracte pas de la même manière. Ajoutons : toutes les Écoles au sein d'une société donnée ne s'en font pas l'écho de la même façon. La construction du « phénomène statistique » dans le monde occidental est certes un fait d'ensemble marqué tout à la fois par une résistance foncière à la quantification du monde et par de soudaines avancées accompagnées souvent de véritables « frénésies statistiques [7] ». En Europe les choses s'accélèrent au XVII^e^ siècle. L'Allemagne voit le renouvellement de la *Staatenkunde*, cette forme de statistique qui, paradoxalement, fait souvent l'économie de données chiffrées dans la description des États. Il en va encore ainsi pour ce qu'un professeur de droit international et de sciences politiques de Göttingen, Gottfried Achenwall (1719-1772), enseigne sous le nom de *statistique* – un mot qu'il popularise, mais par lequel il désigne encore la « science de la constitution de l'État ». Bien qu'il entende par là l'inventaire de tout ce qu'un État peut contenir de remarquable, il n'utilise

[7] Voir par exemple Hecht (1977) et Bédarida (1977).

pas plus de données chiffrées que ne le faisait, à Helmstedt, au siècle précédent, Hermann Conring (1606-1681), dont les notes de cours furent publiées en 1677. Le recours à l'information chiffrée ne devient véritablement de mise qu'avec le successeur d'Achenwall à Göttingen, A. L. Schlözer (1735-1809), qui publie en 1804 une *Theorie der Statistik*. Le goût de la description du monde, évident dans la tradition de la *Staatenkunde*, aurait pu se croiser avec le recours aux dénombrements et la présentation des résultats chiffrés sous forme de tableaux, usage typique de ce qu'on appellera bientôt la *Tabellenstatistik*, la « statistique des tableaux », qui avait été inaugurée au siècle précédent par l'*arithmétique politique* anglaise et se trouvait alors poussée en avant pas divers auteurs, dont le danois Anchersen (1700-1761), qui publiera en 1741 son *Statuum cultiorum in tabulis*. Pourtant, la chose ne se fit pas. Ainsi que le souligne Jacqueline Hecht à la suite de l'historien Harald Westergaard (1853-1936), « une violente polémique opposa les tenants des deux tendances dans les premières années du XIX^e siècle, les uns traitants les autres de "valets des tableaux" (*Tabellenknechte*), incapables de revêtir la sèche ossature de la statistique de descriptions reflétant la vivante réalité. » Dans une forme désormais sécularisée – il ne s'agit plus d'opposer le caractère sacré du monde et l'impiété de sa « mise en chiffres » –, on retrouve ici la tension entre l'effort de quantification et le refus du quantitatif, accusé de n'être *que* du quantitatif. Mais on retrouve en même temps la spécification d'un mouvement de longue durée et de vaste ampleur. L'Allemagne peine à suivre ce qui s'est dessiné en Angleterre dès la deuxième moitié du XVII^e siècle sous le nom d'arithmétique politique, art de « raisonner par des chiffres sur les objets relatifs au gouvernement [8] ». L'œuvre fondatrice, ici, est attribuée à l'humble John Graunt (1620-1674), qui publie en 1662 un opuscule intitulé *Natural and Political Observations upon the Bills of Mortality*. Mais la figure de proue de ce mouvement est son ami William Petty (1623-1687), qui énonce en ces termes le déplacement de paradigme en train d'être opéré [9] :

> La méthode que j'emploie dans ce but n'est pas encore très commune car, au lieu de me servir seulement de termes au comparatif et au superlatif et d'arguments purement rationnels, j'ai adopté la méthode (comme spécimen de l'arithmétique politique que j'ai longtemps eu en vue) qui consiste à s'exprimer en termes de nombres, poids et mesures.

Petty est notamment passionné par les questions de population. Il estime ainsi le nombre de maisons à Londres à 88 000 en 1686 et arrive, pour la population londonienne, au chiffre de 695 000 habitants. Variant les procédés de calcul, il obtient par une autre voie un chiffre peu

[8] Jacqueline Hecht attribue cette définition à Charles Davenant (1656-1714).

[9] Cité *in* Hecht, art. cit., p. 49.

différent : 696 360. Derrière cet intérêt se profile une révolution conceptuelle dont la statistique enseignée est l'héritière à son insu [10]. La notion – communément acceptée aujourd'hui – qui nous fait concevoir la population d'un territoire comme le nombre de personnes présentes à un moment donné sur ce territoire demeure longtemps absente de l'outillage mental : le dénombrement de la *population* n'existe pas véritablement. Nous avons vu ainsi que les recensements évoqués par le texte biblique portait sur les hommes « tirant l'épée », non sur *l'ensemble* de la population. De même, remarque le démographe Hervé Le Bras [11], « on estime par exemple que le nombre des habitants de l'Attique au temps de Périclès était dix fois plus élevé que celui des citoyens (de l'ordre de 30 000) car, outre les esclaves, une multitude de statuts ne bénéficiaient pas de la citoyenneté (femmes, périèques, métèques, artisans, etc.) ». Lorsque Platon, dans *les Lois*, fixe à 5 040 le nombre des chefs de famille dans la cité idéale [12], il ne définit pas pour autant ce que Petty et ses contemporains appellent *the number of the people*, puisque chaque famille comporte femme, enfants, esclaves, etc. Le passage de la forme ancienne de recensement au souci de la population tout entière est en effet contemporain d'un changement civilisationnel profond. Le mot de population lui-même apparaît pour la première fois à la fin des *Political Discourses* (discours politiques) publiés en 1752 par David Hume (1711-1776). C'est l'aboutissement lexical d'un travail conceptuel dont l'un des temps forts se trouve dans le *Léviathan* (1660) de Thomas Hobbes (1588-1679), au début du chapitre XIII, où on lit ceci [13] :

---

[10] Nous suivons ici Le Bras (2002).

[11] *Op. cit.*, p. 12.

[12] Le nombre retenu, 5040, a pour premier mérite de posséder un grand nombre de diviseurs (à savoir les 60 entiers ci-après : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 28, 30, 35, 36, 40, 42, 45, 48, 56, 60, 63, 70, 72, 80, 84, 90, 105, 112, 120, 126, 140, 144, 168, 180, 210, 240, 252, 280, 315, 336, 360, 420, 504, 560, 630, 720, 840, 1008, 1260, 1680, 2520, 5040). Platon écrit notamment : « … nous ne pouvions choisir une exactitude supérieure à celle de ce nombre de 5040, puisque, jusqu'à 12 en commençant par 1, il possède toutes possibilités de partage exact, hormis celle de 11. Encore cette exception admet-elle le plus simple des remèdes, puisqu'il suffit de mettre à part deux foyers familiaux pour lui rendre la santé d'une exacte divisibilité dans les deux sens » (cité *in* Itard, 1961, p. 214). On aura observé que $5040 - 2 = 11 \times 458$.

[13] « La nature a fait les hommes si égaux quant aux facultés de leur corps et de leur esprit que, bien qu'on puisse parfois trouver un homme manifestement plus fort corporellement, ou d'un esprit plus prompt qu'un autre, néanmoins, tout bien considéré, la différence d'un homme à un autre n'est pas si considérable qu'un homme puisse de ce chef réclamer pour lui-même un avantage auquel un autre ne puisse prétendre aussi bien que lui. En effet, pour ce qui est de la force corporelle, l'homme le plus faible en a assez pour tuer l'homme le plus fort, soit par une machination secrète, soit en s'alliant à d'autres qui courent le même danger que lui. » (Traduction *in* Le Bras, 2002, p. 15.)

> NATURE hath made men so equal in the faculties of body and mind as that, though there be found one man sometimes manifestly stronger in body or of quicker mind than another, yet when all is reckoned together the difference between man and man is not so considerable as that one man can thereupon claim to himself any benefit to which another may not pretend as well as he. For as to the strength of body, the weakest has strength enough to kill the strongest, either by secret machination or by confederacy with others that are in the same danger with himself.

Hervé Le Bras commente dans les termes suivants ce passage décisif, dû à la plume du maître de William Petty (qui fut un temps son *amanuensis*, son secrétaire particulier) [14] :

> Paragraphe remarquable et terrible car il fonde négativement l'égalité sur l'égale possibilité de nuire à son prochain dont dispose chaque homme dans l'état de nature. À partir du moment où les hommes sont égaux, ils peuvent être additionnés et l'on peut parler de leur nombre. L'obstacle qui empêchait de concevoir une population dans l'Antiquité est levé par cette nouvelle conception de l'égalité originelle. Insistons sur la nécessité d'une définition de l'égalité des hommes pour les compter et pas seulement sur leur regroupement selon un caractère commun. Le fait que les hommes marchent et parlent par exemple ne suffit pas à les compter ensemble dans *la Politique* d'Aristote ou dans *la République* et *les Lois* de Platon.

La « mise à égalité » de *tous* les hommes est fondamentale pour qu'on puisse parler de la population des hommes. Le Bras le souligne par cet exemple simple mais très suggestif [15] :

> Si l'on décide de compter dans son panier le nombre de légumes que l'on a achetés au marché, on ne dira jamais que l'on dispose de 2340 légumes dont 1 chou-fleur, 3 concombres, 18 pommes de terre et 2318 petits pois. Chaque objet a la qualité de légume, mais les relations d'égalité ne sont possible qu'à l'intérieur de chaque catégorie de légumes : il existe un nombre de petits pois, un nombre de concombres, de pommes de terre, mais pas un nombre de légumes. De même, dans l'Antiquité, on pouvait donner un nombre d'esclaves, un nombre de métèques ou de citoyens, mais pas un nombre d'hommes.

C'est sur l'innovation conceptuelle qu'apporte Hobbes que Petty va alors construire son arithmétique *politique*. Celle-ci installera dans la culture des « puissants » l'idée de calcul politique et social, qui triomphera au siècle des Lumières et sera à l'origine des développements ultérieurs de la « statistique » – un mot qui, dans la troisième édition de l'*Encyclopædia Britannica* (1797), se substitue à l'ancienne appellation que le XVII^e^ siècle finissant avait popularisée.

---

[14] *Op. cit.*, p. 15.

[15] *Ibid.*

L'Angleterre du XIX^e^ siècle est, entre toute les nations européennes, la terre d'élection de la passion statistique. Le régime parlementaire qui y prévaut apparaît comme un facteur important de développement du souci et des travaux statistiques [16]. La pénétration de la culture statistique dans les milieux éclairés britanniques procède à travers les nombreuses *sociétés de statistique* qui se créent, plutôt que par le biais d'enseignements universitaires qui n'existeront que très tardivement – Francis Galton (1822-1911) ou Walter Franck Raphaël Weldon (1960-1906) enseignaient la biologie, non la statistique, par exemple. Il ne fait pas de doute que l'attention à la société et à ses problèmes qui cherchait à la fois à se nourrir et à s'outiller par le biais d'études statistiques eut au Royaume-Uni un impact culturel plus marqué que sur le continent, et en particulier en France. Il est remarquable, à cet égard, que le dramaturge irlandais George Bernard Shaw (1856-1950), qui recevra le prix Nobel de littérature en 1925, ait pu consacrer à des réflexions sur la statistique une partie non négligeable de sa substantielle *Preface on Doctors* qui accompagne sa pièce de 1909 intitulée *The Doctor's Dilemma*. Il y reproche en particulier aux médecins leur rusticité scientifique, écrivant à ce propos [17] :

> It does happen exceptionally that a practising doctor makes a contribution to science (my play describes a very notable one); but it happens much oftener that he draws disastrous conclusions from his clinical experience because he has no conception of scientific method, and believes, like any rustic, that the handling of evidence and statistics needs no expertness.

Hostile à certaines évolutions de la politique de santé publique, Shaw s'en prend avec causticité aux emplois partisans ou biaisés de la statistique, comme dans le passage suivant [18] :

---

[16] Voir Bédarida (1977).

[17] « Il arrive exceptionnellement qu'un médecin praticien fasse une contribution à la science (ma pièce en décrit un fort remarquable) ; mais il arrive plus souvent encore qu'il tire des conclusions désastreuses de son expérience clinique parce qu'il n'a aucune notion de la méthode scientifique et croit, comme un quelconque rustaud, que le maniement d'éléments de preuve et de statistiques ne nécessite aucune connaissance. »

[18] « Même des statisticiens formés comme tels ne parviennent pas toujours à voir à quel point les statistiques peuvent être viciées par les hypothèses tacites de ceux qui s'en font les interprètes. Leur attention est bien trop occupée avec les astuces plus grossières de ceux qui font un usage perverti des statistiques dans un but publicitaire. Il y a par exemple l'astuce du pourcentage. Dans un certain hameau, tout juste assez grand pour avoir un nom, deux personnes sont touchées lors d'une épidémie de variole. L'un meurt : l'autre guérit. L'un a une marque de vaccination : l'autre n'en a pas. Immédiatement, les pro-vaccins ou les anti-vaccins publient la triomphale nouvelle qu'à tel endroit, pas une seule personne vaccinée n'est morte de la variole tandis que 100 % de ceux qui ne l'étaient pas vaccinés sont morts misérablement ; ou, suivant le cas, que 100 % des non-vaccinés

Even trained statisticians often fail to appreciate the extent to which statistics are vitiated by the unrecorded assumptions of their interpreters. Their attention is too much occupied with the cruder tricks of those who make a corrupt use of statistics for advertising purposes. There is, for example, the percentage dodge. In some hamlet, barely large enough to have a name, two people are attacked during a smallpox epidemic. One dies: the other recovers. One has vaccination marks: the other has none. Immediately either the vaccinists or the antivaccinists publish the triumphant news that at such and such a place not a single vaccinated person died of smallpox whilst 100 per cent of the unvaccinated perished miserably; or, as the case may be, that 100 per cent of the unvaccinated recovered whilst the vaccinated succumbed to the last man. Or, to take another common instance, comparisons which are really comparisons between two social classes with different standards of nutrition and education are palmed off as comparisons between the results of a certain medical treatment and its neglect. Thus it is easy to prove that the wearing of tall hats and the carrying of umbrellas enlarges the chest, prolongs life, and confers comparative immunity from disease; for the statistics show that the classes which use these articles are bigger, healthier, and live longer than the class which never dreams of possessing such things. It does not take much perspicacity to see that what really makes this difference is not the tall hat and the umbrella, but the wealth and nourishment of which they are evidence, and that a gold watch or membership of a club in Pall Mall might be proved in the same way to have the like sovereign virtues. A university degree, a daily bath, the owning of thirty pairs of trousers, a knowledge of Wagner's music, a pew in church, anything, in short, that implies more means and better nurture than the mass of labourers enjoy, can be statistically palmed off as a magic-spell conferring all sorts of privileges.

Par contraste il ne semble pas que la question de la statistique et des statistiques ait été abordée dans un cadre culturel large dans le cas de la société française. Il y eut, certes, bien des opposants à l'usage des statistiques. Ainsi en va-t-il au XIX^{e} siècle, pour des raisons

---

ont guéri alors que ceux qui étaient vaccinés ont succombé jusqu'au dernier. Pour prendre un autre exemple connu, on fait passer des comparaisons qui sont en réalité des comparaisons entre deux classes sociales avec des usages différents en matière de nourriture et d'éducation pour des comparaisons entre un certain traitement médical et l'absence de traitement. Ainsi il est facile de prouver que le port de hauts-de-forme et de parapluies élargit la poitrine, prolonge la vie et procure une certaine immunité contre la maladie ; car les statistiques montrent que, dans les classes où l'on utilise ces articles, on est plus développé, en meilleure santé et on vit plus longtemps que dans la classe où l'on ne rêve même pas de posséder de telles choses. Il ne faut pas beaucoup de perspicacité pour voir que ce qui fait réellement la différence, ce n'est pas le haut-de-forme ni le parapluie, mais la fortune et la nourriture dont ils sont une preuve, et qu'on pourrait montrer aussi bien qu'avoir une montre en or ou être membre d'un club à Pall Mall ont les mêmes vertus souveraines. Un diplôme universitaire, un bain quotidien, la possession de trente paires de pantalons, une certaine connaissance de la musique de Wagner, un banc à l'église, tout ce qui, en résumé, signifie davantage de moyens et de meilleurs soins que ce dont jouit la masse des travailleurs, peut statistiquement passer pour une formule magique conférant toutes sortes de privilèges. »

chaque fois différentes [19], de l’économiste Jean-Baptiste Say (1767-1832), du mathématicien, physicien et économiste Antoine Augustin Cournot (1801-1877) ou de l’économiste mathématicien Léon Walras (1834-1910). Ainsi en va-t-il encore de groupes sociaux ou professionnels – médecins ou ingénieurs – qui résistent parfois rudement à l’emploi des statistiques. À l’inverse, nous le savons, d’aucuns se font les chantres du recours à la statistique, tel l’économiste François Simiand, qui repense et illustre, dans l’entre-deux-guerres, l’usage de la statistique dans les sciences sociales, thème sur lequel il s’exprime notamment dans une conférence donnée en 1921 à la Société statistique de Paris et qui fera l’objet d’une publication dès 1922 sous le titre *Statistique et expérience* [20]. Mais il s’agit là du cercle un peu étroit des savants plutôt que des milieux éclairés et du monde des puissants. La culture statistique reste ainsi peu diffusée et surtout peu débattue dans le grand public cultivé : c’est une affaire de spécialistes, et souvent de tâcherons.

Aujourd’hui encore, la société française porte les stigmates de la pauvreté historique de la diffusion des connaissances statistiques et du débat en la matière. Le contraste est saisissant avec d’autres pays, notamment l’Angleterre et, plus largement, le monde anglo-saxon [21]. Examinons ainsi un numéro du quotidien *USA Today*, journal populaire de

[19] Voir Ménard (1977).

[20] Voir Bouvier (1977).

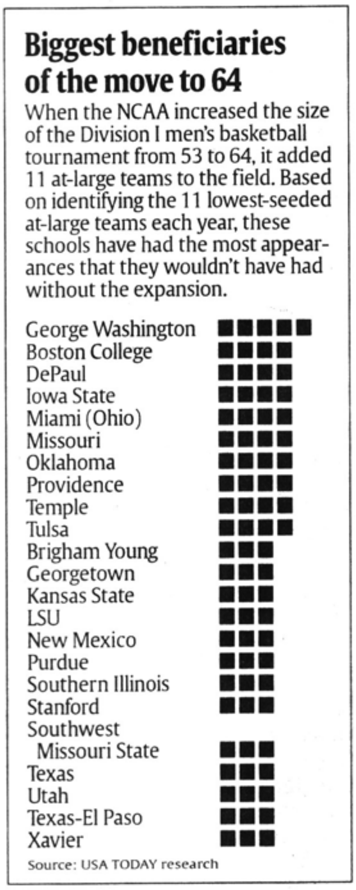
[21] On trouve dans la culture de langue anglaise un grand nombre de citations, humoristiques ou sérieuses, sur la statistique et les statistiques, phénomène qu’illustre ce petit florilège que nous livrons au lecteur en version originales : “The plural of anecdote is not data.” (Roger Brinner) // “The generation of random numbers is too important to be left to chance.” (Robert R. Coveyou) // “It is easy to lie with statistics, but it is easier to lie without them.” (Frederick Mosteller) // “We make decisions in the dark of data.” (Stu Hunter) // “An approximate answer to the right question is worth a good deal more than the exact answer to an approximate problem.” (John Tukey) // “First get your facts; then you can distort them at your leisure.” (Mark Twain) // “Errors using inadequate data are much less than those using no data at all.” (Charles Babbage) // “A knowledge of statistics is like a knowledge of foreign languages or of algebra; it may prove of use at any time under any circumstances.” (Arthur L. Bowley) // “Do not put faith in what statistics say until you have carefully considered what they do not say.” (William W. Watt) // “Statistics are like a bikini. What they reveal is suggestive, but what they conceal is vital.” (Aaron Levenstein) // “A judicious man uses statistics, not to get knowledge, but to save himself from having ignorance foisted upon him.” (Thomas Carlyle) // “The invalid assumption that correlation implies cause is probably among the two or three most serious and common errors of human reasoning.” (Stephen Jay Gould) // “The manipulation of statistical formulas is no substitute for knowing what one is doing.” (Hubert M. Blalock, Jr.) // “If your result needs a statistician then you should design a better experiment.” (Ernest Rutherford) // “Facts are stubborn, but statistics are more pliable” (Mark Twain) // “In ancient times they had no statistics so they had to fall back on lies.” (Stephen B. Leacock) // “He uses statistics as a drunken man

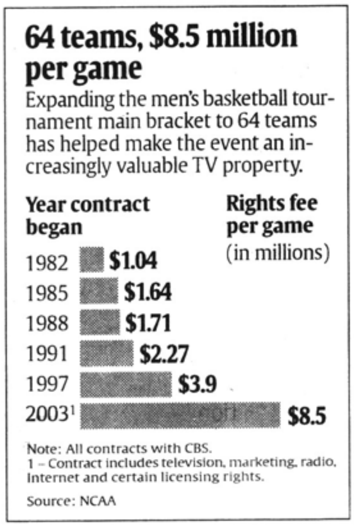
qualité [22], du point de vue de l'information chiffrée et de son accompagnement de graphiques et de commentaires. La première page de l'édition du vendredi 11 mars 2005, qui est l'édition du week-end, comporte une rubrique intitulée *USA Today Snapshots®*, consacrée ce jour-là à la production mondiale de cacao : on y voit les principaux pays producteurs, dont les productions sont présentées sous la forme d'un histogramme.

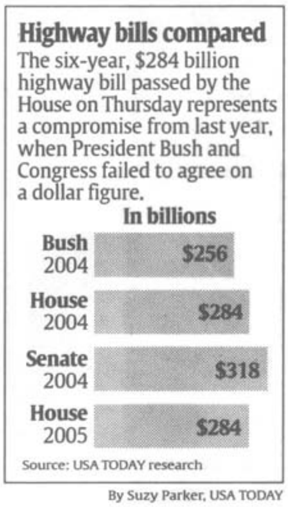
De même, en page 2A, apparaissent quatre encadrés concernant le basket-ball : on les a reproduits ci-après.

uses lamp posts – for support rather than for illumination." (Andrew Lang) // "It is now proved beyond doubt that smoking is one of the leading causes of statistics." (Fletcher Knebel) // "Definition of Statistics: The science of producing unreliable facts from reliable figures." (Evan Esar).

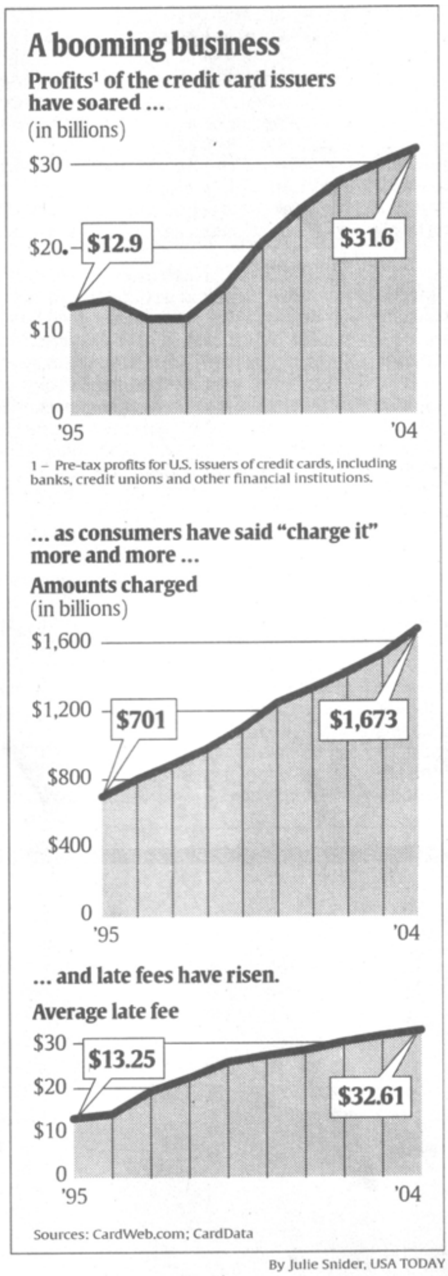
[22] Diffusé à plus de 2 200 000 exemplaires en 2001, *USA Today* se classe en tête des quotidiens américains devant le *Wall Street Journal*, *The New York Times*, etc.



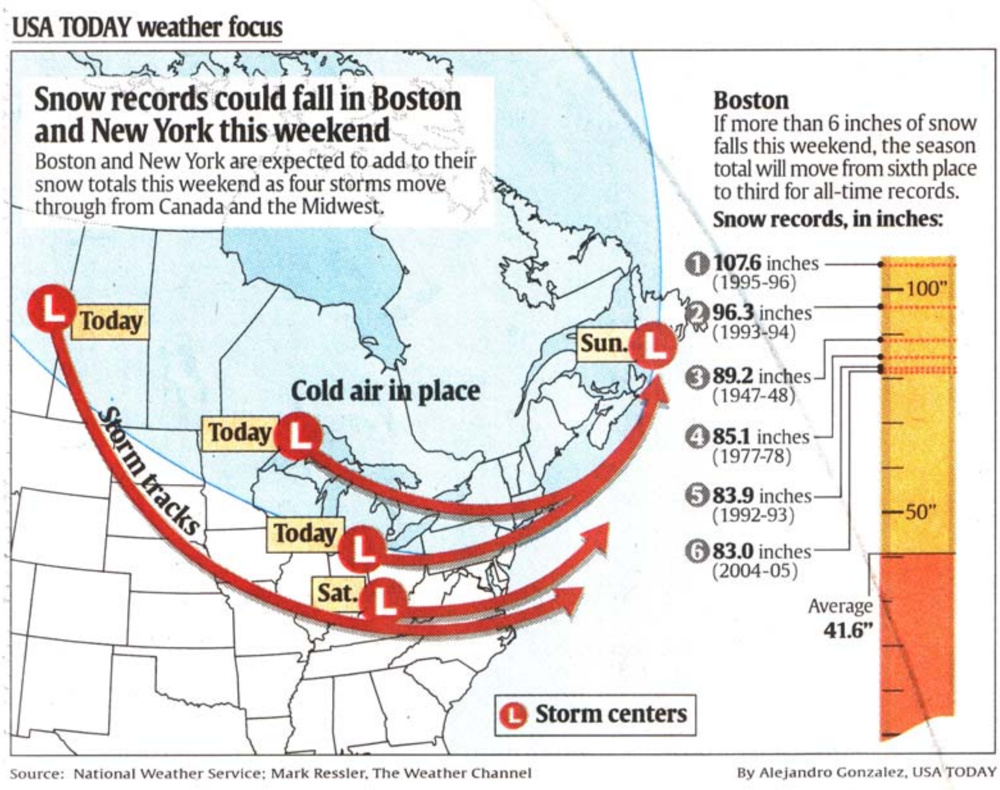




En page 6A apparaît un nouvel encadré (ci-dessus, à droite), consacré cette fois à la comparaison des budgets votés au cours des récentes années pour l'amélioration des conditions de circulation dans le pays. Ici on notera que, comme dans l'un des encadrés précédents, la source indiquée – « *USA Today research* » – fait apparaître que la recherche des données a été effectuée par le quotidien lui-même. Soulignons corrélativement que l'information chiffrée qui est représentée par des barres est relativement simple à conceptualiser ; il n'en est que plus révélateur que le journal ait cru bon de présenter ces indications à part, diagramme à l'appui. En page 10A, dans un article intitulé *Life in Iraq* et sous-titré *A weekly status report*, un encadré (ci-dessous, à gauche) propose au lecteur le prix de certaines denrées en comparant les prix en Irak et aux États-Unis. On notera que les variétés d'orange et de pommes auxquelles se réfèrent les données présentées sont précisées : pour les pommes, par exemple, il s'agit de la variété *Red Delicious*. En page 12A, un article sur les cartes bancaires est accompagné de l'encadré ci-dessous à droite.



La page 14A est consacrée à la météo (ci-après). Elle regorge de données cartographiques ou chiffrées et contient notamment un encadré qui met l'accent sur un aspect particulier des conditions météorologiques. Ce jour-là, on s'y intéresse aux tempêtes de neige, et notamment au record d'enneigement à Boston au cours des dernières décennies. Il est remarquable de voir proposer au lecteur une présentation stylisée de la distribution des quantités de neige annuelles tombées sur une période de temps qui n'est pas véritablement précisée mais qui est censée être fort longue (le texte parle de « *all-time records* »). La moyenne se situe à 41,6 pouces ; les 83 pouces tombés à Boston dans l'hiver 2004-2005 jusqu'au vendredi 11 mars exclu se situent en *sixième* position. Si la tempête de neige attendue pour le week-end aboutissait à une chute d'un peu plus de 6 pouces, l'hiver 2004-2005 viendrait occuper la *troisième* place devant l'année 1947-1948 où étaient tombés à Boston 89,2 pouces de neige. Quoi qu'il en soit, l'hiver 2004-2005 peut d'ores et déjà être regardé comme l'un des plus enneigés des soixante dernières années.



La même page météo contient une autre information intéressante pour notre propos : dans une rubrique intitulée *Ask the experts*, une question est posée à un spécialiste. En l'espèce, la question examinée a trait aux normales météorologiques : on la reproduit ci-après ainsi que la réponse correspondante [23].

[23] Dans notre chapitre 6, nous verrons comment un manuel de seconde aborde cette question.

Ask the experts

Today's expert is Anne Waple, research climatologist with NOAA's National Climatic Data Center in Asheville, N.C. Send your questions to: askjack@usatoday.com

When meteorologists talk about "climate normals," what are they referring to?

They are climate data averaged over three consecutive decades; the current climate normal is from 1971 to 2000. For example, when meteorologists say that this month was two inches wetter than the climate normal, they mean it was two inches wetter than this month's mean, calculated from 1971 to 2000. Sometimes the word "normal" is erroneously used to refer to the "average" or "mean."

More online: askjack.usatoday.com

L'édition du vendredi est complétée par différents cahiers appelés « sections ». La section B est intitulée *Money*, la section C est consacrée aux sports, la section D est intitulée *Life*, de même que la section E. Nous en extrayons sans commentaire une sélection de quelques ensembles de données chiffrées et de représentations graphiques.

Statin drug sales

How sales of statin drugs compare:

	2004 sales (in billions)	Change from 2003
Crestor	$0.6	1,031.1%
Lipitor	$7.7	13.6%
Lescol XL	$0.2	13.5%
Zocor	$4.6	4.4%
Pravachol	$2.0	-1.8%
All statins	**$15.5**	**12.0%**

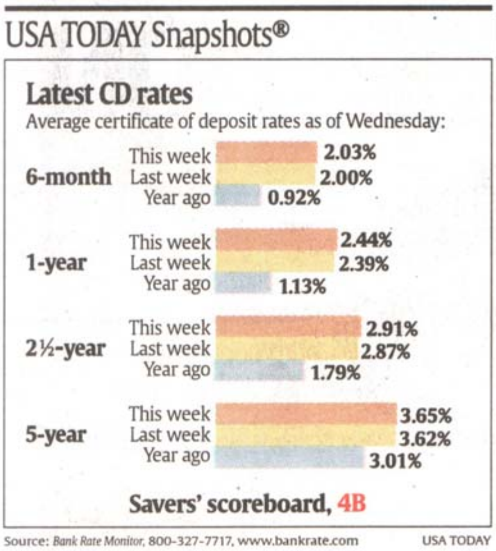
Source: IMS Health, IMS National Sales Perspectives, February 2005

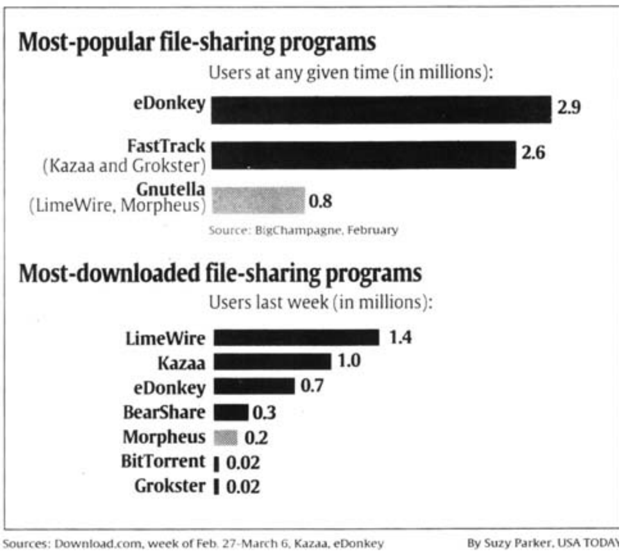
Holding onto cash

These top-performing, bargain-hunting funds have 10% or more of their portfolio in money market securities, or cash.

Fund, ticker	Total return[1] 2005	5 yrs.
Delafield Fund, DEFIX	0.8%	166%
Phoenix Mid-Cap Value A, FMIVX	2.6%	163%
Janus Mid Cap Value, JMCVX	1.5%	120%
SunAmerica Focus 2000 Val A, SSSAX	0.6%	119%
Pimco PEA Value A, PDLAX	-1.6%	118%
Average stock fund	**-0.1%**	**9%**

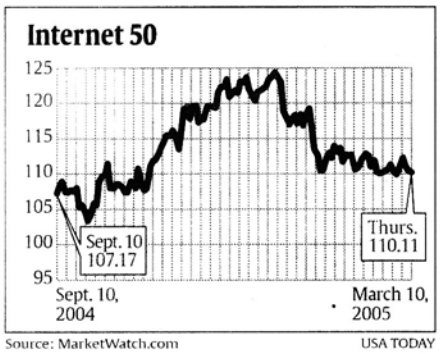
1 – Dividends, gains reinvested through March 3. Source: Lipper



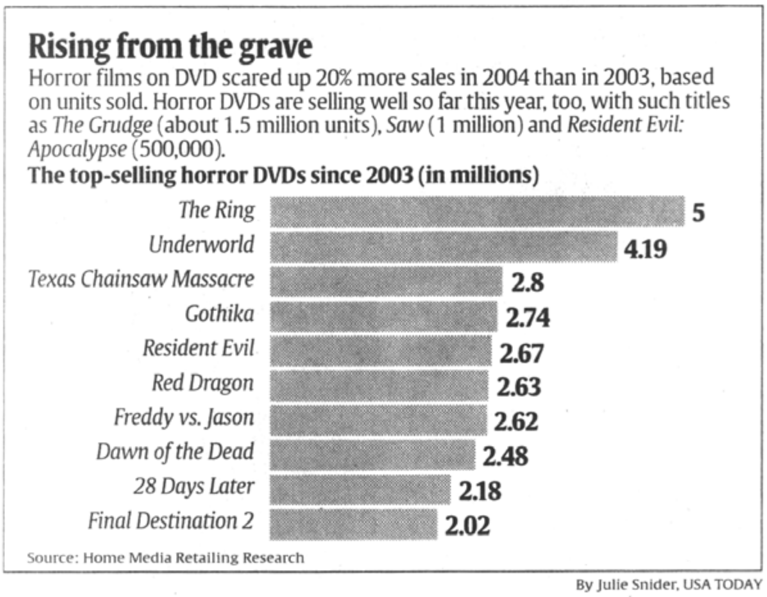


USA TODAY Internet 50 index

The USA TODAY Internet 50 is a capitalization-weighted index that consists of the e-Consumer 25 and the e-Business 25. The indexes are benchmarked at 100 as of Dec. 31, 2001. The components are updated quarterly.



	Thurs.	Chg.	Pct. chg. Day	2005
Internet 50	110.11	–0.28	–0.3%	–11.0%
e–Business 25	96.70	0.20	0.2%	–7.3%
e–Consumer 25	154.97	–1.80	–1.1%	–17.4%



Par contraste, ce qu'offre un quotidien français comme *Libération*, par exemple, apparaît on ne peut plus pauvre. Ainsi ne trouve-t-on guère, dans l'édition du mercredi 23 mars 2005, hormis des graphiques relatifs au CAC 40, que le tableau ci-après, sans aucune représentation graphique d'aucune sorte et sans indication de source.

Croissance du PIB en 2004 (1)

Chine	+9,2 %	UE	+2,2 %
Inde	+6,9 %	Royaume-Uni	+3,2 %
Etats-Unis	+4,4 %	France	+2,3 %
Brésil	+4 %	Zone euro	+1,9 %
Mexique	+4 %	Allemagne	+1,7 %
Japon	+2,6 %	(1) Estimations.	

De fait, à la relative profusion des médias états-uniens s'oppose, dans les principaux médias destinés au grand public, la rareté française en matière de statistiques, sous forme numérique ou graphique. Le souci de « nombrer », le souci surtout de faire apparaître des données chiffrées comme éléments de séries numériques, l'attention portée à la dialectique de la valeur singulière et de l'ensemble des valeurs où elle se situe semblent être demeurés, dans le système français, à un niveau incomparablement plus bas que celui observable dans un pays de riche culture statistique comme les États-Unis. On va voir que cette différence entre sociétés s'inscrit, au sein même de la société française, en y séparant ceux qui ont à connaître de la statistique, d'un côté, et, de l'autre, l'homme de la rue, voire « l'honnête homme », qui n'a avec les productions statistiques que de furtives et incertaines rencontres.

2. Les aléas de la distribution sociale des savoirs statistiques

La faible pénétration de la statistique dans la culture française « officielle », la non-familiarité avec le maniement statistique de l'information chiffrée doivent être regardés comme des données fondamentales qui imposent de sévères contraintes sur l'enseignement *général* de la statistique dans un cadre scolaire. Si la culture statistique n'a pas pénétré la culture de « l'honnête homme », quelle forme la distribution sociale des connaissances assume-t-elle ? N'étant pas de l'ordre de ce que chacun connaît, doit connaître ou même peut connaître, la statistique va recevoir le statut de « connaissance spéciale », utile et même indispensable dans certains groupes humains constitués autour d'une activité déterminée. Non pas savoir pour tous et chacun, mais savoir pour *certains*, seuls récipiendaires d'un complexe de savoirs à la distribution sociale erratique et discrète, voire à demi secrète, ou du moins capable de passer facilement inaperçue, parce que, même entre personnes qui savent, mais qui ne savent pas qu'elles partagent ce savoir, la communication est improbable et fait souvent place au silence. (Si A et B sont l'un et l'autre férus d'un certain domaine de savoir mais si ni l'un ni l'autre ne savent que l'autre est un familier du domaine, A hésitera à en faire mention devant B de peur de l'embarrasser ou de l'importuner ; et si, d'aventure, il venait à en faire mention, sans doute s'interromprait-il presque aussitôt, B ne le relançant pas en pensant que le fait d'entrer en discussion avec A sur ce thème pourrait mettre A en difficulté puisque lui, B, se sait un expert en une matière dont il pense que A ne la mentionne, par exemple, que par opportunisme culturel.) Autour d'un tel savoir, la société se tait. Lorsqu'elle parle, elle ne le fait qu'avec précautions, comme si l'ésotérisme supposé de la chose appelait une réserve motivée tant par la crainte de se montrer ignorant que par la crainte de se montrer irrévérencieux.

Selon une opposition classique, nous distinguerons la diffusion *générale* des connaissances statistiques de leurs diffusions *spéciales*, c'est-à-dire de diffusions ciblées, officiellement motivées par les besoins d'une certaine espèce d'activités, notamment dans le cadre des formations professionnelles. Si l'on examine alors un tant soit peu les diffusions spéciales de la statistique, on s'aperçoit que celles-ci sont multiples et diverses et se font à des niveaux d'étude ou de formation parfois fort différents, comme si la diffusion de la statistique ne posait pas de problème de *capacité de réception* de la part des publics visés et ne dépendait que de *la pertinence de cette diffusion auprès de ce public*. Illustrons d'abord le phénomène à propos de l'enseignement *agricole*, en nous arrêtant en premier lieu sur le plus humble niveau, celui du CAP agricole (CAPA) [24]. Les mathématiques entrent dans la préparation à ce

[24] Pour le programme, voir http://www.enfa.fr/r2math/math/progrm/CAPA/CAPA-MC2.PDF.

certificat pour un volume de 100 heures, dont 30 heures de TD. Le travail de formation prévu par le programme du module en question est censé développer trois grandes capacités « transversales à l'ensemble du module », qui doivent être mises en œuvre « quel que soit le contenu traité ». La capacité 2 a trait à la mobilisation et à l'utilisation des « techniques de résolution des problèmes », tandis que la capacité 3 porte sur la résolution de problèmes « issus de la vie courante et de situations techniques et professionnelles ». La capacité 1 permet *d'analyser des informations et de préparer leur traitement* : son lien avec la statistique est évident, même si, bien entendu, il n'est nullement exclusif. Le programme comporte cinq parties : Activités numériques, Géométrie, Algèbre, Notion de fonction, Statistique descriptive. La partie statistique est certes limitée, mais non négligeable : les candidats au CAPA doivent en principe pouvoir lire et réaliser des diagrammes de toutes sortes (en bâtons, en secteurs, etc.), calculer des effectifs et des fréquences (cumulés ou non), et calculer des moyennes. Notons toutefois qu'ils ne rencontreront pas – du moins de façon un tant soit peu formalisée – le phénomène de dispersion d'une série statistique [25]. Ce qui motive une telle diffusion spéciale est apparent dans les exemples d'activités proposés par le programme : celui-ci mentionne en effet explicitement l'utilisation de revues et de documents techniques intégrant des statistiques. Le professionnel qu'il s'agit de former, signifie-t-on ainsi, aura affaire à des données statistiques, ce qui justifie spécialement la diffusion du savoir statistique dans ce cadre de formation.

La classe de seconde professionnelle conduisant au BEPA (brevet d'enseignement professionnel agricole) est alimentée par des élèves issus de troisième et, en particulier, par des élèves sortant de troisième technologique, ainsi que par des élèves ayant obtenu le CAPA. La formation en mathématiques [26] tient en un module de 170 heures comportant 140 heures de mathématiques et 30 heures d'informatique. Le niveau en est modeste, avec une orientation « pratique » évidente, même s'il s'agit de permettre aux élèves qui le souhaitent de poursuivre leur scolarité, éventuellement, vers un bac professionnel. Hormis l'informatique, qui fait l'objet du titre VI du programme, le module est scindé en cinq parties : Activités numériques et algébriques ; Analyse ; Statistiques ; Géométrie plane ; Géométrie dans l'espace. Le programme de statistique est consacré à l'étude des séries à une variable. Y

[25] On voit ici la structure sociale et ses hiérarchies inscrire leur marque, discrètement, dans l'organisation scolaire de la diffusion des savoirs : par quel mécanisme mystérieux tel groupe d'utilisateurs des statistiques agricoles serait-il exempté de prendre en compte la dispersion des séries qu'il aura à considérer dans son activité professionnelle ?

[26] Pour le programme, voir http://www.enfa.fr/r2math/math/progrm/BEPA/PRG-BEPA.PDF.

figurent les paramètres usuels de position et de dispersion (y compris l'écart type). Par rapport à l'aggiornamento réalisé par les programmes rénovés des lycées d'enseignement général et technologique, le programme du BEPA date – à plusieurs égards. Ainsi n'est-il prévu de déterminer (graphiquement) que la médiane d'une série relative à une variable continue. L'oubli corrélatif de la détermination de la médiane d'une série relative à une variable discrète est d'autant plus frappant que l'utilisation de l'informatique est « fortement conseillée ».

Le BEPA permet à certains élèves d'accéder à la préparation du BTA (baccalauréat de technicien agricole), où ils retrouvent, en classe de première, des élèves issus de la seconde générale et technologique. En mathématiques [27], les élèves s'orientant vers le BTA doivent suivre un « module de base » de 105 heures auxquelles s'ajoutent des « séquences en exploitation, entreprise, milieu ». Le module s'intitule « connaissances mathématiques et traitement des données numériques et graphiques » : 90 heures en sont proprement dévolues aux mathématiques tandis que 15 heures sont réservées aux « sciences et techniques ». Les contenus mathématiques sont scindés en quatre volets : Algèbre, Suites et fonctions numériques, Géométrie, Statistiques. Dans cette dernière partie du programme, les élèves étudient les paramètres de position et de dispersion (étendue, écart type) d'une série univariée. Mais ils abordent aussi la représentation par un nuage de points d'une « série double » donnée, pour laquelle ils doivent être capables de proposer une approximation affine par la méthode des points moyens (la méthode des moindres carrés n'est pas au programme). On notera ici une tendance qui ne doit pas faire méconnaître, toutefois, qu'il s'agit là « d'enseignements spéciaux » : à mesure que l'on monte dans l'échelle tout à la fois académique et sociale des diplômes, les références « concrètes », manifestant la présence d'un univers professionnel déterminé, tendent à s'effacer, en même temps que la « rhétorique » curriculaire de l'enseignement secondaire *général* devient peu à peu dominante. Cette évolution se poursuit quand on passe au baccalauréat professionnel agricole, dont le programme est à la fois plus riche et davantage semblable à ceux du lycée général et technologique d'avant la réforme commencée à la rentrée 2000 [28]. En ce cas, le module « mathématiques et traitement de données » atteint un total de 125 heures dont 100 de mathématiques et 25 d'informatique. L'augmentation n'est pas négligeable mais elle ne change pas véritablement les ordres de grandeurs. Le programme de mathématiques

---

[27] Pour le programme, voir http://www.enfa.fr/r2math/math/progrm/BTA/B6-BTA.PDF.

[28] Voir http://www.enfa.fr/r2math/math/progrm/BACPRO/PRG-BACPRO.pdf.

proprement dit est scindé en quatre parties : Activités numériques et algébriques, Activités statistiques, Acquérir des notions fondamentales d'analyse, Géométrie. Le chapitre de statistique, précise le programme, « vise à approfondir et à compléter les notions de statistique descriptive étudiées dans les classes antérieures ». À propos des « généralités sur les séries statistique à une variable », le même texte avance cette « recommandation pédagogique » : « On s'assurera que les élèves maîtrisent les notions d'organisation des données développées en BEPA. » Le programme est de fait sensiblement plus ambitieux : l'abord descriptif des séries univariées par les paramètres de tendance centrale et de dispersion est complété ici, dans le cas d'une variable continue, par la détermination, au moyen d'une combinaison de lecture graphique et d'interpolation linéaire, de valeurs approchées de la médiane, mais aussi « du pourcentage d'individus pour lesquels la valeur x du caractère étudié est soit supérieure soit inférieure à un nombre réel donné », ainsi que du « pourcentage d'individus pour lesquels la valeur du caractère étudié appartient à l'intervalle $[\bar{x} - \sigma ; \bar{x} + \sigma]$. Le travail se poursuit encore par l'étude de séries bivariées *qualitatives* : les élèves doivent apprendre à construire et à interpréter des tableaux de contingence. On observe ici une divergence à la fois claire et un peu mystérieuse des modules de mathématiques propres respectivement au BTA et au baccalauréat professionnel : alors que, dans le premier cas, on s'intéresse à des séries relatives à des variables continues et au nuage de points qui en résulte, dans ce second cas on s'intéresse au tableau de contingence, en ignorant apparemment les séries doubles continues.

Examinons maintenant le secteur des métiers de la santé et de l'hygiène, qui donnent lieu à un BEP auquel on accède à partir des classes de troisième et de troisième technologique. L'enseignement des mathématiques, lit-on dans le programme correspondant [29], « doit fournir des *outils* permettant aux élèves de suivre avec profit les enseignements des disciplines scientifiques et technologiques ». Nonobstant cette dimension instrumentale affirmée, le discours est proche de celui des programmes de l'enseignement général et technologique, dont il reprend les grands découpages. Une première partie est ainsi centrée sur les « Problèmes numériques et algébriques » ; le marquage professionnel y apparaît d'emblée – même s'il y reste périphérique – sous la forme d'une rubrique d'exemples d'applications dans le secteur tertiaire, dont il est précisé qu'elles ne concernent pas les sections du secteur industriel : sont mentionnés les calculs commerciaux (coût, charge, TVA, etc.), la conversion des monnaies, le calcul d'intérêts simples et composés – dont il est précisé qu'ils ne concernent pas les élèves préparant le BEP « Métiers de la restauration et de

[29] Voir http://www.ac-reims.fr/datice/math-sciences/informations/programme_bep/secteur4.htm#math.

l'hôtellerie » ou le BEP « Alimentation ». À cela s'ajoutent les problèmes d'amortissement du matériel, les questions d'escompte bancaire ainsi que le thème du paiement à crédit et de l'équivalence d'un capital et d'un ensemble de capitaux, ces trois derniers thèmes étant hors programme pour le BEP « Communication administrative et secrétariat ». Le deuxième volet du programme a trait aux fonctions, le troisième à la statistique et le quatrième à la géométrie. Le programme de statistique est présenté comme complétant les acquis des classes antérieures [30]. Le programme de statistique comporte quatre secteurs : les séries statistiques à une variable, avec les notions d'effectif et de fréquence ; les séries statistiques à une variable quantitative, où on introduit les caractéristiques de position et de dispersion (écart type et aussi écart moyen) et où on devra observer que, « pour de nombreux phénomènes, le pourcentage d'éléments n'appartenant pas à l'intervalle $[\bar{x} - 2\sigma ; \bar{x} + 2\sigma]$ ou l'intervalle $[\bar{x} - 3\sigma ; \bar{x} + 3\sigma]$ est voisin de 5 % ou de 1 % ». À ces deux premiers secteurs s'ajoute une étude aux ambitions limitées des séries chronologiques, d'une part, des indices simples, d'autre part. Là encore la diversité liée à l'orientation professionnelle appose sa marque : ainsi les notions de médiane et d'écart moyen sont-elles signalées comme n'étant pas au programme du secteur industriel. On saisit mieux ainsi l'absence d'une culture commune obligatoire en matière de statistique : un rien suffit pour que telle notion, jugée utile et peut-être indispensable à un certain groupe professionnel, reste ignorée de tel autre groupe pourtant fort proche à bien des égards. Cette distribution sociale des connaissances ne cesse donc d'émettre un message qui finit par résonner comme une affirmation sur la nature même de la connaissance statistique : celle-ci n'a aucun caractère de nécessité, sa mobilisation est erratique, opportuniste, rapidement changeante avec les évolutions des métiers, et donc non susceptible de donner lieu à une culture stable, largement diffusée et bien partagée au sein de la population générale – un peu comme si, par exemple, on ne devait apprendre à aller à bicyclette que dans la perspective de devenir facteur, avec une sous-spécialité, celle de facteur de montagne, cas dans lequel on apprendrait à manipuler un vélo avec de nombreux changements de vitesse, la population générale ne se préoccupant pas de savoir monter à bicyclette puisque cette activité serait réservée à quelques groupes professionnels extrêmement particuliers et – supposons-le du moins – démunis, au plan culturel, d'une véritable puissance de rayonnement. Une telle distribution de la connaissance de certains savoirs statistiques – on sait cela si on fait cela,

[30] On observera qu'il s'agit là d'une constante : alors que, dans l'enseignement général et technologique, on voit du nouveau, on va de l'avant, ici tout semble conspirer à rappeler un passé que l'on vise à dépasser sans y parvenir vraiment.

sinon, non ! –, diminue l'attractivité sociale et culturelle des savoirs ainsi « traités ». Il y a là une configuration déterminante du point de vue des apprentissages *généraux*. Dans une société où il va de soi que chacun est amené à conduire une voiture automobile, chacun, pratiquement, finit par maîtriser de manière raisonnable la conduite automobile dans les conditions usuelles de circulation. Dès lors qu'un savoir ou un savoir-faire ne fait plus l'objet d'une injonction sociale adressée à *chacun* de maîtriser ce savoir ou ce savoir-faire, injonction d'autant plus efficace qu'elle est implicite et, en quelque sorte, va de soi, apparaît le problème de l'échec lié au fait que, d'une certaine façon, la société *autorise à échouer*. Dans nos sociétés actuelles, personne n'est *a priori* autorisé à échouer dans son apprentissage de la conduite automobile, de la même façon sans doute que, il y a deux siècles, et au moins dans certaines couches sociales, on n'était guère autorisé à ne pas réussir à monter à cheval. Aujourd'hui, l'introduction dans le curriculum scolaire à titre obligatoire d'une matière que l'on pourrait appeler « Équitation » conduirait, dans les conditions existantes de distribution de la connaissance équestre, à engendrer un taux d'échec visible parce que d'aucuns se sentiraient autorisés à échouer, de la même façon que, dans la population générale, d'aucuns se sentent autorisés à échouer à conduire un camion ou à descendre à ski, par exemple [31].

Poursuivons avec les BEP du secteur industriel [32]. Comme en d'autres domaines, les deux années de préparation sont censées permettre aux élèves « d'acquérir une qualification professionnelle et de viser une insertion professionnelle à l'issue du cycle », mais aussi « poursuivre leurs études, s'ils le souhaitent, vers un baccalauréat professionnel (cycle terminal de la voie professionnelle) ou un baccalauréat technologique (cycle terminal de la voie technologique). » Dans cette perspective, la démarche adoptée en mathématiques consiste « à partir de problèmes apportés notamment par les disciplines scientifiques et technologiques et, en retour, à utiliser les savoirs mathématiques comme outils pour la résolution de problèmes issus des autres disciplines ou de la vie courante. » Le programme comporte quatre volets : problèmes numériques et algébriques, fonctions, statistiques (ou statistique), géométrie. Selon une rhétorique qu'on a soulignée plus haut, la partie consacrée à la statistique s'ouvre sur ces mots emblématiques : « [Le programme] complète les acquis des classes antérieures. » Hormis cela, on retrouve un discours qui démarque celui de la seconde générale et technologique, avec un contenu qui ne s'éloigne guère de celui des BEP des

[31] S'agissant des groupes d'enfants ou d'adolescents qui y ont socialement accès (ils ne représentent qu'un faible pourcentage de la population générale), en revanche, on sait qu'on n'est pas autorisé à échouer dans son apprentissage du ski sous peine d'être mis au ban de son groupe de pairs.

[32] Voir http://www.ac-guadeloupe.fr/Cati971/PEDAGO/mathslp/math/pagebep.htm.

métiers de la santé et de l'hygiène (avec, en particulier, l'abord des séries chronologiques et des indices). Les BEP des métiers du tertiaire se scindent en deux sous-groupes appelés tertiaire 1 et tertiaire 2 [33] ; deux seulement des quatre domaines indiqués pour les BEP du secteur industriel sont communs à tous : le domaine des fonctions, d'une part, le domaine de la statistique, d'autre part. Le domaine des problèmes numériques et algébriques se retrouve dans les deux sous-groupes, sans y être identique toutefois – les développements relatifs aux mathématiques financières sont sensiblement moins développés dans le programme du tertiaire 2, par exemple. Quant au domaine de la géométrie, il subsiste sous une forme très réduite dans le programme du tertiaire 1 et disparaît entièrement du programme du tertiaire 2. Les fonctions et la statistique apparaissent ainsi comme les éléments d'une culture mathématique de base dans l'ensemble des cursus envisagés jusqu'ici, avec des programmes au demeurant très voisins quand ils ne sont pas identiques. On notera en outre le caractère distinctif de certains éléments d'un programme par ailleurs largement commun de statistique. Ainsi en va-t-il surtout des séries chronologiques, dont l'étude apparaît comme une obligation dans ces secteurs de formation scolaire à visée professionnelle, alors que la « tradition » les écartait des programmes de l'enseignement général, même si, il est vrai, le nouveau programme de la première ES leur donne une place certaine [34].

Ce qui précède brosse à gros traits la distribution des savoirs statistiques élémentaires en tant que culture de base au sein d'un ensemble de secteurs professionnels correspondant à un niveau moyen de qualification. Les savoirs ainsi diffusés, on l'a vu, sont relatifs à la description statistique : la diffusion des connaissances subit ici des contraintes d'organisation propres à ces savoirs, d'une part, mais aussi des contraintes dans la sélection sociale et culturelle présidant à la diffusion de ces savoirs, d'autre part. Pour aller plus loin en matière de statistique, en effet, il faut aborder l'*inférence* statistique, et donc, d'une manière ou d'une autre, la théorie des probabilités. Un exemple frappant de cette obligation épistémologique est fournit par le *contrôle de qualité*, thème qui se situe dans le prolongement des formations

[33] Le tertiaire 1 se compose des BEP « Métiers de la comptabilité », « Distribution et magasinage », « Vente et action marchande », « Agent de transport ». Le tertiaire 2 est composé des BEP « Métiers du secrétariat », « Hôtellerie restauration », « Alimentation ».

[34] Un commentaire du programme de première ES souligne qu'« on s'intéressera en particulier aux séries chronologiques », tandis que le document d'accompagnement souligne que « le choix a été fait pour la section ES de donner un rôle important aux séries chronologiques, particulièrement fréquentes dans les cours d'économie de cette section ». Le programme de la terminale ES, cependant, ne les mentionne qu'en passant, à propos de l'ajustement affine par la méthode des moindres carrés.

industrielles que nous venons d'examiner rapidement. L'AFNOR a ainsi publié récemment deux brochures sous le titre général *Statistique et qualité*, la première sous-titrée *Principes fondamentaux*, la seconde *Applications pratiques*, ces deux opuscules étant dus à un même auteur, Pierre Souvay, dont il est intéressant de reproduire la notice biographique – en elle-même fort instructive quant aux liens tissés, par le biais du contrôle de la qualité, entre différents domaines de l'industrie :

> Pierre Souvay est professeur agrégé de génie mécanique. Il a longtemps enseigné en classe de BTS Productique Mécanique et a participé à l'introduction de l'enseignement de la qualité dans les sections technologiques. Intervenant à l'École Nationale des Technologies et des Industries du Bois (ENSTIB), il est chargé des cours relatifs à la statistique appliquée et à la maîtrise et l'amélioration de la qualité. Il intervient régulièrement en entreprise et en particulier pour l'industrie pharmaceutique, et assure des formations à l'Institut de Formation des Industries de Santé (IFIS).

Le livret consacré aux principes fondamentaux comporte le sommaire suivant :

> Usage industriel de la statistique. 1. Lois normales. 2. Échantillonnage statistique. 3. Estimations ponctuelles. 4. Intervalles de confiance. 5. Intervalles. 6. Risques et taille des échantillons. 7. Validation des données. 8. Comment utiliser l'outil statistique ? 9. Lexique. 10. Bibliographie.

Le second livret comporte quant à lui les chapitres suivants :

> Applications pratiques. 1. Procédure statistique. 2. Essais sur un échantillon. 3. Essais sur deux échantillons. 4. Essais sur plus de deux échantillons. 5. Addition statistique. 6. Essais de réception par attribut. 7. Exemple de procédure. 8. Test de Dixon. 9. Tables statistiques. 10. Lexique. 11. Bibliographie

On a quitté, on le voit, l'univers arithmétique de la description statistique pour entrer dans un univers plus complexe au plan statistique comme au plan mathématique : ainsi le livret consacré aux principes fondamentaux s'ouvre-t-il par la présentation de l'expression de la fonction de densité de la « loi de Laplace Gauss ». Ici, bien sûr, les mathématiques mobilisées sont minimalistes : elles servent un projet qui ne sert pas en retour – contrairement à une certaine stratégie didactique classique – à en motiver certains développements. L'auteur parle ainsi de point d'inflexion d'une courbe ; mais, dans le lexique appendu à son opuscule, cette notion reçoit la définition suivante : « Point correspondant à la transition entre une courbe convexe et une courbe concave. » De manière paradoxale seulement en apparence, la haute teneur supposée des technologies statistiques présentées dans les deux livrets évoqués ne deviennent disponibles que parce que l'auteur, et avec lui un certain nombre des institutions où il opère, sont affranchis des contraintes qui, dans l'échelle des niveaux de détermination présentée au début de ce chapitre, se nouent à l'échelon de la discipline enseignée. En d'autres termes c'est parce qu'il échappe aux obligations imposées par la discipline mathématique dans sa version scolaire que l'auteur peut tirer profit des mathématiques nécessaires pour engendrer les technologies statistiques qu'il s'efforce de diffuser !

Le contraste est sensible, à cet égard, avec le traitement de la connaissance statistique à l'œuvre dans les filières technologiques des lycées, où se rencontre un autre type de contraintes, lié à l'usage des savoirs à des fins de distinction. À un niveau suffisamment humble des études scolaires, on peut aborder les éléments de la description statistique avec très peu de mathématiques ; si l'on veut aller plus loin il faudra des mathématiques plus élevées, dont la trace apparaît dans les livrets *Statistique et qualité*. Dans l'enseignement technologique, qui flirte avec l'enseignement général, une autre contrainte se fait entendre. Une fois passée la classe de seconde, où l'on pouvait encore aborder la description statistique à mains nues, si l'on peut dire, selon une tradition que la réforme de la rentrée 2000 a encore renforcée, on doit, à partir des classes de première, franchir une étape symbolique : celle de la rencontre avec le calcul des probabilités. Qui arrête ses études en seconde n'aura pas eu commerce avec la pensée probabiliste ! On note, là encore, une ligne de démarcation culturelle et sociale [35] séparant ceux qui auront eu à apprendre des probabilités de ceux qui auront été condamnés à en ignorer jusqu'à l'existence. En entrant dans les séries STI et STT, en revanche, on passe de l'autre côté de la ligne de démarcation [36]. Dans les séries STL et SMS le programme des classes de première [37] comporte uniquement des probabilités, même si l'on s'y réfère, pour fonder la conceptualisation probabiliste, à la statistique étudiée en seconde. Cette étude des probabilités se poursuit en terminale, classe où la statistique réapparaît, même si le lien entre probabilités et statistique y semble ténu (traditionnellement, on n'enseigne pas l'inférence statistique à ce niveau des études). En revanche, dans la série

[35] D'après l'ONISEP, à l'issue de la classe de 3e, 60 % des élèves vont en 2de générale et technologique, 31 % vont en BEP, 5 % redoublent, 3 % vont en CAP, 1 % vont en apprentissage ou vers d'autres orientations. Voir http://www.onisep.fr/national/orientation/html/college/cadre.htm.

[36] Pour la série STI spécialités « Génie mécanique », « Génie des matériaux », « Génie électronique », « Génie électrotechnique », « Génie civil », « Génie énergétique », voir http://eduscol.education.fr/D0015/MTH-STIG.pdf. Pour la série STI spécialité « Arts appliqués », voir http://eduscol.education.fr/D0015/MTH-STIAA.pdf ; pour la série STI spécialité « Génie optique », voir http://eduscol.education.fr/D0015/MTH-STIGO.pdf. Pour la série terminale STT, voir http://eduscol.education.fr/D0015/MTH-STT.pdf. (On notera que la classe de première STT devient, à la rentrée 2005, première STG, « Sciences et technologies de la gestion » : pour le programme, voir ftp://trf.education.gouv.fr/pub/edutel/bo/2004/hs5/maths_STG.pdf.)

[37] Pour la série STL, voir http://eduscol.education.fr/D0015/MTH-STL.pdf. Pour la série SMS, voir, de même, http://eduscol.education.fr/D0015/MTH-SMS.pdf.

STI, quelle que soit la spécialité, la statistique appartient au passé : en première comme en terminale, seules les probabilités ont droit de cité. Sans doute ne peut-on trancher entre deux « explications » de cette variation synchronique dans l'épaisseur des cursus de formations scolaires qui nous a fait passer de classes *avec* statistique mais *sans* probabilités à des classes avec probabilités et une part de statistique puis à des classes à probabilités uniquement. La première explication roulerait sur les besoins différentiels de formation des élèves de ces classes (en fonction de leurs visées professionnelles). Mais on peut alors trouver étrange que, dans le programme de chacune des classes de première examinées (hormis la première SMS) revient comme un leitmotiv cette indication donnée à propos du choix d'une calculatrice : « Il est conseillé de disposer d'un modèle dont les caractéristiques, notamment graphiques, répondent aux spécifications et aux objectifs précédents et comportant, en vue de l'emploi dans les autres disciplines et dans les études supérieures, les fonctions statistiques (à une ou deux variables). » Cette recommandation, on l'aura noté, fait clairement allusion à l'*usage* de la statistique dans les « autres disciplines ». Cette observation jointe à d'autres suggère une seconde explication : dans la cote épistémologique des savoirs, les probabilités se placent plus haut que la statistique (descriptive), et la présence ou l'absence de statistique ou de probabilités se conforme simplement à la « cote scolaire » des diverses classes, au moins localement. On notera que si la création et l'emploi des outils statistiques sont d'un côté l'apanage des puissants, ainsi qu'on l'a noté dès notre premier chapitre, s'ils sont d'un autre côté l'outillage prêté aux humbles – ou à certains d'entre eux – au sein du système scolaire, on doit constater que, dans la formation de ceux qui iront occuper des positions sociales et culturelles moyennes ou supérieures, se creuse une stratégie d'évitement, ou plutôt de rencontres éphémères, vite passées, avec des savoirs auxquels on ne parvient pas à donner une valeur scolaire non strictement indexée sur ses usages professionnels supposés.

Le programme de la classe de première STT tranche quelque peu avec le paysage que nous venons de parcourir. C'est ainsi par exemple que la recommandation à propos du choix d'une calculatrice ne fait plus référence à l'environnement du cours de mathématiques ; d'une manière plus directe, on y indique : « Il est conseillé de disposer d'un modèle dont les caractéristiques répondent aux spécifications et aux objectifs précédents et comportant les fonctions statistiques (à une ou deux variables). En revanche, les écrans graphiques ne sont pas exigés. » De fait, le programme comporte une partie intitulée *Algèbre, statistique, probabilités*, les secteurs d'étude correspondant se succédant dans cet ordre : la statistique vient ici *avant* les probabilités, selon un schéma qui restait virtuel dans les programmes de première des séries précédemment examinées, mais qui montre aussi, si on l'avait oublié, qu’il n’y pas à ce niveau d’étude de retour des probabilités vers la statistique. Le schéma, au demeurant, s’inverse en terminale : le programme de probabilités y est restreint au minimum tandis que la statistique (bivariée) y occupe une place non négligeable. On s’achemine ainsi vers un état de la transposition didactique des savoirs statistiques dont nous verrons qu’ils manifestent un *arrêt* historique du travail transpositif : présence côte à côte d’une théorie des probabilités et de notions de statistique dont les liens paraissent moins nécessaires que traditionnels.

3. Statistique pour enseignants ?

Le statut social et culturel de la statistique est celui d’un savoir dont la dissémination paraît ne viser – si l’on excepte le sérail des « puissants » selon le pouvoir ou selon le savoir – que des groupes professionnels localisés ayant de supposés besoins en la matière et n’émettant qu’un rayonnement culturel de faible ampleur. On est frappé à cet égard par le phénomène de confinement qui fait que la culture statistique mord peu sur des groupes sociaux, professionnels ou non, qui se situent dans ce qu’on peut appeler la « classe cultivée ». La diffusion par le biais de formations professionnelles de plus haut niveau est pourtant une réalité en certains secteurs. C’est ainsi que le monde universitaire « littéraire » s’est trouvé pénétré par la statistique selon des voies bien connues, qui sont celles des cursus de psychologie, de sociologie, voire de linguistique. Les enseignements dits de méthodologie sont en effet la voie royale de la pénétration des savoirs statistiques – au sens large – dans un univers où la quantité n’était pas traditionnellement la première valeur.

Dans le cas de la psychologie, un ouvrage dont la première édition date de 1976, le *Précis de statistique* de Maurice Reuchlin, illustre bien l’effort de développement d’une connaissance statistique dans les études de sciences humaines. Fort de quelque 250 pages, cet ouvrage ne consacre que son dernier chapitre, le chapitre VII, à la problématique de l’inférence statistique : ce thème occupe donc environ 10 % seulement de la place dévolue à l’exposé de la matière. Par contraste, les quelque 160 pages en lesquelles se déploient les six premiers chapitres sont allouées à une présentation soigneuse de la description statistique univariée, bivariée et multivariée, avec une insistance propre aux études psychologiques sur la notion de « niveaux de mesure [38] ». Après un premier chapitre intitulé *Le caractère variable*

[38] La question des niveaux de mesure a été longtemps polémique avant qu’on en vienne très progressivement à une vue plus sereine, à la suite d’un article publié en 1946 dans la revue *Science* par le psychologue Stanley Smith Stevens (1906-1973), qui, pour l’occasion, avait reçu l’aide du mathématicien George David Birkhoff

des conduites, où le thème de la variabilité et des *sources de variation* est clairement central, les chapitres II, III et IV traitent respectivement des résumés statistiques au niveau des échelles nominales, au niveau des échelles ordinales, au niveau des échelles d'intervalles. Le chapitre V traite de *La relation entre deux séries d'observations*, en distinguant les cas de deux variables nominales, de deux variables ordinales, d'une variable nominale et d'une variable d'intervalles, d'une variable ordinale et d'une variable d'intervalles, enfin de deux variables d'intervalles. Le chapitre VI, *Relation entre plusieurs séries d'observations*, présente des notions d'analyse de la variance et d'analyse factorielle.

L'ouvrage comporte surtout une préface due à Marc Barbut [39] qui situe l'ouvrage dans le développement – alors relativement récent – du souci de la présence de connaissances statistiques dans les cursus de formation en sciences humaines. C'est par une réforme de 1966, précise Barbut, « que fut introduit dans le premier cycle de psychologie un enseignement de Mathématiques et de Statistique ». La création de cet enseignement, poursuit-il, suscita, notamment à la Sorbonne, une collaboration entre psychologues et mathématiciens pendant les années 1966-1967 et 1967-1968. Ce travail pionnier se brisa pourtant sur la réforme universitaire qui suivit Mai-68 : la mise en place d'unités d'enseignement et de recherche (UER) autonomes et monodisciplinaires, d'une part, le découpage des cursus en unités de valeur (UV), qui recopiait le système américain des *credits* et « pulvérisait l'enseignement du premier cycle en vingt tronçons, certains obligatoires, d'autres optionnels, mais tous autonomes et indépendants les uns des autres », mit à terre la fragile construction élaborée jusque-là. Fort heureusement, selon Marc Barbut, la création, à

(1884-1944). Stevens distingue quatre « types d'échelle », différentes par (1) les « opérations empiriques de base », (2) la « structure mathématique de groupe » associée, et (3) les « statistiques permises » : « [I] **NOMINAL** [SCALE]. (1) Determination of equality. (2) *Permutation group* $x' = f(x)$: $f(x)$ means any one-to-one substitution. (3) Number of cases; mode. [II] **ORDINAL** [SCALE]. (1) Determination of greater or less. (2) *Isotonic group* $x' = f(x)$: $f(x)$ means any monotonic increasing function. (3) Median; Percentiles. [III] **INTERVAL** [SCALE]. (1) Determination of equality of intervals or differences. (2) *General linear group* $x' = ax + b$. (3) Mean; Standard deviation; Rank-order correlation; Product-moment correlation. [IV] **RATIO** [SCALE]. (1) Determination of equality of ratios. (2) *Similarity group* $x' = ax$. (3) Coefficient of variation. » (La notion d'échelle nominale peut être illustrée par le sexe ou la couleur des yeux, celle d'échelle ordinale par la dureté des minéraux, celle d'échelle d'intervalles par la température, celle d'échelle de rapports par le poids.)

[39] Sur l'histoire des relations nouées en France, à partir des années 1950, entre mathématiques et statistique d'un côté, et sciences humaines de l'autre, on pourra consulter, sur le site de la *Universidad Nacional de Educación a Distancia* (UNED) espagnole, une présentation récente due à Marc Barbut et intitulée *Mathématiques et sciences humaines* » : voir http://www.uned.es/fac-poli/Marc_barbut_fran.pdf.

la rentrée 1973, du Diplôme universitaire d'études générales (DEUG) permis aux psychologues de l'ancienne Sorbonne (regroupés en une UER de l'Université René-Descartes-Paris V) de supprimer le système des UV en le remplaçant, pour ce qui est du premier cycle de psychologie, par un ensemble de quatre blocs pluridisciplinaires « ayant chacun son programme et sa cohérence ». Dans cette organisation rénovée, les mathématiques et la statistique furent intégrées dans deux certificats « comportant par ailleurs l'enseignement de la Psychophysiologie et celui des méthodes de la Psychologie ». La distribution dans le temps de l'étude de la matière mathématique et statistique envisagée conduit alors à enseigner la description statistique lors du premier trimestre d'un cursus qui en comporte six et à consacrer le dernier trimestre de la deuxième année à l'analyse multivariée ainsi qu'à l'inférence statistique, les mathématiques – y compris le calcul des probabilités – étant travaillées pendant les quatre trimestres intermédiaires.

Cette rapide chronique a le mérite de rappeler combien la diffusion d'un corps de connaissances dépend de facteurs enchevêtrés relevant de différents niveaux de détermination didactique : le niveau des disciplines (il faut faire aller ensemble des mathématiques, du calcul des probabilités – mais est-ce des mathématiques ? –, de la statistique et de la psychologie), celui des pédagogies (ici, Barbut y insiste fortement, la collaboration pédagogique entre « mathématiciens » et « psychologues » a été la clé du progrès), celui aussi des écoles (le système américain des crédits, peut-être maladroitement utilisé, s'est révélé ravageur, alors que le système du cursus d'études en deux ans scindés en quatre lourds « certificats » à la française s'est avéré bien davantage favorable). Localement, il est indéniable que le travail pionnier des Barbut, Reuchlin et de leurs collègues mathématiciens et psychologues a porté fruit et a stabilisé dans la culture des études psychologiques la présence d'un corpus de connaissances statistiques qui s'est fait admettre comme un élément normal du paysage culturel dans le domaine. Un quart de siècle après le *Précis* de Maurice Reuchlin, un ouvrage de quelque 350 pages, intitulé *Statistique en psychologie* [40] fournit, à travers une bibliographie choisie, une vision perspective de la montée en puissance de la statistique en psychologie et en sciences humaines, puisqu'on y trouve mentionnés les ouvrages suivants :

Ehrlich S., Flament C., *Précis de statistique*, PUF, Paris, 1961.

Rouanet H., Le Roux B., Bert M.-C., *Statistique en sciences humaines : procédures naturelles*, Dunod, Paris, 1987.

Langouet G., Porlier J.-C., *Pratiques statistiques en sciences humaines et sociales*, ESF, Paris, 1989.

[40] Rude & Retel (2000).

Rouanet H., Le Roux B., *Exercices et solutions - Statistiques en sciences humaines*, Dunod, Paris, 1995.

Beaufils B., *Statistiques appliquées à la psychologie*, Tome 1 et 2, Bréal, 1996.

Cadet B., *Méthodes statistiques en psychologie*, Presses Universitaires de Caen, 1996.

Mialaret G., *Statistiques*, PUF, Paris, 1996.

Howell D. C., *Méthodes statistiques en sciences humaines*, De Boeck Université, Paris, 1998.

L'examen de l'ouvrage utilisé ici fait apparaître un corpus qui, en quelque sort, a pris de l'épaisseur : on n'en est plus au stade de la présentation avisée et de l'introduction précautionneuse ; on va directement aux recettes adéquates à la situation que le lecteur doit affronter. En même temps, le corpus envisagé par Maurice Reuchlin a été rompu : la statistique dont on nous parle ici est au plus bivariée ; c'est ailleurs que l'étudiant ou le professionnel trouvera des développements sur les différents types d'analyse multivariée [41].

La réussite de la statistique dans le champ des disciplines psychologiques est toutefois un cas singulier, auquel d'autres, il est vrai, sont venus s'ajouter – que l'on songe à la sociologie par exemple [42]. On notera, en outre, que la percolation de la culture statistique dans un champ scientifique ou professionnel donné, qui semble se réaliser chaque fois selon un *tempo* particulier et sous des contraintes spécifiques, profite toutefois des avancées réalisées en d'autres champs. C'est ainsi que l'ouvrage de statistique en psychologie auquel nous avons fait référence a pour auteur une maître de conférences de la Faculté de médecine et de pharmacie de l'Université de Franche-Comté, membre du laboratoire de psychologie sociale de l'Université Paris V dont les travaux portent sur « l'approche psychosociale de la santé, sur la qualité de vie liée à la santé et sur la discordance soignant/soigné de la perception de la qualité de vie et des besoins associés ». Le co-auteur de l'ouvrage, ingénieur à l'INSERM, travaille sur la surveillance dans le domaine de la santé et notamment en matière d'épidémiologie du VIH/VHC [43] : le lien avec l'univers de la statistique biomédicale est donc

---

[41] La bibliographie déjà citée comporte à cet égard un certain nombres de titres : Lebart L., Morineau A., Fénélon J.-P., *Traitement des données statistiques* (Dunod, Paris, 1979) ; Fénélon J.-P., *Qu'est-ce que l'analyse des données ?* (Lefonen, Paris, 1981) ; Cibois P., *L'analyse factorielle* (PUF, Paris, 1983) ; Robert C., *Analyse descriptive multivariée* (Flammarion, Paris 1989) ; Saporta G., *Probabilités, analyse des données et statistiques* (Technip, Paris, 1990).

[42] Nous n'entrerons pas ici dans une étude, même sommaire, de ce dernier cas. Voir Coven V. (2003), *A History of Statistics in the Social Sciences* (http://grad.usask.ca/gateway/art_Coven_spr_03.pdf).

[43] VIH : Virus de l'Immuno-déficience Humaine. VHC : virus de l'hépatite C. En France, on estime que 30 % des personnes infectées par le VIH le sont aussi par le VHC, ce qui fait de l'hépatite chronique C la principale cause de décès dans cette population.

fort, ce que confirme l'examen de la bibliographie [44]. Mais la question centrale à propos de l'enseignement de la statistique au secondaire général est évidemment celle de savoir s'il peut y avoir intégration d'une culture statistique dans la culture *générale* courante, et en particulier dans la culture générale de la « classe cultivée » : ce qui s'est produit en psychologie peut-il se produire à une autre échelle ? Un début de réponse positive pourrait être avancé si, précisément, l'enseignement de la statistique amorcée en seconde aujourd'hui en venait à acquérir un véritable droit de cité dans la culture commune. Il semble bien qu'un tel phénomène ne soit pas actuellement observable : la statistique, on l'a assez souligné, apparaît, au plan socioculturel, soit comme un outil propre à certains domaines d'activité – elle concerne le technicien du contrôle de qualité ou le chercheur en psychologie, par exemple –, soit comme le savoir définissant un corps de spécialistes, les « statisticiens », que ce terme soit pris dans son acception universitaire (et en particulier mathématique), ou dans la version sans doute plus fortement implantée dans l'imaginaire social français, celle du statisticien des grands appareils de production statistique, tel l'INSEE [45].

À titre de test, on peut alors se poser la question suivante : existe-t-il aujourd'hui en France une culture statistique « obligatoire », « normale », *pour les enseignants* ? Non pas, donc, pour les professeurs *de mathématiques*, mais pour les professeurs *en général* – en nous limitant ici, toutefois, aux professeurs du second degré. Avant de tenter de répondre, donnons un exemple emprunté une fois encore au monde anglo-saxon, celui d'un ouvrage intitulé *Statistics for the Teacher*, dont la première édition date de 1963. Le motif d'un tel ouvrage est ici lié assez strictement aux examens et tests. Son auteur, Douglas M. McIntosh, écrit [46] :

> Examinations and tests are an essential part of modern education. It is vital, therefore, not only that these are carefully constructed and marked, but also that the marks themselves are properly interpreted and used. This book aims to help practising and prospective teachers to a fuller understanding of the significance and legitimate use of examination marks.

---

[44] On y remarque les ouvrages suivants : Schwartz D. *Méthodes statistiques à l'usage des médecins et des biologistes* (Flammarion, Paris, 1963) ; Rumeau-Rouquette G., Bréart G., Padieu R., *Méthodes en épidémiologie : Échantillonnage - Investigation - Analyse* (Flammarion, Paris 1985) ; Robert C., *Analyse descriptive multivariée* (Flammarion, Paris 1989) ; Caulin C., Chastang C., Dahan R., *Méthodologie de l'évaluation thérapeutique* (Masson, Paris, 1993) ; Armitage P., Berry G., *Statistical methods in medical research* (Blackwell Science, London, 3e édition 1994) ; Mercier M., *Biostatistique et Probabilités – exercices, problèmes et épreuves corrigées* (Ellipses, Paris, 1996).

[45] Voir à ce sujet Volle (1984).

[46] McIntosh (1967), *Introduction*.

Le contenu de l'ouvrage, poursuit cet auteur, a été mis à l'épreuve durant de nombreuses années dans la formation des professeurs, en Grande Bretagne aussi bien qu'au Canada. Pour donner une idée de son contenu, nous en reproduisons le sommaire :

> I. Measurement in education. I. Interpretation of marks. III. Arranging marks. IV. Average, or mean. V. Scatter of marks. VI. Comparison and addition of marks. VII. Percentiles. VIII. The normal curve. IX. Correlation. X. Difference between means. Appendices. I. Formula for standard deviation. II. Areas under the normal curve. III. Ordinates under the normal curve. IV. Tables of squares and square roots of the numbers from 1 to 200. Answers.

On notera que, ainsi que ces titres le font apparaître, l'outillage mathématique requis se veut rudimentaire, ce que l'auteur prend soin de préciser dans sa préface :

> The application of elementary statistics to examination marks involves only arithmetic, Mathematical knowledge is not essential. Even the calculation of a square root can be avoided by the use of tables.

L'ouvrage représente une tradition qui a eu, y compris en France, une présence non négligeable. Dans un texte écrit en 1989, intitulé *Court traité de docimologie normal(ienn)e* [47], l'auteur, alors professeur de psychopédagogie dans une école normale d'instituteurs, propose ainsi une bibliographie dont l'examen témoigne d'un lien vivace, dans la formation des enseignants, entre statistique et ce qu'on nomme aujourd'hui *évaluation*. Ainsi peut-on y recenser les ouvrages suivants, dont on observera que, tout à la fois, ils sont relativement anciens et ils appartiennent à des traditions éducatives allogènes :

> Brisebois (R.) [Frère Ephrem], *La statistique à l'école normale et au Baccalauréat en pédagogie*, Montréal, 1959, 273 p.
>
> Brisebois (R.) [Frère Ephrem], *Les corrélations en pédagogie et en psychologie*, Fribourg, 1967, 274 p.
>
> De Landsheere (G.), *Évaluation continue et examens (Précis de docimologie)*, Nathan, 1974 (3e éd.), 286 p.
>
> De Landsheere (G.), *Introduction à la recherche en éducation*, Bourrelier, 1976 (1re éd. 1976), 403 p.
>
> De Landsheere (V.), *Faire réussir, faire échouer*, PUF, 1989, 255 p.
>
> Fischer (H.), *Les méthodes statistiques en psychologie et en pédagogie*, Delachaux et Niestlé, 1955, 143 p.
>
> Guilford (J.P.), *Fondamental Statistics in Psychology and Education*, McGraw-Hill, Sixth Edition, 1985, 545 p.
>
> Langouet (G.) et Porlier (J.C.), *Mesure et statistique en milieu éducatif*, E.S.F., 1981, 205 p.
>
> Levasseur (R.), *La statistique appliquée à la pédagogie*, Montréal, 1957, 184 p.

---

[47] Son auteur l'a depuis mis en ligne : http://s.huet.free.fr/paideia/diaphorai/docim.htm.

Mialaret (G.) et Pham (D.), *Statistiques à l'usage des éducateurs*, PUF, 1967, 265 p.

Ce qu'il faut surtout remarquer, c'est que, là encore, une certaine connaissance de la statistique est motivée par des besoins *fortement spécifiques*, liés en l'espèce à la notation des productions d'élèves, en particulier dans le cadre des examens. Ainsi donc le problème de la culture statistique dans la formation des enseignants est-il d'emblée réduit à la question de l'outillage statistique nécessaire en matière d'évaluation chiffrée. L'idée qu'une connaissance de la statistique serait utile aux enseignants pour analyser, en association avec d'autres outils, bien entendu, une foule de situations professionnelles semble à peu près exclue. Une telle intégration élargie de la conceptualisation et de l'outillage statistiques dans la culture professionnelle des professeurs reste aujourd'hui à accomplir [48].

En attendant, la relation entre statistique et évaluation semble d'abord occuper tout l'espace possible. Mais une évolution s'est produite au cours des décennies passées, que nous nous risquerons à décrire sommairement. D'une part, les réflexions et travaux qui portaient autrefois proprement sur la docimologie [49] se sont déplacés, du moins dans le cadre français, vers le thème de l'évaluation [50], et portent désormais moins sur l'étude statistique de la notation que sur l'analyse qualitative des faits d'évaluation : l'examen des formations en matière d'évaluation donnée dans les IUFM semble à cet égard révélateur [51]. D'autre part, si, dans la réalité des classes françaises, on a certes continué de noter, les pratiques

[48] S'adressant à des formateurs d'enseignants du 1er degré lors d'un colloque tenu à Pau du 23 ou 27 mars 1992, Guy Brousseau a exposé des raisons d'intégrer l'enseignement de la statistique – avec l'« enseignement minimal d'un objet, le test du χ^2 » – dans la formation des enseignants. Le compte rendu de son intervention débute significativement par ces lignes : « La plupart des éléments qui servent aux professeurs à prendre des décisions sont d'ordre statistique. Il serait normal que l'étude des statistiques fasse partie de leur formation. Actuellement, le rapport au savoir ne permet pas aux statistiques de vivre en France (contrairement à ce qui se passe dans les pays anglo-saxons). Cet enseignement intéresse les professeurs de mathématiques, mais pas seulement eux : le monopole qui leur est donné sabote le projet. » Il énumère un peu plus loin quelques types de questions professionnelles auxquelles la statistique permettrait d'apporter une réponse : « les nombres de réussites aux exercices exa29 et exb19 sont-ils significativement différents ? », « sur cette population, quelle est en pourcentage la plus petite différence significative ? », « sur cet ensemble de questions, la classe est-elle homogène ? », « quelles sont les questions qui devraient être enseignées à nouveau à l'ensemble des élèves ? », etc. Voir Brousseau (1992).

[49] Tel l'ouvrage classique d'Henri Piéron, *Examens et docimologie* (Piéron, 1963).

[50] Voir ainsi Colomb & Marsenach (1990).

[51] Voir par exemple le texte de Françoise Campanale, maître de conférences à l'IUFM de Grenoble, intitulé *Quelques éléments fondamentaux sur l'évaluation*, mis en ligne sur le site de l'IUFM de Grenoble : http://www.grenoble.iufm.fr/departe/shs/campeval/default.htm.

traditionnelles de notation ont été, depuis une décennie au moins, de plus en plus soumises aux contraintes engendrées par le traitement logiciel des notes, dans le cadre de l'établissement : plusieurs logiciels de gestion de notes se disputent aujourd'hui un marché qui s'est développé de manière extrêmement rapide [52]. Il est remarquable que ces logiciels, au reste, affichent les principaux paramètres statistiques de tendance centrale et de dispersion, en calculant, pour une série de notes donnée, le minimum, le maximum, la moyenne, la médiane, l'écart type. Les professeurs ont ainsi, plus souvent par force que par goût ou même par un sentiment d'utilité, acquis une familiarité culturelle avec les noms de certaines notions de base de la statistique, et peut-être avec un certain usage de ces notions : il n'est pas équivalent, dans la construction de l'image que l'on se fait d'une classe, de s'en tenir à la moyenne de la classe ou de lui associer systématiquement la considération de l'écart type – sans parler d'un coup d'œil jeté sur l'histogramme proposé par le logiciel [53]. Notons à cet égard que, si les paramètres de dispersion se sont ainsi subrepticement introduits dans l'univers professoral, si, même, on est passé, pour ce qui est de la tendance centrale, de la seule moyenne au couple formé par la moyenne et la médiane, il est peu probable qu'on ait appris collectivement à aller plus loin, et par exemple à interpréter la proximité ou la distance existant entre moyenne et médiane. Plus généralement les paramètres de *forme* semblent exclus des outils d'appréciation des distributions de notes dans la culture professorale française. Ce souci d'une alphabétisation statistique des professeurs n'est évidemment pas absent de la réflexion de certains responsables du système éducatif français. Dans un article intitulé *Quelques notions*

---

[52] Nous avons procédé sur ce point à une enquête auprès des élèves professeurs de mathématiques de deuxième année de l'IUFM d'Aix-Marseille. Sur 42 professeurs stagiaires, 38, soit plus de 90 %, ont indiqué que l'établissement où ils effectuaient leur stage en responsabilité utilisait un logiciel de traitement des notes. Pour le maniement de ce logiciel, 19, soit la moitié, signalent n'avoir reçu aucune aide ; 8 d'entre eux ont été aidé par des collègues, 3 ont disposé simplement d'une notice d'information. Un seul a reçu une formation organisée. Une question sur leur sentiment à propos du logiciel utilisé ne recueille que trois réponses négatives. (Son intérêt « pratique » est cité onze fois ; sont mentionnées aussi, 4 fois chacune, sa rapidité ainsi que son accessibilité depuis chez soi grâce à l'Internet.) Interrogés pour savoir s'ils procédaient à une analyse statistique des séries de notes attribuées, 30 (sur 42) ont répondu le faire après chaque devoir, 10 occasionnellement, 7 jamais, tandis que 36 d'entre eux ont indiqué s'y soumettre à l'issue de chaque trimestre, et cela en utilisant une calculatrice (citée 11 fois), un tableur (cité 24 fois), et/ou le logiciel de traitement de notes (cité 22 fois).

[53] En réalité, dans l'enquête précédemment citée, sur 41 professeurs stagiaires dont la réponse est exploitable sur ce point, l'analyse statistique réalisée se réduit au calcul de la moyenne dans 9 cas, conjugue moyenne et médiane dans 11 cas et n'associe un indicateur de tendance centrale à un indicateur de dispersion (l'écart type pour 15 d'entre eux, l'étendue pour 6 autres) que dans 21 cas. La moyenne est citée 41 fois, la médiane 38 fois.

de statistique à connaître par l'enseignant pour sa pratique de classe, un IEN, Roger Bastien, qui présente, à propos des notes obtenues à un devoir, les notions de moyenne et de médiane (lesquelles, dans le cas imaginé, diffèrent sensiblement : la moyenne est à 10,26, la médiane à 11,5), fait suivre sa présentation d'un commentaire touchant à l'interprétation des deux valeurs numériques calculées [54] :

- Si la moyenne est supérieure à la médiane, cela signifie que plus de la moitié des élèves ont une note inférieure à la moyenne et que, vraisemblablement, il existe une tête de classe qui « tire vers le haut » ; cela peut ressembler éventuellement à une classe « à deux vitesses ».
- Si la moyenne est inférieure à la médiane, on peut penser qu'une majorité d'élèves a réussi ce qui était demandé, mais qu'il existe une queue de classe posant problème.

Cette évolution de la culture statistique formelle des professeurs peut, en un certain nombre de cas, s'appuyer sur une culture statistique présente dans la formation des professeurs de telle discipline donnée. Ainsi en va-t-il, bien sûr, s'agissant des professeurs de mathématiques. Mais la chose est vraie encore pour d'autres disciplines. Des éléments de statistique sont ainsi utilisés en physique-chimie ou en sciences économiques et sociales, disciplines où ils outillent le travail d'étude. Le programme de physique-chimie de 1re S recense, parmi la liste des compétences « liées aux manipulations et aux mesures » mises en jeu lors des séances de travaux pratiques, la capacité à accomplir le type de tâches suivant : « Faire l'étude statistique d'une série de mesures indépendantes en utilisant une calculatrice ou un tableur. » Le même programme propose une liste des compétences transversales ; parmi celles que le texte présente comme « liées aux mathématiques », on trouve celle-ci : « utiliser les notions simples de statistiques du programme de mathématique (valeur moyenne et largeur). » Le vocabulaire employé ici marque déjà, à l'insu peut-être du rédacteur, la distance prise par rapport à la culture statistique de la classe de mathématiques : la *largeur* invoquée, par exemple, y est chose inconnue sous ce nom [55]. De fait, dès qu'on entre un peu plus avant dans l'institution, on découvre que le recours instrumental à la statistique est déterminé par des besoins spécifiques, nullement pris en compte à ce niveau dans la classe de mathématiques. C'est ainsi que, dans un document à l'intention des professeurs de physique-

---

[54] *Les revues pédagogiques de la Mission laïque française. Activités mathématiques et scientifiques AMS 53*, p. 6. Voir http://www.mission-laique.asso.fr/enseignants/pdf/math51/am51p5.pdf.

[55] Il semble que ce terme désigne, de manière informelle, l'écart type de la distribution, ou encore le double de l'écart type. Notons en passant l'orthographe « statistique*s* », et « mathématique » (sans *s*).

chimie mis en ligne sur le site de l'académie de Créteil et qui a pour titre *Incertitudes de mesure*, on trouve – parmi d'autres – le développement que nous reproduisons ci-après [56].

B/ Méthode de calcul de la précision de la mesure

La méthode de recherche des incertitudes de mesure a été inspirée de l'article « Erreurs et incertitudes en Physique Chimie » de R. Moreau dans le fascicule « Activités expérimentales des élèves en Physique Chimie : Quels enjeux d'apprentissage ? » distribué par le CRDP de Basse Normandie.

La théorie sur les incertitudes nous indique que la moyenne m des mesures est, a priori, le meilleur estimateur collectif de la grandeur mesurée. Mais la mesure de la valeur de la moyenne ne permet pas de mettre en évidence la dispersion des mesures.

Si mille élèves réalisaient le même dosage, ces mille mesures auraient une répartition selon la loi « normale » en forme de cloche avec une forte densité de points autour de la valeur moyenne. Avec cette loi, il est possible de déterminer l'intervalle de confiance dans lequel la probabilité de trouver la vraie valeur est assez grande.

L'intervalle de confiance, par exemple au niveau de confiance de 95 %, est celui dans lequel la valeur cherchée a 95 % de chances de se trouver.

L'incertitude absolue Δm est égale à la demi-largeur de l'intervalle de confiance.

La précision de la mesure est l'incertitude relative exprimée en pourcentage: $\frac{\Delta m}{m} \times 100$.

À partir du calcul de l'opérateur mathématique, écart-type σ, la théorie nous donne un calcul de l'intervalle de confiance différent pour une mesure isolée et pour un ensemble de plusieurs mesures.

1/ Cas d'une mesure isolée

Si un élève réalise la mesure m d'une grandeur M dont la répartition statistique lui est fournie, les calculs statistiques indiquent que la vraie valeur de M a 95 % de chance d'être dans l'intervalle $(m - 2\sigma, m + 2\sigma)$, donc l'incertitude absolue est $\Delta m = 2\sigma$.

2/ Cas d'un ensemble de mesures indépendantes

Pour un ensemble de n mesures indépendantes (en général une dizaine en TP), la précision s'obtient à partir de l'incertitude absolue : $\Delta m = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$.

Le coefficient t dépend de n et peut être lu dans une table (table de Student) :

Ex : Si $n = 8$, $t = 2{,}37$; si $n = 9$, $t = 2{,}31$; si $n = 12$, $t = 2{,}20$; si $n = 20$, $t = 2{,}09$.

Pour plus de 20 élèves différents, on peut considérer que le coefficient de Student est égal à 2 et l'incertitude absolue sera donnée par $\Delta m = \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$.

[56] Voir http://www.ac-creteil.fr/physique/DOCGRISP/incertitude/incertitudemes.htm.

∗ En classe de terminale, l'étude a été effectuée dans chaque demi-groupe et la précision a été déterminée à partir du coefficient de Student.

∗ En classe de première, le coefficient de Student ne s'imposant pas, les élèves ont admis la valeur approchée $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ pour l'incertitude absolue.

L'interprétation des mesures est fondamentalement la même.

Comme le montre par exemple la référence à une table de Student, l'outillage statistique manipulé répond aux besoins spécifiques de l'activité envisagée, sans harmonisation avec la conceptualisation statistique rendue disponible par l'enseignement donné en classe de mathématiques.

La présence de connaissances statistiques est plus sensible encore en sciences économiques et sociales. Le CAPES correspondant comporte une épreuve orale d'admission relative aux « mathématiques appliquées aux sciences économiques et sociales ». Le rapport relatif au concours 2003 rappelle à ce propos que les candidats doivent connaître les nouveaux programmes de *mathématiques* des classes de première et de terminale des classes de la série ES des lycées et précise en outre que « l'interrogation peut porter sur les nouvelles notions : boîtes à moustaches, séries chronologiques, moyennes mobiles, fonctions à deux variables, théorie des graphes (matrice de transition associée…) ». L'épreuve porte, semble-t-il, surtout sur des questions non statistiques, les questions de statistique (au sens large) apparaissant – sous l'intitulé familier de « petites questions » – dans la troisième partie de l'épreuve. À titre d'illustration on a reproduit ci-après les exemples proposés par le rapport mentionné.

• *Approche d'une loi binomiale par une loi normale (correction de continuité)*

Une machine fabrique un très grand nombre de pièces. La probabilité qu'une pièce soit défectueuse est 0,06. On extrait un échantillon aléatoire de 300 pièces. X est la variable aléatoire qui compte le nombre de pièces défectueuses.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.

2) On approche X par une loi normale.

a) Donner les paramètres de cette loi.

b) Calculer la probabilité qu'il y ait au plus 20 pièces défectueuses.

• *Taux*

Un capital C, partagé en 3 parts x, y, z, est placé pendant une année dans les conditions suivantes :

la part x est placée au taux de 6 % ;

la part y est placée au taux de 5 % ;

la part z est placée au taux de t %.

La valeur acquise de chaque part s'élève à 5787,6 €. Globalement, l'opération financière réalisée correspond à un placement du capital au taux de 5 %.

On demande de déterminer C, x, y, z et t.

• *Histogramme – boîtes à moustaches*

On donne la répartition par âge de la population dans un pays : $\begin{cases} [0;20[& 25\% \\ [20;60[& 55\% \\ [60;90[& 20\% \end{cases}$

Représenter cette répartition par un histogramme. Quelle hypothèse faut-il faire pour pouvoir calculer l'âge médian ? Est-ce justifié ? Si oui, le calculer. Déterminer les quartiles Q_1 et Q_3, puis représenter la boîte à moustaches de cette série.

Le niveau réel est sans doute modeste, en sorte que les auteurs du rapport peuvent porter l'appréciation suivante à propos des candidats examinés (au nombre de 168 au concours 2003) : « Dans le domaine des statistiques, le principe de construction d'un histogramme est encore trop souvent mal exposé, les déterminations de la médiane, des quartiles, de la médiale, du mode sont rarement acquises. » Bien entendu, par delà le concours de recrutement, les notions de base de la statistique se retrouvent dans les classes de SES, en première et terminale. Le programme de SES de la 1^re^ ES comporte ainsi quatre paragraphes :

I. Présentation
II. Programme
III. Indications complémentaires
IV. Suggestions complémentaires.

Le dernier titre comporte, sous l'intitulé S*avoir-faire applicables à des données quantitatives*, les développements suivants :

L'enseignement des sciences économiques et sociales en classe de première devrait être l'occasion de maîtriser les savoir-faire suivants, ce qui implique à la fois calcul et lecture (c'est-à-dire interprétation) des résultats. Les calculs ne sont jamais demandés pour eux-mêmes, mais pour exploiter des documents statistiques travaillés en classe.

– Calculs de proportion et de pourcentages de répartition.
– Moyenne arithmétique simple et pondérée, médiane.
– Lecture de représentations graphiques : diagrammes de répartition, représentation des séries chronologiques.
– Mesures de variation : coefficient multiplicateur, taux de variation, indice simple.
– Lecture de tableaux à double entrée.

– Évolution en valeur / en volume.

– Notion d'élasticité comme rapport d'accroissement relatif.

– Coût moyen, coût marginal (résolution graphique).

On ne perdra pas de vue que certaines parties du programme se prêtent particulièrement à la présentation des principes élémentaires des enquêtes par sondage. On veillera à utiliser les technologies de l'information et de la communication pour mobiliser des ressources locales, nationales et européennes (banques de données, logiciels de simulation et de traitement, Internet).

Les professeurs de physique-chimie et ceux de SES ne sont pas seuls dans leur recours à l'outillage statistique. Nous avons vu que les géographes sont de forts utilisateurs de statistique ; l'histoire-géographie est donc une autre discipline dans laquelle les professeurs ont une certaine formation statistique liée à la spécificité de leur objet d'enseignement. À titre d'exemple, la composition de la licence d'histoire-géographie de l'université Paris V fait ainsi apparaître, au premier semestre, une unité d'enseignement dite de méthodologie qui comporte, à côté d'un volet sur l'informatique et son utilisation notamment en géographie, un module de 32,5 heures valant 4 ECTS consacré à la statistique univariée [57]. Ce module est complété, au troisième trimestre, par un second module de même volume horaire mais ne valant que 3 ECTS et portant sur la statistique bivariée [58]. En ce cas, la référence à l'outillage statistique est sans doute moins évidente, dans le travail des classes, qu'elle ne devrait l'être en physique-chimie. Mais le travail sur des données statistiques est clairement attesté. À titre d'illustration on reproduit ci-après un tableau de données figurant dans un TP de géographie de 4^{e} intitulé *L'Allemagne, dix ans après la réunification. Après le mur, le fossé* [59].

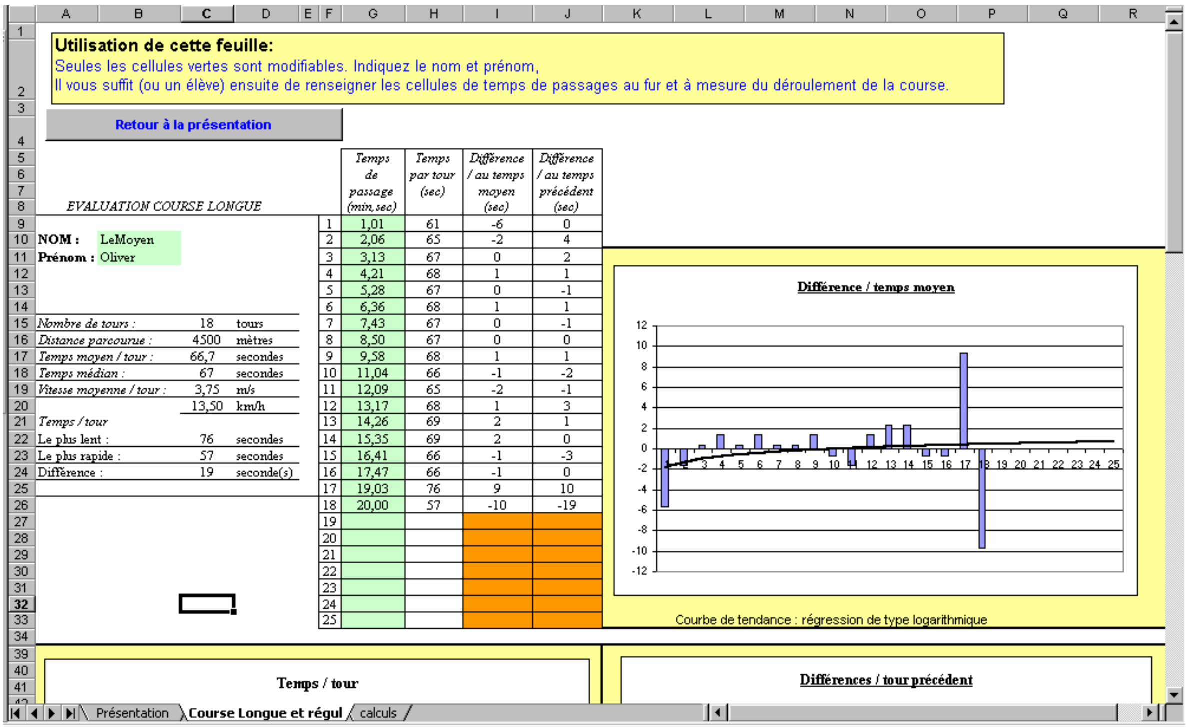
INDICATEURS	RFA	RDA
Superficie (milliers de km^2)	248.8	108.2
Population (millions d'habitants)	61.2	16.7
PNB (milliard de francs)	7844	912
Indice de fécondité	1.32	1.7
Salaire mensuel moyen (en francs)	7 500	3 000
Téléphone (en %)	97	16
Automobile (en %)	95	50
TV couleur (en %)	91	47

[57] Formellement, on devrait parler de *« crédits »* plutôt que d'ECTS. Sur le système dit ECTS (*European Credit Transfer System*), voir http://europa.eu.int/comm/education/programmes/socrates/ects_en.html.

[58] Voir http://www.univ-paris1.fr/IMG/pdf/Hist-Geo.pdf. Le document consulté est présenté comme provisoire.

[59] Voir http://erra.club.fr/faurere/allemagne.htm.

Le cas de l'éducation physique et sportive mérite tout autant d'être mentionné. Dès les premières années d'étude en sciences et techniques des activités physiques et sportives (STAPS), le futur professeur doit se frotter aux notions de base de la statistique. Dans le DEUG STAPS 2003 de l'Université Paris V, ainsi, au deuxième trimestre, une unité d'enseignement de « méthodologie disciplinaire » comporte un volet statistique d'une valeur d'un ECTS ; au quatrième trimestre une autre unité d'enseignement comporte un volet intitulé *statistique et informatique*, pour un ECTS encore. Dans la pratique en établissement, la quantification est ubiquitaire. Le traitement des séries numériques obtenues semble être la norme plutôt que l'exception, si on en croit des documents tel celui dont nous extrayons la feuille de calculs suivante [60].



Utilisation de cette feuille:
Seules les cellules vertes sont modifiables. Indiquez le nom et prénom,
Il vous suffit (ou un élève) ensuite de renseigner les cellules de temps de passages au fur et à mesure du déroulement de la course.

Retour à la présentation

EVALUATION COURSE LONGUE

NOM : LeMoyen
Prénom : Oliver

Nombre de tours :	18	tours
Distance parcourue :	4500	mètres
Temps moyen / tour :	66,7	secondes
Temps médian :	67	secondes
Vitesse moyenne / tour :	3,75	m/s
	13,50	km/h
Temps / tour		
Le plus lent :	76	secondes
Le plus rapide :	57	secondes
Différence :	19	seconde(s)

	Temps de passage (min,sec)	*Temps par tour (sec)*	*Différence / au temps moyen (sec)*	*Différence / au temps précédent (sec)*
1	1,01	61	-6	0
2	2,06	65	-2	4
3	3,13	67	0	2
4	4,21	68	1	1
5	5,28	67	0	-1
6	6,36	68	1	1
7	7,43	67	0	-1
8	8,50	67	0	0
9	9,58	68	1	1
10	11,04	66	-1	-2
11	12,09	65	-2	-1
12	13,17	68	1	3
13	14,26	69	2	1
14	15,35	69	2	0
15	16,41	66	-1	-3
16	17,47	66	-1	0
17	19,03	76	9	10
18	20,00	57	-10	-19
19				
20				
21				
22				
23				
24				
25				

Cette enquête rapide, que nous ne poursuivrons pas ici, confirme ce qui nous était apparu en abordant la question de la statistique pour enseignants en général et, plus largement, le statut de la connaissance statistique dans la société. De façon répétée et en quelque sorte inéluctable, on se trouve renvoyé à un dogme en acte : celui de la statistique pour des groupes humains déterminés ayant à accomplir des types de tâches qui leur sont spécifiques. C'est à partir de ce point que nous progresserons maintenant.

[60] Voir http://tice.education.fr/educnet3/Public/eps/apports?affdoc=5.

4. La statistique en mathématiques ?

La situation faite à la statistique dans la culture française contemporaine n'est en fait nullement propre à cette discipline. Il est sans doute plus juste et en même temps plus éclairant d'admettre ici, à titre au moins provisoire, le principe suivant : tout savoir ou complexe de savoirs peut apparaître, dans une société donnée, à un moment donné de son histoire, comme un savoir « pour tous » ou, au contraire, comme seulement destiné à un ou plusieurs groupes humains *spécifiques*, où sa présence est motivée par des besoins *sui generis*. L'évocation du changement de statut d'un savoir donné, soit qu'il ait été réalisé effectivement, soit qu'il puisse se produire dans un avenir plus ou moins proche, est fréquemment reçue avec réticence, car le statut – « pour tous » ou « pour quelques-uns » – d'un savoir, au sein d'une population donnée, apparaît facilement comme une propriété *de ce savoir*, et non comme un attribut du *rapport* qu'une société entretient à un moment donné avec lui. Longtemps, ainsi, l'étude scolaire du latin conféra à la connaissance de cette langue le statut de savoir « pour tous » – au sein d'une élite restreinte, bien entendu ! En dépit des combats qui se mènent encore aujourd'hui en sa faveur, la connaissance du latin apparaît – irrémédiablement, semble-t-il – comme une connaissance périphérique par rapport à la culture générale commune, qui n'est plus appelée que par des besoins spécifiques – ceux de l'historien, par exemple, pour une grande variété de domaines de l'histoire. Deux remarques très générales peuvent être faites à ce propos. Tout d'abord, ainsi qu'on l'a suggéré, le « pour tous » ne s'adresse véritablement pas à tous – au *laos* [61] – mais à une partie de celui-ci – les hommes et pas les femmes, par exemple, les hommes libres et pas les esclaves, la bourgeoisie urbaine et pas les populations rurales, etc. Ensuite, le fait qu'un savoir soit déclaré « pour tous » n'implique pas que, passé le temps de l'école, tous *continuent* d'en maîtriser l'essentiel. Saint-Marc Girardin (1801-1873), membre de l'Académie française, disait ainsi, non sans un réalisme cynique : « Je ne demande pas à un honnête homme de savoir le latin ; il me suffit qu'il l'ait oublié. » À cet égard, ce qu'on peut nommer *illettrisme* d'une manière généralisée est bien la règle, non l'exception ! Tous les adultes ayant eu une scolarité obligatoire normale ont appris un jour à résoudre des équations du premier, voire du second

[61] En grec ancien, plusieurs mots existent pour désigner le peuple : pris dans sa dimension politique, c'est le *demos* ; entendu comme système culturel, c'est l'*ethnos* ; mais ces deux notions sont restrictives : le mot de *laos*, à partir duquel ont été construits les mots « laïc » et « laïcité », renvoie, lui, à la totalité des êtres humains vivant

degré ; mais qui parmi eux n'a pas perdu la fragile capacité à le faire, pourtant acquise au collège puis au lycée ? En ce sens, *les illettrismes disciplinaires sont légion* [62]. Que la statistique soit regardée comme un savoir pour tous – ce qu'elle n'est pas aujourd'hui – est une condition pour que la culture *commune* inclue une sensibilité et une référence à la statistique. Mais cela ne saurait suffire à assurer ce qu'on nommerait en anglais *a working knowledge* en la matière.

Bien d'autres exemples pourraient évidemment être cités. Dans l'École du XIX^e^ siècle, ainsi, la topographie apparaît comme un savoir pour tous, diffusé, d'une manière sans doute différenciée, au primaire comme au secondaire, dans les petites classes des lycées comme dans les classes préparatoires aux grandes écoles [63]. Alors que, dans le tome 2 de ses *Leçons de géométrie élémentaires*, relatif à la géométrie dans l'espace (dont la 8^{e} édition date de 1949), Jacques Hadamard (1865-1963) consacrait encore tout un livre à des notions de topographie (planimétrie, nivellement, arpentage), cette science n'est aujourd'hui plus guère enseignée, dans l'environnement de la scolarité obligatoire, que dans des formations spécialisées [64]. Tout citoyen se devait, hier, d'être quelque peu versé dans l'art de l'arpentage ; mais cet attribut républicain a depuis longtemps cessé d'exister même dans notre souvenir. Sans doute est-il difficile, aujourd'hui, d'imaginer que la topographie ait pu être regardée comme un savoir *pour tous* et traitée comme telle dans le système scolaire. À l'inverse, il serait difficile aujourd'hui, pour beaucoup, d'imaginer que ce savoir *encore* pour tous qu'est l'*écriture manuscrite* en vienne demain à être regardé comme un savoir spécial,

---

sur un même territoire à un moment déterminé, quelles que soient leurs origines, leurs croyances, leurs aspirations.

[62] On sait que, dans le monde de langue anglaise, a été forgé, sur le modèle de *illiteracy*, le mot *innumeracy*, qui désigne le contraire de la *numeracy*, ou la *mathematical illiteracy*. Le mot a été popularisé par John Allen Paulos dans son best-seller *Innumeracy: Mathematical Illiteracy and Its Consequences* (1988). Crédité de son invention par certains commentateurs, Paulos a pointé que ce mot avait une occurrence bien antérieure dans l'*Oxford English Dictionary*, où on le trouve dans une citation tirée d'un rapport au ministère de l'éducation anglais daté de 1959 : *"If his numeracy has stopped short at the usual Fifth Form level, he is in danger of relapsing into innumeracy"*.

[63] Voir Wozniak (2000).

[64] La topographie intervient notamment dans les formations du bâtiment et des travaux publics, rénovées en 2002 : depuis la rentrée 2003, deux BEP sont créés : les BEP *Techniques du géomètre et de la topographie* et *Techniques de l'architecture et de l'habitat* (voir http://renogc.scola.ac-paris.fr/sommaire.htm). Le BEP *Techniques du géomètre et de la topographie* peut se poursuivre par un BAC STI spécialité « Génie civil », un brevet de technicien *Collaborateur d'architecte*, un bac professionnel *Étude et organisation, gestion de travaux* (voir http://www3.ac-clermont.fr/etabliss/gromme/FORMATIONS/BEP_TGT.htm).

apanage de quelques groupes professionnels restreints en nombre, l'immense majorité des gens ne concevant et ne pratiquant l'écriture que dans sa forme électronique et ne regardant le recours à l'écriture manuelle que comme un pis-aller de l'écriture électronique ! Imaginer la possibilité d'une telle évolution sera, au reste, plus facile à qui n'ignore pas que, autrefois, beaucoup d'énergie était employée à l'apprentissage d'un savoir qui nous paraît aujourd'hui obsolète, voire sans objet : la lecture de dizaines de *« sortes »* d'écritures manuscrites, dont la reproduction ci-après donne un simple aperçu [65].


Bibliothèque manuscrite des Écoles primaires : 1re partie

Choix Gradué

de

50 Sortes d'Écritures

Pour exercer à la lecture des Manuscrits

contenant

1° Préceptes de conduite pour les enfants, et anecdotes instructives
2° Principaux événements de l'histoire ancienne et de l'histoire moderne
3° Modèles d'actes et de factures ; Notions industrielles
4° Modèles de style épistolaire

Qu'un savoir ait été considéré à une certaine époque comme « pour tous », qu'il ait acquis en ce cas une certaine noblesse culturelle, change sans doute le cours de son histoire. Pour la statistique, tel n'est cependant pas le cas, et nous ne comprendrions pas qui dirait, paraphrasant Saint-Marc Girardin : « Je ne demande pas à un honnête homme – ou plutôt à un honnête citoyen – de savoir la statistique ; il me suffit qu'il l'ait oubliée » ! À l'inverse du latin, dont l'honnête homme d'autrefois pouvait dire qu'un jour il l'avait su, la statistique est toujours *à savoir*, toujours *à apprendre* – en relation par exemple avec des développements parfois inattendus d'une carrière professionnelle. Sa connaissance n'est pas un acquis commun, mais une conquête particulière que, quand on n'en est pas un spécialiste, on a toujours *à faire* – lorsque le besoin s'en fait sentir [66]. Pour cela, et par contraste, nous nous

[65] Nous ne concevons plus guère l'existence de *sortes* d'écritures manuscrites. Cette multiplicité autrefois normée est désormais versée du côté de la personnalisation de l'écriture manuscrite. On ne dira pas que deux personnes usent de deux sortes d'écritures différentes mais qu'elles *ont* deux écritures différentes.

[66] Sans doute peut-on en dire de même, aujourd'hui, de la comptabilité d'entreprise, par exemple, notamment dans le monde des TPE (toutes petites entreprises) et de l'artisanat.

situerons dans la suite de ce travail par rapport à un fil rouge, celui des conditions sous lesquelles *pourrait* émerger, dans la culture française moyenne et non spécialisée, une culture statistique qui, en certaines de ses parties, ait une réelle opérationnalité et qui se pose sans s'opposer aux cultures spéciales sur lesquelles nous nous sommes arrêtés dans ce qui précède.

Admettons un instant qu'il soit acquis que cette culture statistique prenne son essor, en chaque génération, dans la formation apportée par l'École [67]. La problématique est certes classique et toujours actuelle : constamment, de nouveaux domaines de formation sont assignés à l'école, fréquemment sans création disciplinaire particulière. À cet égard, on peut citer d'abord la série des « Éducations à … » – à la citoyenneté, aux médias, à la santé, à la sécurité routière, etc. Les formes d'institutionnalisation scolaire varient : l'éducation à la sécurité routière, par exemple, est aujourd'hui mieux établie que ne l'est l'éducation aux médias [68]. L'inscription institutionnelle d'un domaine de formation neuf aboutit rarement à la création *ex nihilo* d'une discipline d'enseignement. Depuis plusieurs décennies, une formule, au reste, fait florès : l'assignation quelque peu confuse du souci d'un tel domaine de formation à *l'ensemble* des disciplines établies, ou, du moins, à un certain nombre d'entre elles ! La formule est sans doute d'une mise en œuvre délicate et peut notamment être regardée comme insuffisamment volontariste. Mais elle suppose que le domaine de formation ainsi installé dans une incertaine transversalité ait acquis une existence propre et un caractère précieux *en lui-même*, et non pas seulement par rapport aux valeurs de l'une ou l'autre des disciplines établies. On peut pousser plus ou moins l'éducation aux médias ou l'éducation à la santé, par exemple, mais le seul fait de les promouvoir si peu que ce soit indique qu'on voit là – chez les responsables du système éducatif – un domaine de formation *pour tous*, correspondant à des connaissances dont on affirme *ipso facto* qu'elles *devraient* prendre place dans la culture générale commune. Tel n'est pas cependant le cas avec la statistique. Si des rudiments de statistique sont pratiqués dans diverses disciplines, ce n'est pas la conséquence

---

[67] En nombre de domaines d'activité, la culture générale au sein d'une société donnée prend son essor – inégalement selon les générations et les positions sociales, sans doute – ailleurs qu'à l'École. Ainsi en va-t-il par exemple, aujourd'hui, de la culture musicale des jeunes, dans quasiment toutes ses composantes.

[68] Cela grâce aux ASSR 1 et 2, délivrées respectivement en 5e et en 3e. Ces « attestations scolaire de sécurité scolaire » sont en outre requises, hors de l'École, pour conduire un cyclomoteur ou une voiture : l'obtention de l'ASSR de niveau 1, jointe à 5 heures de conduite sous le contrôle de professionnels agréés par les préfectures permet d'obtenir le brevet de sécurité routière (BRS), obligatoire pour conduire un cyclomoteur à partir de 14 ans ; l'ASSR de niveau 2 est obligatoire pour s'inscrire au permis de conduire pour tous ceux ayant 16 ans à compter du 1er janvier 2004 (pour les candidats sortis du système scolaire, un dispositif spécifique, l'attestation de sécurité routière, est prévu dans le cadre des GRETA).

de l'idée, qui se serait imposée, de donner aux jeunes générations une *éducation statistique*, ou, pour parler d'une manière plus convenue, une « éducation à la (pensée) statistique ». Que plusieurs disciplines fassent une place à une *certaine* pratique statistique est, semble-t-il, strictement lié à la vie propre de ces disciplines, au fait que leur enseignement fait entrer à l'école un ensemble d'outils spécifiques, au nombre desquels on trouve un certain outillage de type statistique. En aucun cas, semble-t-il, le souci d'une éducation statistique *générale et commune* ne s'est concrétisé à la manière dont se concrétise la volonté de donner à chacun une éducation en matière de citoyenneté, de santé ou de sécurité par exemple. Il y a là un trait supplémentaire attestant le statut actuel de la statistique, science particulière répondant à des besoins toujours spécifiques. Bien entendu, le souci d'une éducation statistique n'est pas entièrement absent ; mais il n'a pas le caractère de « transversalité sociétale » reconnu à la formation en d'autres domaines, et qui se traduit par la « transversalité disciplinaire » de ces domaines de formation. À l'autre extrémité, il n'est pas non plus porté par une organisation sociale des savoirs qui donnerait à la statistique un statut tel que seul l'établissement d'une discipline scolaire nouvelle – « la statistique » – pourrait authentiquement concrétiser la volonté d'une formation scolaire en la matière. Un choix moyen subsiste alors : celui de confier à l'une des disciplines établies le souci de ce domaine de formation et la charge d'y initier les nouvelles générations.

Le phénomène est, en vérité, relativement banal. Longtemps, on le sait, la philosophie hébergea ainsi, non seulement la physique et la métaphysique, mais les mathématiques elles-mêmes [69]. Une fois parvenues à leur indépendance scolaire, les mathématiques, à leur tour, hébergèrent un vaste ensemble de savoirs, dont certains sont à peine regardés par les professeurs de mathématiques d'aujourd'hui comme relevant des mathématiques [70]. En classe *de mathématiques*, le cours de *mécanique* contenait ainsi, classiquement, des développements relatifs à la *cinématique* et à la *statique* – développements qui, eux-mêmes, s'ouvraient à des rudiments de la théorie des « vecteurs libres ». La statique accueillit longtemps l'enseignement des *machines simples*, c'est-à-dire de ce que tel auteur [71] définit abstraitement comme « corps solides gênés », et qui se déclinent en l'étude de divers dispositifs tout aussi classiques – levier, treuil, cabestan, poulie (fixe ou mobile), moufles et palans, etc. [72] Au

[69] Voir Artaud (1989).

[70] Voir Chevallard (2001).

[71] Papelier (1955), p. 226.

[72] Un texte anonyme longtemps attribué à Aristote, qui doit dater de la Grèce de la fin du IIIe siècle ou du début du IIe siècle avant notre ère, présente sous le nom de *Questions mécaniques* la première théorie des machines

cours de son histoire, en vérité, l'enseignement des mathématiques aura hébergé bien autre chose que ces parties de la physique que sont la cinématique, la statique, voire la dynamique. À cet égard, l'un des critères essentiels de viabilité, dans un habitat mathématique, de domaines non strictement mathématiques semble être ce fait que les objets non strictement mathématiques – par exemple les objets matériels – y restent à l'état d'*évocation* : on peut traiter de machines simples en classe de mathématiques si on ne fait qu'*évoquer* la poulie comme un « système » matériel dont on ne retient réellement qu'un modèle mathématique, exprimable par des signes tracés sur du papier. Évoquons ici, à ce propos, un autre cas de compagnonnage imposé à l'enseignement des mathématiques par le biais de la géométrie, à côté des pratiques d'*arpentage* et de *topographie* : celui du *dessin géométrique*, du *croquis coté* et, à titre d'accompagnement quasi indispensable, celui de *l'écriture bâton*, dont un auteur du temps préconisait de l'employer « le plus possible » et « de préférence à la ronde ou à la bâtarde, particulièrement pour les chiffres [73] ».

Nous sommes là, évidemment, assez loin de ce qu'on peut entendre par « mathématiques » en un sens courant du terme ! Il est vrai cependant que tout, à nouveau, se déroule sur le papier ;

---

simples (à propos de la roue, du coin, du levier, de la vis et du treuil). La statique autrefois enseignée maintenait ainsi la tradition des mathématiques *mixtes*.

[73] Valmalette (1933), p. 45. L'image ci-après figure p. 46 de cet ouvrage.

mais ici, contrairement à ce qu'il en est en mathématiques *stricto sensu*, la pointe traçante – plume, bille, craie, marqueur, crayon etc. – n'est pas chose indifférente : l'écriture bâton appelle la « plume bâton », et rien d'autre. Il y a donc là un composé instable, un hébergement provisoire qu'imposent certaines conditions de niveau d'enseignement et d'époque, dont il nous semble que, au demeurant, nous sommes désormais fort loin.

Que peut-on dire alors de la dévolution actuelle aux mathématiques de la formation scolaire en statistique ? La chose va-t-elle de soi ? Sinon, est-elle viable ? A-t-on au contraire affaire à un composé hybride instable ? Paradoxalement, les réponses à ces questions ne sont pas mécaniquement réglées. Est-il naturel que l'enseignement des mathématiques prenne en charge l'éducation statistique ? La physique, elle aussi, fait appel aux mathématiques : elle n'en a pas moins droit à un enseignement propre. Or tel n'est pas le choix dominant aujourd'hui en matière de statistique. C'est ainsi que, lors d'une séance tenue le 22 mai 2000 à l'Académie des sciences sur le thème *L'enseignement des mathématiques en liaison avec les autres disciplines*, Edmond Malinvaud [74] résumait en quelques points clés sa réflexion sur l'enseignement de la statistique :

> – Les professeurs de mathématiques ont une vocation évidente à prendre en charge la formation au mode de raisonnement statistique (aléatoire, variabilité, induction à partir de données nombreuses).
>
> – Ce raisonnement est aujourd'hui à la fois universellement pratiqué et mal pratiqué, voire malmené et ce, dans tous les domaines, de la formation des ingénieurs à la recherche.
>
> – Qui doit assurer cet enseignement ? Tous les professeurs dans leur domaine (biologie, sciences économiques et sociales…) mais, dans son aspect le plus général, les professeurs de mathématiques, dont c'est le rôle par excellence.

Il ne va pas de soi, pourtant, que la présence de la statistique dans le corpus mathématique enseigné soit un phénomène stable, viable à terme. Le principe introduit plus haut – celui de la réduction « chirographique » (ou « typographique ») des objets évoqués dans la classe de mathématiques – semble, il est vrai, être respecté (et fonde d'ailleurs largement le travail du statisticien professionnel), car le réel non mathématique y est réduit en séries de valeurs numériques qui referment l'univers statistique sur lui-même. Mais le contrôle aux frontières y est, apparemment, chose délicate. Alors que, par exemple, en statique ou en topographie,

---

[74] Edmond Malinvaud a fait une grande partie de sa carrière à l'INSEE et a été directeur de l'ENSAE de 1962 à 1966, directeur général de l'INSEE de 1974 à 1987, professeur au Collège de France de 1988 à 1993, spécialiste de macro-économie et de méthodologie de la science économique. Le compte rendu de la séance que nous citons, rédigé par Béatrice Ajchenbaum-Boffety et Jean-Claude Duperret, se trouve sur le site de la SMF : voir http://smf.emath.fr/Enseignement/CommissionKahane/Academie22-05-2000.html.

l'univers des objets extramathématiques que doit héberger la classe de mathématiques est a peu près clos, il n'en va pas de même des objets que l'on peut être amené à évoquer comme matière d'un traitement statistique, si canonique soit-il ! Chez *l'utilisateur* de statistique, les objets extramathématiques nourrissant le travail statistique constituent un univers borné, qui varie selon qu'on s'occupe de statistique industrielle ou de statistique médicale, etc. Or un enseignement *général* des rudiments de la statistique doit prendre pour règle, en principe, de ne se limiter à aucun domaine d'activité particulier ! En même temps, l'écologie de la classe de mathématiques ne saurait accueillir, sous les conditions usuelles, une pléthore d'objets extramathématiques. La solution à cette difficulté essentielle semble devoir se trouver dans un travail de transposition didactique qui, à l'instar de ce qui a pu se passer en matière de statique ou de topographie, sélectionne un ensemble fini de types de situations du monde qui, à la fois, soient assez largement représentatifs de l'ensemble des situations du monde sur lesquelles la statistique intervient, et qui, en dépit de cela même, constituent un matériau adéquat pour motiver et alimenter l'étude d'une riche diversité de concepts et de « gestes » statistiques. Soulignons qu'il n'y a pas ici, à nos yeux, de *fatum* qui assombrirait le destin scolaire de la statistique, pas plus qu'il n'y en eût, autrefois, concernant la topographie ou la statique : tout tient dans un processus non immédiat *d'élaboration transpositive* qui ne saurait par principe (si l'on vise un enseignement *général* de la statistique) se contenter de reprendre *ne varietur* les élaborations *spéciales* réalisées dans des champs déterminés d'intervention de la statistique – biologie, économie, psychologie, sociologie, éducation, etc. Nous verrons plus loin que ce travail transpositif reste aujourd'hui largement à faire.

Un tel effort transpositif comporte des difficultés propres. Mais il est une autre difficulté qu'il convient de mentionner : celle liée à la *singularité* du défi lancé ainsi à l'enseignement des mathématiques. Alors en effet que les disciplines autres que les mathématiques mobilisent des connaissances en statistique *au service* de la discipline concernée elle-même – ainsi en va-t-il pour la physique-chimie, les sciences économiques et sociales, l'histoire-géographie, l'EPS, etc. –, la statistique étudiée en classe de mathématiques n'a, en principe, nullement pour objet de servir l'enseignement des mathématiques, c'est-à-dire d'être un outil pour étudier des mathématiques. Or, dans l'enseignement secondaire, l'histoire a créé en chaque discipline un système de valeurs dont on peut dire, en forçant volontairement le trait, qu'il permet de tout demander à une discipline donnée dès lors qu'il s'agit de servir cette discipline, mais qui interdit de rien lui demander de substantiel pour servir d'autres territoires de la connaissance. La difficulté est que, par delà les bons sentiments, par delà l'affirmation du « rôle par excellence » du professeur de mathématiques, on ne voit pas que la corporation des professeurs de mathématiques soit significativement plus altruiste que ne le sont celles des professeurs de physique-chimie, de SES ou d'EPS par exemple. La posture épistémologique qui constituerait une condition de facilitation consiste à assumer les savoirs mathématiques, non pas tant comme des biens précieux *en eux-mêmes* que comme des œuvres dont la *valeur sociale* dépend éminemment de leur capacité à produire de l'intelligibilité dans les situations du monde les plus variées et à aider à y agir de manière éclairée. Or le système scolaire, hier comme aujourd'hui, continue de placer les mathématiques dans une position de quasi-suffisance épistémologique, dont le sort ne serait pas lié à ce que les mathématiques peuvent faire pour le sort des autres savoirs et de leurs utilisateurs.

Le verrou épistémologique et culturel que constitue l'idéologie indépendantiste et la revendication d'autarcie qui pèsent aujourd'hui encore sur l'enseignement des mathématiques a été bien repéré par Jean-Pierre Kahane [75]. Le point de vue qu'il développe à cet égard est subtil. Face à une corporation qui hurle à l'utilitarisme dès qu'on évoque l'usage extramathématique qui pourrait être fait de telle théorie, de telle notion, de telle technique mathématique, il s'efforce de promouvoir l'idée de *l'utilité* des mathématiques, écrivant par exemple [76] :

> À l'opposé de l'utilitarisme, il est important de penser aux mathématiques comme utiles aujourd'hui et demain, et de faire de leur utilité présente et à venir l'un des critères de choix des enseignements que l'on en donne. L'utilitarisme est à court terme, l'utilité est une vision à long terme.

Une telle proposition, on s'en doute, n'est pas d'elle-même susceptible d'entamer l'assurance des enseignants de mathématiques quant à l'ardente obligation qu'ils se font de maintenir intacte l'image – plutôt que la réalité, au reste – d'une discipline « en soi et pour soi », qui ne renverrait guère qu'à elle-même. En mai 2004, celui qui était alors le président de l'APMEP, Michel Fréchet, intitulait encore son éditorial du n° 452 du *Bulletin de l'APMEP* : « Les

---

[75] Né en 1926, Jean-Pierre Kahane est membre de l'Académie des sciences depuis 1998. À la demande des associations de mathématiciens (APMEP, SMAI, SMF et UPS), Claude Allègre, alors ministre de l'Éducation nationale, lui donne mission le 8 avril 1999 de réunir un groupe d'enseignants et de chercheurs pour conduire, en amont du Conseil national des programmes et du groupe d'experts chargés d'élaborer les programmes de mathématiques de l'enseignement secondaire, une réflexion globale et à long terme sur l'enseignement des mathématiques de l'école élémentaire à l'université. Reconduite dans ces fonctions par le nouveau ministre de l'Éducation nationale, Jack Lang, le 5 décembre 2000, la Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques (CREM) publiera son rapport en mars 2002.

[76] Kahane (2002b), p. 14.

mathématiques ne sont pas qu'une discipline de service. » Il y soulignait notamment que « les mathématiques sont une discipline de l'esprit, peut-être la plus rigoureuse… » Ainsi donc tout se passe-t-il, dans l'épistémologie spontanée de ces professeurs, comme si, dans l'expression « discipline de service », le mot de *service* effaçait la référence à une *discipline*. Comme si une discipline de service n'était pas une discipline de l'esprit, tout particulièrement lorsqu'il s'agit d'une discipline *mathématique* ! La pesanteur de la pensée ordinaire a ici, on le voit, des effets terriblement ravageurs. Devant une rhétorique traditionnelle et qui semble si fortement indurée encore aujourd'hui, l'argumentation de Jean-Pierre Kahane redouble alors de subtilité. L'une des faiblesses des mathématiques, à les comparer aux autres sciences, tient dans leur objet. Les sciences *non* mathématiques ont un objet spécifique, observe-t-il [77] :

> L'utilité des autres sciences se mesure par leur prise sur un champ de la réalité. La biologie est la science du vivant, la physique celle de la nature inanimée, l'astronomie celle des astres, etc.

Par contraste, note Kahane, « les mathématiques ne se réfèrent pas directement à un champ de la réalité ». Que font-elles alors ? Il répond en ces termes : « Elles opèrent sur des abstractions déjà constituées, elles les malaxent et les triturent pour en extraire des méthodes et des principes généraux qui en garantissent l'usage, indépendamment du domaine où on les applique. » Conclusion : « La spécificité des mathématiques dans l'ensemble des sciences, c'est cette non-spécificité à l'égard de la réalité extérieure. » Et d'ajouter : « C'est la nature des mathématiques : on ne peut pas dire à quoi elles s'appliquent parce qu'elles viennent de partout et sont susceptibles de s'investir partout… » Dans le prologue de *L'enseignement des sciences mathématiques* [78], l'auteur fait de cette faiblesse apparente une force, et une force des mathématiques *en tant que discipline de service*, précisément. C'est en effet en tant qu'elles se manifestent comme discipline de service que les mathématiques affirment leur spécificité « comme généralistes de la connaissance [79] ». On n'est pas fidèle à l'esprit des

---

[77] Kahane (2004).

[78] Kahane (2002b).

[79] Dans un article intitulé *Mathématiques comme discipline de service* et publié en 1988 dans le *Bulletin de l'APMEP*, Jean-Pierre Kahane écrivait déjà : « Le titre de cette étude peut choquer. Les mathématiques sont la plus ancienne des sciences. Pourquoi serait-elle *au service* des autres, ou pire, *au service* d'activités techniques ? En les réduisant à un rôle utilitaire, ne dégrade-t-on pas leur contenu et leur image ? Disons tout de suite que pour nous, "les mathématiques comme discipline de service" ne sont pas des sous-mathématiques, ou des mathématiques limitées à des champs particuliers. Il s'agit de la totalité des mathématiques, comme science vivante, susceptible – l'histoire nous le montre sans cesse – d'applications imprévues dans des domaines très variées. » Il observait à ce propos que, s'il n'y a pas de prix Nobel en mathématiques, « il y a des prix Nobel

mathématiques, nous dit en quelque sorte Jean-Pierre Kahane, si on ne leur permet pas de manifester ce qu'il y a de plus spécifique en elles et qui fait leur unicité épistémologique : cette propriété de pourvoir à la pensée en tout domaine *a priori* possible. Une telle révolution par rapport à la pensée commune de la profession s'accompagne d'un changement de vocabulaire que, dans une conférence donnée au colloque EM 2000, Kahane explicite ainsi [80] :

> Un trait majeur des mathématiques de l'an 2000 est qu'elles sont, de nouveau, intimement mêlées aux autres sciences. Cela explique les sentiments à leur égard que j'ai déjà signalés. En quarante ans, nous sommes passés de *la* mathématique, suivant la terminologie de Bourbaki, *aux* mathématiques pures et appliquées, et, maintenant, aux *sciences mathématiques* qui intègrent non seulement l'activité des mathématiciens, mais la part d'activité mathématique qui se manifeste chez les mécaniciens, les informaticiens, les physiciens, les biologistes, les économistes, etc.

Ajoutons : et chez les didacticiens des mathématiques. On retrouve là une grande inspiration, celle qui présidait à l'ancienne notion de mathématiques *mixtes*. Mais ici, le changement de la cartographie des disciplines situe les mathématiques, non en position dominante, comme au XVIIIe siècle encore, face à des disciplines encore en développement, mais en position en quelque sorte symbiotique vis-à-vis de disciplines maintenant bien développées, ayant depuis longtemps, pour la plupart, atteint l'âge de la maturité scientifique. Cette configuration des disciplines au sein desquelles les mathématiques sont appelées à vivre et à se développer suppose, en quelque sorte, tout un changement mental, et une réforme intellectuelle et morale. Dans cette perspective, Jean-Pierre Kahane écrit encore [81] : « Il est bon de ne plus raisonner seulement en termes de "mathématique", "mathématiques pures et mathématiques appliquées", mais de considérer l'ensemble des "sciences mathématiques" dans la variété de leurs acteurs et de leurs utilisateurs. » Désormais, la flèche de l'histoire semble pointer vers une situation d'altruisme épistémologique, dans laquelle les professeurs de mathématiques seraient appelés à se soucier de ce que les mathématiques à enseigner peuvent faire pour l'heureux développement des autres savoirs, en quelque champ de connaissance qu'ils fleurissent. Ainsi serait enfin levée une des contraintes qui affectent le plus durement, nous

---

mathématiciens », tels Herbert A. Hauptman et Jerome Karle, prix Nobel de chimie 1985 « pour le développement de méthodes de détermination de structures cristallines, fondées sur l'analyse de Fourier et les probabilités », ou Gérard Debreu, prix Nobel d'économie 1983, etc.

[80] Kahane (2002a). EM 2000 est un colloque qui s'est tenu à Grenoble les 15, 16 et 17 juillet 2000, à l'occasion de l'année mondiale des mathématiques.

[81] Kahane (2002b), p. 264.

semble-t-il, l'enseignement de la statistique au second degré : l'interdit pesant sur un commerce non prédateur avec les autres savoirs.

5. Sciences mathématiques, modélisation, statistique

Il est sans doute utile en ce point d'expliciter quelque peu une situation qui, faute d'exister réellement, doit être évoquée à travers quelques exemples. Dans l'idée de mathématiques mixtes, on l'a noté, les mathématiques sont, si l'on peut dire, à leur avantage. Selon une formule relativement récente, elles *interviennent* de façon souvent ponctuelle, dans un domaine de réalité extramathématique dont quelques éléments sont ainsi mathématisés, mais sans frayer davantage avec ce domaine de réalité. C'est, semble-t-il, ce type d'interventions des mathématiques que d'Alembert avait en vue lorsque, dans l'article MATHEMATIQUE OU MATHEMATIQUES de l'*Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers* (1751-1772), d'Alembert (1717-1783) décrivait dans les termes suivants le schéma commun aux mathématiques mixtes ou sciences physico-mathématiques :

> … par l'application des calculs mathématiques à l'expérience, [les sciences physico-mathématiques] déduisent quelquefois d'une seule & unique observation un grand nombre de conséquences qui tiennent de bien près par leur certitude aux vérités géométriques. Ainsi une seule expérience sur la réflexion de la lumière donne toute la Catoptrique, ou science des propriétés des Miroirs ; une seule sur la réfraction de la lumière produit l'explication mathématique de l'Arc-en-ciel, la théorie des couleurs, & toute la Dioptrique, ou Science des Verres concaves & convexes ; d'une seule observation sur la pression des fluides, on tire toutes les lois de l'équilibre & du mouvement de ces corps ; enfin une expérience unique sur l'accélération des corps qui tombent, fait découvrir les lois de leur chute sur des plans inclinés, & celles du mouvement des pendules.

Dans ce mode d'intervention mathématique, le contact avec l'extramathématique est, ainsi qu'on le voit, limité le plus possible. Une telle problématique n'a pas disparu ; mais elle a pris à l'époque moderne, dans l'enseignement des mathématiques tel qu'il a évolué au niveau mondial, une forme repérée par l'étiquette de *mathematical modelling*, de modélisation mathématique [82]. Dans cette problématique – du moins dans celle qui prévaut largement dans le monde de langue anglaise –, les interactions avec des micromondes extramathématiques semblent faciles et dénuées de toute prévention. Dans l'ouvrage cité plus haut, on trouve ainsi, après le premier chapitre, intitulé *What is Modelling ?*, un deuxième chapitre qui, lui, a pour titre *Getting started* – « Pour démarrer ». De manière typique ce chapitre comporte

[82] Voir ainsi Edwards & Hamsen (2001). Cet ouvrage s'adresse aux étudiants.

quelque vingt et une petites études de modélisation, qui touchent à un grand nombre de domaines de la nature ou de l'activité humaine : durée de vie des oiseaux, records olympiques sur 200 m plat (pour les hommes et pour les femmes), efficacité de certains types d'essuie-glaces, fonctionnement des feux de circulation, problèmes de prix, d'évacuation d'un bâtiment en cas d'urgence, problèmes de transport dans des couloirs faisant des coudes, problèmes de pêcherie, de prêts aux étudiants, problèmes de gestion du plan de travail dans un atelier de mécanique automobile, d'organisation de tournois de football américain, d'utilisation de chasse-neige en cas de chutes de neige imprévues, problèmes de marches aléatoires, etc. Dans chaque cas, cependant, l'attention accordée au domaine d'intervention est réduite à la portion congrue : ce qu'il faut savoir des phénomènes à modéliser est, en règle générale, *minimal*, même si les domaines de réalité où ils se découpent font l'objet de recherches nombreuses, voire très développées [83]. D'une manière générale, cependant, l'objectif n'est nullement de se familiariser avec de tels domaines de recherche, mais seulement d'en sélectionner quelques éléments qui fourniront « l'infrastructure » d'un travail *ponctuel* de modélisation mathématique.

Le développement de la modélisation mathématique comme matière d'enseignement s'est, en vérité, réalisé en sens inverse de celui que l'on peut associer à l'idée de sciences mathématiques. Au lieu d'étudier ce que Jean-Pierre Kahane appelle « la part d'activités mathématiques » présente, par exemple, en biologie, on a fait porter l'effort vers la constitution d'une théorie et d'une technologie de la modélisation mathématique relativement indépendantes des systèmes à modéliser. C'est ainsi que le chapitre 3 de l'ouvrage mentionné – *Guide to Mathematical Modelling* – est intitulé *Modelling Methodology*, tandis que le chapitre suivant est consacré aux *Modelling Skills* – l'un plutôt « technologique », donc, l'autre plutôt « technique ». Le sentiment que l'on retire de l'observation d'une telle production est que les mathématiques, campées solidement sur leurs bases, mais arc-boutées à une théorie et une technologie plus spécifiques, celles de la « modélisation mathématique », interviennent sans qu'une reconnaissance vraie des sciences des différents domaines de réalité ainsi visités soit jamais véritablement à l'ordre du jour. Ces rencontres erratiques, parfois rugueuses, presque toujours éphémères sont en général prédéterminées par un outillage mathématique plus ou moins fixé à l'avance. L'ouvrage cité comporte ainsi, après le chapitre sur les *Modelling Skills*, quatre chapitres intitulés respectivement *Using Difference Equations*,

[83] S'agissant de la régulation du trafic, ainsi, il existe une importante activité scientifique, dont on pourra se faire une idée en allant voir (par exemple) à l'adresse http://www-math.unice.fr/~bertheli/Page_Web/ACI.html.

Using Differential Equations, Using Random Numbers, Using Data. Cela fait, l'avant-dernier chapitre s'intitule significativement *Example Models*. On y retrouve exemplairement l'interaction minimaliste avec un domaine auquel on applique des mathématiques pré-constituées – les différentes sections s'intitulent *Driving speeds, Tax on cigarette smoking, Shopping trips, Disk pressing, Gutter, Turf, Parachute jump, On the buses, Further battles, Snooker*. En pratique, on le voit, la problématique dominante de la modélisation mathématique conduit à une discipline « transactionnelle », à une « formation de compromis » dont l'utilité n'est pas niable mais dont on doit surtout souligner ici qu'elle semble vouer à n'avoir avec les domaines de réalité qu'elle parcourt que des rapports relativement protégés. Ce phénomène essentiel est motivé sans doute en partie par un souci parfaitement justifié d'économie cognitive : pour modéliser un phénomène biologique, par exemple, on n'a pas à savoir « toute la biologie » ! Mais un autre mobile, beaucoup plus ambigu, apparaît en filigrane : le risque d'une dissolution de la discipline mathématique dans une fréquentation libre des autres domaines disciplinaires. C'est entre ces deux contraintes que la pratique et la théorie de la modélisation mathématique doivent se situer. Or il est clair que la seconde contrainte – concernant la légitimité d'un commerce libre avec les autres disciplines – ne facilite pas même un commerce *minimaliste* avec elles, dans la mesure où celui-ci n'est pas *a priori* déterminé dans ses objets – dans la mesure, par exemple, où la parcelle de biologie que l'on devra étudier n'est pas connue à l'avance et fixée une fois pour toute. Le danger est grand alors que, sous le nom de modélisation mathématique, ne se transmette un corpus d'interventions stéréotypées d'une série d'outils mathématiques pré-constitués.

En tout état de cause, la pénétration actuelle, dans l'enseignement secondaire français, de la modélisation mathématique reste faible. Ce n'est pas que les textes officiels s'y montrent hostiles. Le programme de sixième entré en vigueur en 1995 évoque ainsi la « modélisation de quelques situations » et parle du « modèle proportionnel », tandis que le document d'accompagnement correspondant indique plus explicitement encore :

> [Les problèmes] posés dans d'autres champs disciplinaires […] sont l'occasion de commencer à travailler sur l'idée de modélisation mathématique. Ils permettent, en particulier, de décrire, contrôler et anticiper des phénomènes dans des situations accessibles aux élèves…

En fait, le vocabulaire de la modélisation et des modèles semble, à l'instar de celui des grandeurs, réservé à la description, dans les textes officiels, de l'univers mathématico-didactique que le professeur devra faire vivre dans la classe, sans pour cela que cet univers inclue les concepts de modèles et de modélisation. Cela noté, les rédacteurs des programmes et des documents qui les accompagnent semblent tout à fait à l'aise avec la problématique de la modélisation. Ainsi écrivent-ils – dans le document d'accompagnement du programme du cycle central du collège, cette fois – que c'est seulement en classe de troisième « que les fonctions linéaires sont introduites pour modéliser les situations de proportionnalité ». À propos du programme de troisième, précisément, le document d'accompagnement notera, de même, que « toute situation de proportionnalité est modélisable par une fonction linéaire ». Cette observation fait l'objet d'un commentaire typique de la problématique de la modélisation :

> Dans cette perspective, il convient d'être attentif, avec les élèves, aux questions soulevées par le domaine d'adéquation du modèle mathématique avec la situation traitée, en ayant soin de préciser, chaque fois, le domaine de signification de la fonction (définie, elle, sur l'ensemble des réels) dans le contexte de la situation traitée (qui impose souvent une restriction à un intervalle ou à un nombre fini de valeurs).

Les mêmes auteurs ajoutent : « Grâce à la modélisation, il est, par exemple, possible d'anticiper sur des évolutions et donc de disposer d'instruments d'aide à la décision. » Notation qui, redoublée dans le même passage (« la modélisation permet notamment d'appréhender des situations et d'anticiper sur les évolutions. »), sonne familièrement dans la culture du *mathematical modelling*.

La référence à la modélisation reste présente dans le programme de sixième qui entrera en vigueur à la rentrée 2005, où on lit par exemple que « les connaissances géométriques permettent de modéliser des situations ». Pourtant, de 1995 à 2005, la situation n'a guère évolué, nous semble-t-il, dans le sens d'une intégration assumée, dans l'enseignement des mathématiques au collège, de la problématique de la modélisation. Qu'en est-il au lycée ? Le programme de seconde entré en vigueur en septembre 2000 parle de modèles uniquement à propos des modèles probabilistes, comme si la reprise de la transposition didactique dans le domaine de la statistique et des probabilités était l'occasion, voulue comme telle ou non, d'instiller ces notions dans la culture mathématique du secondaire. En même temps, la restriction imposée à ce domaine semble annoncer une victoire à la Pyrrhus ! De fait, la responsable de l'élaboration des programmes, Claudine Robert, dira par exemple, lors d'une conférence donnée le 16 janvier 2002 à Clermont-Ferrand [84], que la « commande de l'institution » appelait « une réflexion sur l'enseignement

[84] Voir http://wwwmaths.univ-bpclermont.fr/irem/documents/archives/c.robert.pdf.

de la modélisation », sous-tendue par l'idée « d'introduire éventuellement des éléments allant dans ce sens ». L'exigence – pour des élèves de seconde déjà – de « réfléchir sur la modélisation », note-t-elle un peu plus loin dans sa conférence, fait l'objet « d'un large consensus dans la communauté mathématique ». Cette exigence, au demeurant, s'articule à celle de la formation citoyenne, comme le suggère cet autre passage du texte cité :

> On débat aussi beaucoup sur le thème « Mathématiques et pensée critique » : la démonstration mathématique force l'assentiment de celui à qui on la présente et une certaine forme de pensée critique ne peut pas s'exercer. La modélisation, elle, permet le développement de ce type de pensée.

Plusieurs problèmes, signale encore Claudine Robert, se posent dès lors qu'on souhaite s'avancer sur la voie de la modélisation mathématique, problèmes qu'elle résume en suggérant que « l'enseignement des sciences actuel peut constituer un obstacle à la modélisation », au point de la conduire à envisager qu'il soit trop « tôt dans le secondaire pour faire de la modélisation ».

C'est ainsi sous le signe de l'ambiguïté que l'idée de modélisation et de modèles entre dans le nouveau programme de seconde, et dans les programmes de première et de terminale qui suivront. La modélisation y est solidaire de l'expérimentation, par le biais de la notion de simulation, que le document d'accompagnement du programme de seconde présente comme « une pratique scientifique majeure » de notre temps. « Formellement », dit ce même document, « simuler une expérience c'est choisir un modèle de cette expérience puis simuler ce modèle. » C'est par exemple, pour une expérience aléatoire donnée, la modéliser par une certaine loi de probabilité, et simuler ensuite cette loi de probabilité. Mais ce n'est pas là ce qu'on fera en seconde, classe dans laquelle, précise le même document, « simuler une expérience consistera à produire une liste de résultats que l'on pourra assimiler à un échantillon de cette expérience ». En fait, ajoute-t-on encore, « on se contentera de simuler des situations très simples, reposant le plus souvent sur la simulation d'expériences de référence où toutes les issues ont des chances égales d'apparaître ». L'univers de la classe de mathématiques se referme : *exit* le modèle, *exit* même la réalité à modéliser, qui prend dès lors la forme d'un répertoire stéréotypé de « situations très simples ». Ce qui peut apparaître ici comme une restriction didactique raisonnable pour des commençants dissimule en réalité la reconduction subreptice d'une attitude épistémologique et culturelle de confinement de la classe de mathématiques. L'idée de sciences mathématiques n'est qu'une invocation sans matérialité ni effectivité. Le problème de « l'altruisme épistémologique » reste ouvert.

Chapitre 5

Avant la classe : culture mathématique et formation

1. La statistique dans l'univers mathématique des futurs professeurs

Dans l'univers des mathématiques savantes, la statistique est une demi-née. La place définitive de la théorie des probabilités sur le continent mathématique fut, on le sait, tardive. À ce propos, dans *The Fontana History of the Mathematical Sciences,* l'historien Ivor Grattan-Guinness écrit [1] :

> In 1933, two years after Gödel's theorem appeared, the Soviet mathematician Andrei Kolmogorov (1903-1987) furthered the cause of axiomatization by publishing a system for probability theory. This landmark achievement placed the subject at last within the sphere of "orthodox" mathematics, for he drew upon set theory – another late arrival, but by then impeccably placed in the rainbow.

Le même auteur poursuit [2] :

> Thanks to this contribution and several others of the 1930s, this ancient root of mathematics began at long last to run as a major branch along with all the others.

---

[1] *Op. cit.*, p. 738. La mention du *rainbow* – l'arc-en-ciel – fait référence au sous-titre de l'ouvrage – *The Rainbow of Mathematics*. Nous prenons la liberté de reproduire ici l'explicitation que fournit l'auteur touchant cette image (*op. cit.*, p. 8) : "The word 'rainbow' is intended not to convey an impression of mathematics as a merely two-dimensional spectrum with fairly determinate ends, but to suggest two other, more profound analogies. The first analogy, which constitutes the principal lesson of this book, is with *the stupendous variety and vastness* of the range of activities in which mathematics has played a significant role. It enjoys a unique ubiquity in the history of ideas, and also in modern life. The second analogy is in marked contrast. The history of mathematics is largely absent from the 'culture' of the educated public, historians and mathematicians included. The extent to which it is dismissed, abhorred, even derided, has to be experienced to believe (…). Like the rainbow, mathematics may be admired, but – especially among intellectuals – it must be kept at a distance, away from real life and polite conversation. However, unlike the real rainbow, mathematics stays still when approached, and readily admits the active inquirer into its world of many colours."

[2] *Ibid.*, p. 739.

Cela noté, la statistique – même mathématique – continuait de mener une vie interlope. D'un point de vue britannique, Grattan-Guinness écrit à ce propos [3] :

> By contrast, much mathematical statistics continued to be practised largely in institutions of industry or government, or in university Departments of Statistics separate from their Department(s) of Pure and Applied Mathematics. Many of its applications to the social and life sciences have blossomed only since the Second World War […]. This latest arrival of all is now a gigantic affair, but it is still practised rather outside the mathematical profession – as Table 17.1.1 hints.

La table 17.1.1 à laquelle l'auteur fait ici référence présente la classification des mathématiques selon les *Mathematical Reviews* (1991). À son propos, I. Guittan-Guinness note [4] :

> […] this taxonomy is somewhat perfunctory on probability and statistics, which are however covered in detail in *Statistical Theory and Method Abstracts* ; and mathematical education, omitted almost entirely, is handled by the *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik.*

La statistique, ainsi, est donc traitée à part – à l'instar de la didactique des mathématiques !

L'opposition à la statistique venant de l'intérieur du continent mathématique a une longue histoire. Nous l'illustrerons ici à travers des propos anciens mais fortement significatifs du mathématicien André Weil (1906-1998). Dans un article paru en 1940 dans la *Revue Rose*, intitulé *Calcul des probabilités, Méthode axiomatique, Intégration*, Weil écrit notamment ceci [5]:

> ... sans méconnaître les services considérables que la statistique mathématique a rendus à la science (et en particulier aux sciences biologiques), il faut bien constater que les ouvrages de statistique se réduisent en définitive à des collections de recettes et de préceptes que nous voulons croire heureusement choisis, mais qui, se trouvant sous forme hautement algébrique et comportant même parfois l'emploi de logarithmes, d'exponentielles et d'intégrales, jouissent aux yeux du profane de tout le prestige de l'exactitude mathématique, alors que les soi-disant « démonstrations » dont on l'entoure, si hautement techniques qu'elles soient, n'ont le plus souvent aucun sens pour le mathématicien et consistent simplement en considérations heuristiques plus ou moins probantes.

La charge donne même dans le grotesque :

> La statistique moderne paraît avoir enfin résolu le problème légendaire qui consistait, connaissant la longueur du navire et la durée de la traversée (du temps de la navigation à voiles on y ajoutait la hauteur du grand mât) à calculer l'âge du capitaine : transmettez ce problème à n'importe quel institut

[3] *Ibid.*

[4] *Op. cit.*, p. 721.

[5] Cette citation, comme les suivantes, est extraite de Meusnier (2004), pp. 261-262.

spécialisé, et l'on vous adressera bientôt un savant mémoire, où, non sans tableaux de chiffres et graphiques, seront calculés tous les coefficients de corrélations entre les variables ci-dessus.

Le propos de Weil, sans doute, ne se limite pas à cela, et il veut bien laisser vivre, sous condition, cette statistique qui répugne au mathématicien :

> Nous ne disons pas que tout cela soit inutile ni dépourvu de sens : mais il serait grandement à souhaiter que les problèmes posés par la statistique et par les « probabilités des causes » fussent bientôt élucidés en toute rigueur, d'une manière entièrement satisfaisante pour le mathématicien, en se plaçant sur le terrain d'une théorie axiomatique correcte, et séparant ce qui est susceptible de démonstration et ce qui est purement conventionnel. Après quoi, il ne serait sans doute pas très difficile, avec un minimum de formules et de détails techniques, de mettre les résultas obtenus à la portée de ceux qui voudraient en faire usage. Il est à croire ainsi qu'un traitement rigoureux conduirait à une appréciation plus exacte des divers résultats dont se servent aujourd'hui les statisticiens, en permettant de juger de leur valeur mathématique.

Cet ostracisme à l'encontre de la statistique sera évidemment partagé par un grand nombre de membres du groupe Bourbaki et, par ce biais notamment, imprégnera les institutions mathématiques françaises – en sorte que le premier DEA de statistique ne sera créé qu'en 1970, à l'université Pierre et Marie Curie.

D'une façon générale, beaucoup plus encore que la théorie des probabilités, la statistique apparaît clairement comme périphérique par rapport à la formation mathématique standard. De nombreux phénomènes l'attestent, dont nous ne ferons état que rapidement. Au CAPES (ou à l'agrégation) de mathématiques, les sujets de statistique sont regardés, par certains formateurs même, comme *à éviter*. Ainsi se scelle la biographie mathématique de tant de professeurs, que marque une indigence indéfiniment prolongée en la matière. L'agrégatif qui avait évité d'étudier la statistique jusque-là continuera d'éviter à l'agrégation une matière sur laquelle il ne peut guère espérer être performant puisqu'il ne l'a jamais travaillée sérieusement. Ce n'est alors qu'en deuxième année d'IUFM que, s'il a la responsabilité d'une classe de seconde, il découvrira peut-être le besoin de s'instruire… Nonobstant de telles stratégies d'évitement, les étudiants qui préparent le CAPES de mathématiques doivent se préparer à devoir éventuellement exhiber, devant le jury des épreuves orales d'admission, leurs connaissances en matière de statistique. Même si le lieu est lâche entre épreuves orales et programme complémentaire du CAPES, notons ici que ce dernier comporte une petite partie de statistique, que nous reproduisons ci-après :

> **4. Notions de statistiques**

a) Statistique descriptive : paramètres de position (moyenne, médiane, quantiles, modes) et de dispersion (écart-type, variance). Divers modes de représentation graphique.

b) Échantillons. Intervalle de confiance d'une moyenne ou d'une fréquence.

c) Tests d'hypothèse ; les deux types de risque d'erreur.

d) Tests de paramètres : estimation du paramètre p d'une loi binomiale, de la moyenne m d'une loi normale. Test unilatéral, bilatéral. Comparaison de deux moyennes.

Dans le cadre de la formation donnée à l'IUFM d'Aix-Marseille, les élèves professeurs de première année (de même que ceux de deuxième année d'ailleurs) sont invités à formuler par écrit, chaque semaine ouvrable, les difficultés qu'ils rencontrent [6]. Or, sur une période de six années successives de préparation (de 1999-2000 à 2004-2005), la partie *Probabilités et statistique* du programme complémentaire du CAPES n'a recueilli que 67 questions ! Par comparaison, les autres grandes parties en lesquelles se découpe le programme – *Notions sur la logique et les ensembles*, *Algèbre et géométrie*, *Analyse et géométrie différentielle* recueillent respectivement 94, 747 et 542 questions. Dans la partie *Probabilités et statistique* elle-même, la section 4, *Notions de statistique*, qui nous intéresse particulièrement ici, ne recueille que 9 questions – alors que, par exemple, le seul problème des angles en géométrie, il est vrai largement nouveau pour les préparationnaires, fait l'objet de quelque 24 questions !

L'examen des questions posées révèle d'abord une attitude de surprise, sinon d'effroi, devant le sous-continent des probabilités et de la statistique, dont on ne sait pas situer les frontières exactement. « Est-ce que les probabilités tiennent une grande place ? », demande ainsi un préparationnaire de 2005, tandis qu'un autre interroge : « Quel est le programme pour

---

[6] En première comme en deuxième année, la formation des élèves professeurs de mathématiques à l'IUFM d'Aix-Marseille intègre un dispositif dit des « questions de la semaine ». Chaque semaine ouvrable, à l'occasion d'une séance de travail où toute la promotion est réunie, les élèves professeurs, qu'ils préparent le CAPES en première année ou qu'ils soient professeurs stagiaires en deuxième année, sont invités à consigner par écrit, individuellement, une difficulté qu'ils ont rencontrée et les interrogations que celle-ci soulève pour eux. Le contrat autour de ce dispositif peut être décrit de la façon suivante. Tout d'abord, les difficultés évoquées par écrit peuvent être d'un ordre quelconque, pourvu qu'elles apparaissent à l'auteur de la question comme liées à la formation qu'il reçoit et qu'il s'efforce d'acquérir. Ensuite, les questions posées sont regardées, non comme des difficultés personnelles singulières, mais comme des difficultés *liées à la profession*, et plus précisément à l'entrée dans la profession, préparation au concours de recrutement incluse. Enfin, les éléments de réponse écrits qui seront apportés ne constituent pas tant une réponse à l'*auteur* de la question qu'une réponse à la *question*. Plus précisément, ils constituent un apport de *matériaux* en vue de permettre à chacun de construire une réponse qu'il mettra en œuvre personnellement, et provisoirement – en attendant d'autres « matériaux » éventuels qui le conduiront peut-être à déconstruire et à reconstruire la réponse « établie ».

l'écrit du CAPES en "stat et proba" ? » En 2004, un de leurs prédécesseurs formulait la question ainsi : « Y a-t-il également des statistiques au CAPES ? » En 2003, un élève professeur formulait ainsi sa requête :

> Quelle est la limite du programme de statistique à l'écrit ? Dans le sens : quels sont les théorèmes exacts des probabilités (par ex : le théorème central limite) qui sont au programme des statistiques, et quels sont ceux qui n'y sont pas ?

Notons que, s'agissant de plusieurs de ces questions, le programme mentionné plus haut répond tout à fait clairement : ainsi n'exige-t-il que la connaissance de *l'énoncé* du théorème central limite et exclut-il l'étude de la convergence en loi... Mais la chose, en elle-même claire et nette, n'est sans doute pas de nature à calmer l'inquiétude des candidats. En 2001, l'un d'eux s'enquiert en ces termes de l'état du mal :

> Les statistiques (intervalle de confiance…) sont-elles déjà tombées à l'écrit ? Est-ce au programme depuis longtemps ?

D'autres essaient de faire face, en cherchant légitimement de l'aide du côté des formateurs. Ainsi de ce préparationnaire qui, en 2000, écrit :

> Ce n'est pas vraiment une question mais plutôt un souhait. Pour les probabilités et les statistiques, je voudrais savoir si l'on va avoir de vrais cours (ou tout au moins de sérieux rappels de cours) car c'est un domaine assez complexe, relativement nouveau dans les programmes qui nécessite des définitions précises et des explications claires.

La même année, cette plainte se fait entendre plusieurs fois. Un élève professeur demande ainsi : « Pourrait-on avoir un résumé de cours sur les statistiques : tests et estimations, comparaison de moyennes, régression, etc. ? » Et il justifie ainsi sa demande : « Je n'ai jamais abordé lors de ma scolarité ces notions. » La doléance se retrouve en d'autres questions, toujours en 2000 :

> Comme le nombre de séances de probas-stat est peu important, serait-il possible de nous faire un topo sur les statistiques (droite de régression, estimation de moyenne…) ? En effet certains d'entre nous ne l'ont jamais vu.

La requête est renouvelée peu après : « Serait-ce possible d'avoir un petit topo sur les Statistiques ? », demande-t-on à nouveau. L'année 2000 n'a pas le monopole de telles réclamations. En 2001 un élève professeur essaie de négocier avec lui-même dans les termes suivants :

> Étant donné que je n'ai pas fait de statistiques (ou très peu), quels documents au niveau CAPES (oral) peut-on trouver afin de préparer ces leçons ? Faut-il en savoir plus que le niveau demandé aux terminales (ES en particulier) ?

Le problème ne se limite pas à la statistique elle-même. En 2001, toujours, une préparationnaire écrit ainsi :

> Une difficulté que je rencontre est l'absence de cours de probabilités pour la préparation à l'écrit : je n'en ai fait ni en DEUG 1-2, ni en licence, et je me sens un peu perdue dans cette matière.

Mais la statistique est bien le point faible par excellence. En 2003, dès la première séance de l'année, plusieurs préparationnaires se plaignent de leur absence de formation dans le domaine :

> – Difficultés en probabilité, notions mal acquises, difficultés à résoudre les problèmes, surtout en ce qui concerne les statistiques (n'ayant jamais été pratiquées).
>
> – Statistiques : nous n'en avons jamais fait. Que doit-on savoir faire ?
>
> – Probabilités : étudiées qu'en DEUG, donc peu manipulées.
>
> – Acquisition des notions en statistique (et probabilité) lorsqu'on n'en a jamais fait.
>
> – Les notions de probabilités et statistiques me posent des problèmes, n'ayant pas ou presque pas manipulé les notions de statistiques.

Le climat général de la préparation semble, en la matière, peu favorable : en témoignent des demandes réitérées d'avoir enfin des corrections et des corrigés des planches d'exercices proposées, ou que soient consacrées plus de deux heures à la partie « statistique » du programme. Certains, toutefois, se mettent au travail. « Où trouver les notions de statistiques à maîtriser ? », s'enquiert un élève professeur en 2004. D'autres sont plus précis. En 2000, l'un d'eux demande : « Pour la comparaison de moyennes, quelle méthode doit-on connaître ? » En 1999, un préparationnaire s'était interrogé, de même, sur une question qui, en principe, concerne le débutant, non le futur professeur : « En statistiques, quelle est l'utilité du calcul des déciles ? Comment interpréter ce calcul ? » La même année, un préparationnaire plus volubile exposait ses doutes sur une question qui, elle aussi, aurait dû être réglée depuis longtemps :

> Lors de l'étude simultanée de deux variables statistiques, on est amené à calculer r, le coefficient de corrélation linéaire de ces deux variables ; on apprend que la corrélation entre ces deux variables est forte si $|r| > 0{,}87$. Mais est-ce vraiment significatif ? Dans un exercice, on à étudié le nombre de postes de TV dans les foyers et le nombre de divorces ; $r = 0{,}98$; peut-on en déduire que la TV fait divorcer ?!

L'épreuve de mathématique qui conditionne l'accès à la préparation du CAPES à l'IUFM d'Aix-Marseille, comportait, pour l'année 2001-2002, un problème sur les sondages, problème qui développait le sujet *ab initio*, faute de pouvoir compter sur des acquis bien partagés par les candidats à l'entrée. Lors de la première séance de l'année, un élève professeur revient sur un point qui l'a étonné, et qu'il formule en ces termes :

> Dans le test d'entrée, on détermine deux intervalles de confiance. Le deuxième intervalle, avec un échantillon plus grand, a une borne inférieure plus petite que le premier. Pourquoi ?

Ici, la raison de la surprise est plus subtile et la remarque montre une curiosité de bon aloi. En d'autres cas, la curiosité intellectuelle semble laisser place à une requête beaucoup plus prosaïque, comme il en va avec cette question, proposée elle aussi en 2002 : « Quels sont les différents types de graphes utilisés dans l'étude de la statistique ? » Les nouveaux programmes du lycée et l'emploi corrélatif des calculatrices suscitent de même des questions où la connaissance de la statistique importe moins que certains éléments auxiliaires de sa pratique : « Comment programme-t-on les statistiques sur une calculatrice ? » demande ainsi un préparationnaire de 2001, qui précise : « J'ai une TI 92 mais je ne sais pas rentrer les listes dedans et après les utiliser pour calculer : moyenne, écart type (déjà programmés sur la calculatrice). »

Ajoutons que l'examen des questions portant plus généralement sur la partie *Probabilités et statistique* confirmerait le déficit sévère de connaissances en ces matières. La situation pousse certains préparationnaires à se contenter de répondre aux exigences minimales qui attendent le professeur du secondaire qu'ils espèrent devenir. En 2003, l'un d'eux formule ainsi la question suivante :

> Dans le programme de terminale S, est abordée la loi exponentielle en probabilité. Quels sont les exercices que l'on peut rencontrer ? Ont-ils tous dans l'énoncé que la fonction de répartition est $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ou que la fonction densité est $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$?

Un même souci se rencontre dans la question ci-après, qui, formellement, n'en est pas une mais qui évoque simplement un certain type de tâches apparemment problématique :

> Simulation d'une expérience aléatoire sur calculatrice ?
>
> Exercice 1. On s'intéresse au nombre de filles dans une famille de 4 enfants. Au lieu d'effectuer une enquête sur la population, on choisit un modèle afin de simuler l'expérience. À l'aide de la touche RANDOM de la calculatrice, on construit des suites de 4 nombres formés de 1 ou de 2. Le suite 1 2 2 1 « simule » une famille de 4 enfants, l'aîné étant un garçon, les deux enfants suivants des filles et le dernier-né un garçon.

Exercice 2. On s'intéresse à la situation suivante : on lance deux dés et on ajoute les numéros obtenus. Réaliser une simulation pour 50 lancers de dés.

Au-delà de ces variations, il faut conclure que le domaine de la statistique reste peu attractif pour les futurs professeurs. Prenons ici un indicateur grossier mais tout de même révélateur : pour chacune des quatre grandes parties du programme complémentaire du CAPES, on peut calculer le nombre de questions par ligne de programme, c'est-à-dire le rapport du nombre de questions relatif à une partie donnée au nombre de lignes que cette partie occupe dans le programme du CAPES. On obtient alors les résultats consignés dans le tableau suivant.

Domaine	**Nombre de questions par ligne**
Notions sur la logique et les ensembles	1,65
Algèbre et géométrie	2,63
Analyse et géométrie différentielle	1,35
Probabilités et statistiques	0,78
Total	1,75

La valeur moyenne de l'indicateur considéré est, sur l'ensemble du programme, égale à 1,75 ; en prenant pour indice le rapport de l'indicateur relatif à une partie et de la valeur moyenne de l'indicateur on obtient alors le tableau suivant.

Domaine	**Indice « valeur du domaine »**
Notions sur la logique et les ensembles	0,94
Algèbre et géométrie	1,50
Analyse et géométrie différentielle	0,77
Probabilités et statistiques	0,44

Sans chercher à interpréter plus avant les valeurs obtenues, on conclura simplement que les probabilités et – tout particulièrement – la statistique constituent des matières auxquelles les candidats sont en général mal préparés et sur lesquelles, au demeurant, les préparations sont elles-mêmes souvent peu généreuses.

Cette situation soulève plusieurs problèmes. Le premier, sur lequel on va revenir plus loin, est tout simplement celui de la mauvaise culture des futurs professeurs de mathématiques en matière de statistique, alors même que, dans le curriculum secondaire actuel, ils sont en charge d'une part importante de son enseignement. Le second est, si l'on peut dire, plus propre à la formation des professeurs de mathématiques : il s'agit de l'absence de connaissances – et *a fortiori* de maîtrise – sur les constituants essentiels de la théorie mathématique de la statistique. Ce problème s'accompagne d'une attitude ambivalente, doublement douloureuse. D'un côté, comme on l'a vu avec les propos d'André Weil, il est usuel chez certains mathématiciens de regarder de haut les « pauvres » mathématiques mobilisées en statistique. D'un autre côté, en même temps, la connaissance des outils mathématiques qu'appelle la science statistique ne font pas véritablement partie du noyau dur de la culture mathématique donnée à l'université, par rapport à laquelle elle apparaît quelque peu périphérique, voire tout à fait marginale. Notons d'emblée que la première attitude, dépréciative, va à l'encontre de l'effort qu'il conviendrait d'accomplir dans le curriculum mathématique universitaire pour que les futurs professeurs de mathématiques acquièrent une formation véritablement adéquate au projet de leur faire enseigner la statistique au secondaire. À propos de ce « presque rien » que seraient les mathématiques de la statistique, il faudrait en effet produire, collectivement et individuellement, un effort relativement considérable, que la dépréciation de ces mathématiques ne favorisent certes pas. Il semble que, jusqu'à aujourd'hui, la formulation du problème que nous venons d'évoquer soit demeurée prisonnière de cette double contrainte. Dans un livre récemment paru, intitulé *Statistique* et sous-titré *La théorie et ses applications*, l'auteur, Michel Lejeune écrit : « L'objectif de cet ouvrage est de rendre accessibles les fondements théoriques de la statistique à un public de niveau mathématique moyen. » Il ajoute alors : « Sur le plan purement mathématique nous pensons que l'essentiel de l'exposé est accessible à quiconque aurait parfaitement assimilé le programme d'un bac scientifique. » Affirmation qu'il se hâte pourtant de nuancer fortement par ce commentaire : « Il reste cependant quelques notions qui ne sont abordées qu'en premier cycle supérieur, notamment les approximations par développement de Taylor, les développements en série entière, les fonctions de plusieurs variables (dérivation et intégration) et, très marginalement, le calcul matriciel. » Voilà donc pour la dénégation de la riche teneur en mathématiques d'un exposé supposé « complet » de la statistique ! Bien entendu, les exigences mathématiques précédentes sont censées être satisfaites par la formation donnée aux futurs professeurs de mathématiques, en sorte que ceux-ci devraient pouvoir suivre l'exposé proposé par l'auteur sans grande difficulté. Mais là n'est pas toute la vérité. Dans le même avant-propos, Michel Lejeune écrit encore : « Pour satisfaire la curiosité de mathématiciens qui voudraient, par la lecture de cet ouvrage, s'initier sans peine à la science statistique, mention sera faite ici ou là de résultats ou démonstrations exigeant des connaissances plus approfondies d'analyse. » Ces connaissances et résultats sont, en règle générale, consignés en petits caractères dans des notes de fin de section. Ainsi la note 1.3 apporte-t-elle les précisions suivantes :

Lorsqu'on aborde la théorie des probabilités par la théorie de la mesure, il n'y a pas lieu de faire de distinction entre variables discrètes et variables continues, et donc entre p_X et f_X. Dans les deux cas il s'agit d'une densité par rapport à la mesure générée par F_X.

Par ailleurs, la note 1.1 évoque, avec la notion d'espace probabilisé, celle de fonction mesurable, en précisant : « En pratique toutes les fonctions utilisées sont mesurables et nous ignorerons ce problème dans cet ouvrage. » La note 1.2, ensuite, mentionne la question de savoir si la connaissance de la fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire réelle, c'est-à-dire la connaissance de la probabilité des événements de la forme $]-\infty, x]$, permet de déterminer la probabilité d'un événement quelconque. Dans le cas d'une v.a. continue, l'auteur mentionne « la tribu borélienne » de $\mathbb{R}$ – en ajoutant qu'il faut « beaucoup d'ingéniosité pour mettre en évidence une partie de $\mathbb{R}$ n'appartenant pas » à cette tribu. Ces notes insérées dans le chapitre 1 sont complétées par des exercices désignés par un astérisque. En l'espèce, quatre exercices ont ce statut : leur objet est la démonstration de propriétés relatives à la fonction de répartition énoncées dans le corps du chapitre. La note 2.1 indique sommairement comment le passage de l'intégrale de Riemann à l'intégrale de Riemann-Stieltjes permettrait de « traiter de la même façon cas discret et cas continu ». Notons que ces notes renvoient à un outillage mathématique qui, en grande partie, n'est pas inclus dans le programme complémentaire du CAPES – même s'il s'agit là de notions qui ne sont certes pas étrangères à la culture mathématique diffusée à l'université. Les notes 2.2 et 2.3 ont trait à la notion de fonction génératrice des moments d'une v.a. X, définie par $\Psi_X(t) = E(e^{tX})$. La note 2.2 ébauche la démonstration de la propriété principale (le moment d'ordre r de X est égal à $\Psi^{(r)}{}_X(0)$), tandis que la note 3 évoque le développement en série entière de $\Psi_X(t)$, qui donne immédiatement « les différents moments », et applique cette remarque au cas de la loi exponentielle. La note 2.4 introduit la notion de fonction caractéristique des moments, à laquelle, écrit l'auteur, on recourra éventuellement « lorsque la fonction génératrice n'existera pas au voisinage de 0 ». Le chapitre 3 aborde les n-uplets de variables aléatoires. La note 3.1 revient sur un type de problèmes déjà rencontré : la fonction de répartition conjointe de deux v.a. suffit-elle à calculer la probabilité de tout événement de $\mathbb{R}^2$? L'auteur évoque ici, bien entendu, la tribu borélienne de $\mathbb{R}^2$, et invoque « l'analogie » avec le cas de la note 1.2. La note 3.2 se contente d'ajouter à la proposition selon laquelle, si X et Y sont des v.a. indépendantes, alors $g(X)$ et $h(Y)$ le sont également, cette précision que g et h « doivent être mesurables ». La note 3.3, elle, précise que la propriété relative à la fonction génératrice d'une somme de v.a. vaut encore pour la fonction caractéristique.

Arrêtons-là cette énumération, qui suffit à montrer un fait significatif : les « compléments » mathématiques mentionnés relèvent de théories mathématiques *reconnues*, voire centrales en analyse, dont il arrive même qu'elles soient présentées de façon précise dans l'enseignement supérieur sans pour autant que leurs emplois principaux soient même mentionnés – nous pensons ici, notamment, aux notions de fonction génératrice et fonction caractéristique ! Par contraste, il est alors frappant de constater que certains théorèmes fondamentaux en statistique sont laissés non démontrés, sans même l'adjuvant que constituerait une simple « note » du type déjà examiné. Ainsi en va-t-il à propos de la loi de Student à ν degrés de liberté, c'est-à-dire la loi d'une v.a. $T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Q}{\nu}}}$, où Z suit la loi normale centrée réduite et Q la loi du χ^2 à ν degrés de liberté. L'auteur explicite la fonction de densité de cette loi [7] :

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}.$$

Puis il ajoute :

> Ce résultat, que nous ne démontrerons pas est dû à W.S. Gosset en 1908, qui prit le pseudonyme de Student. Ni la fonction de répartition, ni la fonction génératrice ne s'explicitent. Il existe donc des tables de la fonction de répartition ou une fonction *ad hoc* dans les logiciels statistiques. On admettra encore la proposition suivante.

La « proposition suivante » est tout simplement le fait que $E(T) = 0$ si $\nu \geq 2$ et que $V(T) = \frac{\nu}{\nu-2}$ si $\nu \geq 3$. Ainsi des résultats clés de certaines parties au moins du travail du statisticien reste-t-ils plongés dans une énigmatique obscurité.

Pour le contraste on se réfèrera ici à une problématique un peu différente : celle d'un ouvrage paru en 1983, intitulé *Statistique et économétrie*, et présenté par son auteur, Claude Mouchot, comme le fruit d'un enseignement « assuré pendant de nombreuses années au Département de Sciences Economiques et de Gestion de l'Université de Lyon II ». Le premier chapitre en est consacré aux notions d'intégrale double et d'intégrale multiple. Cela fait, l'auteur ouvre de manière très significative son deuxième chapitre par un développement que nous reproduirons *in extenso* [8] :

---

[7] Lejeune (2004), p. 75.

[8] Mouchot (1983), p. 28.

Le but de ce chapitre est d'expliciter totalement l'obtention de ces lois d'usage courant que sont le χ_n^2, le Student et le Fisher. Il y a en effet généralement un hiatus dans la présentation qui en est faite aux étudiants, hiatus dû principalement d'ailleurs à l'absence de connaissances mathématiques suffisantes des étudiants.

De ce fait, l'étudiant ne connaît de ces lois que :

1. leur définition (on appelle V.A. de χ^2 à n ddl la somme des carrés de n V.A. $\mathcal{N}(0,1)$ indépendantes),
2. et leurs valeurs tabulées.

Le lien entre ces 2 éléments n'étant pas fait, les tables de la loi du χ^2 conservent un aspect mystérieux.

Notre expérience nous a montré que ce *mystère* se situait d'ailleurs à 3 niveaux qu'on peut théoriquement distinguer :

– celui du calcul proprement dit,
– celui du mode opératoire,
– celui de la liaison entre la définition et les tables.

Si les difficultés propres au 1er niveau s'expliquent aisément, ce ne sont pas celles-ci qui arrêtent les étudiants, *car ils sont arrêtés en général à l'un des 2 autres*, ce qui est beaucoup plus grave.

En caricaturant quelque peu, on pourrait dire que dans le cas des V.A. continues, les étudiants n'imaginent plus qu'il y ait une liaison entre la définition d'une V.A. et « les tables » de celle-ci. Nous sommes alors au niveau du mystère total. Si on pose la question de cette liaison, celle-ci est alors admise et c'est le mode opératoire qui reste mystérieux : comment passer de n V.A. $\mathcal{N}(0,1)$ au χ_n^2 ?

Ce niveau est directement atteint dans l'énoncé suivant : « Déterminer la loi de probabilité de la V.A. somme de n V.A. $\mathcal{N}(0,1)$. »

La *possibilité* de déterminer cette loi ne fait pas problème, c'est le comment.

C'est donc ce mode opératoire, ce « comment », et plus généralement la totalité de la liaison entre définition et tables d'une loi, que nous proposons dans ce chapitre.

Bien entendu, le travail mathématique qu'opère l'auteur présente en plusieurs endroits un caractère « mathématiquement naïf », là où un « mathématicien pur » attendrait un traitement plus sophistiqué, et « entièrement rigoureux » [9]. La solution qu'il propose, quoique rare et méritoire, apparaît ainsi un peu inappropriée s'agissant de former les professeurs de mathématiques élevés aux mathématiques pures. Mais le problème sans doute le plus prégnant est cependant un peu autre. Une partie des mathématiques de la théorie des probabilités et de la théorie statistique sont assez largement accessibles dans la littérature mathématique. Ainsi, par exemple, s'il est vrai que le programme complémentaire du CAPES ne demande pas la démonstration du théorème central limite, ce théorème est l'une des

[9] Notons que l'exposé proposé n'utilise pas les fonctions caractéristiques – parce que, précise l'auteur, « leur élaboration complète nécessiterait de longs développements » (*op. cit.*, p. 29).

« stars » de tout enseignement de probabilités et statistique. Le livre de Lejeune fait ainsi une place à sa démonstration, même si l'exposé proposé se fait sous des conditions *a priori* un peu restrictives (on suppose que la loi mère admet une fonction génératrice des moments Ψ_X). En revanche, l'ouvrage de Mouchot énonce le théorème central limite en annonçant que ce résultat fondamental ne sera pas démontré ; mais, ainsi qu'on l'a vu, en contrepartie – si l'on peut dire –, il braque les projecteurs sur des résultats que la culture mathématique diffusée y compris dans certains livres de statistique de qualité tend à laisser sous le boisseau. Il y a donc ainsi un problème au cœur même de la culture mathématique en statistique, qui ne se réduit pas à un problème de fondements rigoureux de l'édifice mathématique utilisé. Certains résultats sans doute fondamentaux, tenus pour nobles, sont mis en avant, tandis que d'autres résultats, non moins essentiels au travail statistique, tendent à être laissés indéfiniment à l'arrière-plan, en sorte que le sentiment prévaut de ne jamais pouvoir pénétrer complètement les mystères de la statistique, tels qu'on peut les imaginer à partir de ses éléments les plus diffusés, telles les recettes relatives aux différents tests statistiques. L'histoire de l'existence sociale de la statistique a ainsi, semble-t-il, entériné un état de fait ancien : l'existence d'un petit groupe d'experts, d'une petite troupe à l'énergie inépuisable dont les principaux membres ont été mentionnés – du moins dans le cas français – au premier chapitre de notre travail. Maîtrisant complètement les ressorts mathématiques fondamentaux de l'art statistique, ce groupe d'experts a dû accepter que soit diffusée, en démarquage de cette statistique « ésotérique » et authentique, une statistique « exotérique », même s'agissant de certains publics à haute formation mathématique, et cela en contradiction avec un habitus collectivement élaboré, consistant à n'accepter de constructions mathématiques qu'entièrement justifiées – du moins en principe. Ce problème est d'autant plus compliqué que la contrainte objective qui a pu peser sur la diffusion sociale de la statistique a sans doute fréquemment été acceptée comme légitime par les statisticiens eux-mêmes, au motif que la statistique n'est pas *que* des mathématiques, selon une démarche de pensée qu'exprime assez bien le passage suivant de l'avant-propos de l'ouvrage de Michel Lejeune [10] :

> … nous faisons partie de ceux qui pensent que la statistique ne relève pas uniquement de la mathématique qui n'est qu'un instrument. Sa raison d'être consiste à appréhender le monde réel à partir des observations que l'on en fait. C'est pourquoi la discipline est rangée dans le domaine des mathématiques appliquées, ce terme ne devant pas, à notre sens, rester un vain mot. Fidèle à cette vision nous avons tenté de commenter le plus largement possible les concepts et résultats de façon concrète pour montrer leur utilité dans l'approche du réel. Dans les chapitres débouchant

[10] *Op. cit.*, p. VII-VIII.

immédiatement sur des méthodes usuelles nous avons également introduit des exercices « appliqués » pour illustrer l'intérêt et la mise en œuvre des principes théoriques. L'ouvrage n'est donc pas uniquement un traité mathématique. Cela a motivé le choix de son sous-titre « La théorie et ses applications » pour marquer la distinction, même si son objectif premier reste l'exposé de la théorie.

Le risque est évidemment de fabriquer ainsi un statut social d'éternel amateur en statistique, ce qui ne favorise guère le développement, en la matière, d'une culture générale et commune solidement fondée, dont les professeurs de mathématiques – entre autres – pourraient se faire les ardents promoteurs.

2. Entre inculture et découverte

La réussite au CAPES ou à l'agrégation de mathématiques n'a pas le pouvoir de rendre les lauréats plus savants qu'ils ne l'étaient avant le concours. Or, en deuxième année d'IUFM, quelle que soit la classe dont le professeur stagiaire est responsable, il ou elle aura à enseigner des rudiments de statistique. On examinera ici un épisode révélateur dont le cadre est le séminaire que suivent, chaque mardi matin ouvrable, les élèves professeurs de mathématiques de deuxième année de l'IUFM d'Aix-Marseille. Durant l'année 2002-2003, lors de la 18e séance du séminaire, le mardi 11 mars 2003, une stagiaire ayant en responsabilité une classe de seconde rédige la question suivante :

> Quel est l'intérêt de calculer la médiane et la moyenne d'une série statistique ? Dans le modèle le plus courant, i.e. le modèle gaussien, ces deux notions coïncident totalement, et d'ailleurs pour trouver une série statistique ayant une moyenne et une médiane qui sont différentes, il faut créer une série statistique artificielle.

On saisit ici un questionnement qui, d'une part se réfère à une certaine culture mathématique venant du passé – le « modèle gaussien » –, et d'autre part vient buter sur l'exigence du présent – enseigner dans une classe de seconde les notions de médiane et de moyenne d'une série statistique. Notons au passage – on y reviendra – le caractère contestataire de la question vis-à-vis des exigences formulées dans le programme officiel. De façon quelque peu exceptionnelle, le responsable du séminaire décide alors de « renvoyer la question » aux participants, et, pour cela, leur propose, lors de la 19e séance, deux semaines plus tard [11], le mardi 25 mars 2003, de répondre à la demande suivante :

> Seul ou en binôme, chaque participant au Séminaire *x* ou chaque binôme *X* met par écrit d'une part les réponses $R^\lozenge$ qu'il a pu observer jusqu'ici (en précisant « l'institution » supposée productrice de $R^\lozenge$:

[11] Il n'y avait pas eu de séance le mardi 18 mars.

collègues, élèves, etc.), ainsi que la réponse R_x (ou R_X) qui serait la sienne en ce point de sa réflexion sur le sujet.

L'exploitation des réponses apportées par les participants se fera dans le cadre d'une rubrique elle-même exceptionnelle, en marge du séminaire, celle des « Questions en liberté ». Dans ce cadre, le compte rendu d'analyse des réponses prend la forme d'un texte d'une quinzaine de pages dont nous nous inspirerons librement dans ce qui suit. La première observation est que l'auteure de la question examinée a changé de point de vue entre la 18e et la 19e séance. À la question posée, elle répond en effet elle-même dans les termes suivants :

Dans le cas discret le calcul de la moyenne et de la médiane d'une série statistique donnent deux informations différentes. Par exemple si dans une classe la moyenne est de 7,7 et la médiane de 5,25 ces deux résultats nous donnent deux informations différentes sur la série statistique : 5,25 de médiane signifie que la moitié de la classe a moins de 5,25. 7,7 de moyenne signifie que les élèves qui ont plus de 5,25 ont beaucoup plus que cette note. Dans le cas continu, c'est beaucoup plus nébuleux.

L'évolution est significative : le passé mathématique évoqué quinze jours plus tôt semble ici mis à distance, du moins à propos du type de situations statistiques auquel cette professeure débutante doit se frotter pour assumer sa mission – celui où, une série statistique étant donnée, on doit déterminer sa moyenne et sa médiane. Notons toutefois que le « passé » n'est pas éliminé : il s'exprime dans la remarque sur le « cas continu », évocation qui, ici, n'a guère de sens puisqu'on ne considère pas, en seconde, de modèle probabiliste, discret ou continu, d'une situation statistique. En d'autres termes la professionnalisation consiste, non à rendre compatible des éléments de connaissance qui paraissaient *a priori* difficilement compatibles, mais à oublier le passé en adhérent au présent – le caractère contestataire de la question initiale semblant ainsi promis à une extinction rapide.

Quand on examine l'ensemble des autres réponses, un premier fait émerge : plusieurs participants déclarent ne pas savoir, ou du moins ne pas savoir *pour le moment*, dans une période où ils n'ont pas encore abordé l'enseignement de la statistique :

Je n'ai pas de réponse à cette question. Je dois réfléchir au sujet.

Pas d'éléments de réponse à ce jour. J'attaque ce chapitre dans quelques semaines, je me pencherai sur ce problème.

Je n'ai pas encore regardé le chapitre sur les statistiques. Avec mes connaissances actuelles, je ne peux pas répondre à la question de façon précise.

On voit ainsi que, pour certains au moins de ces professeurs débutants, le savoir à enseigner s'apprend sur l'obstacle, ou, comme l'écrit le responsable du séminaire, « au chevet de la classe » – ce qui se fait, note-t-il encore, « sans guère plus de recul que celui permis par la fréquentation des manuels disponibles ». Mais au-delà de ces aveux d'ignorance, on doit souligner que, tout de même, aucune réponse n'ose aller contre l'évidence institutionnelle qui s'impose aux professeurs et approuver le fait que la notion de médiane serait superfétatoire dès lors qu'on dispose de la notion de moyenne. La norme institutionnelle scolaire, qui n'est pas une norme mathématique, notons-le, impose sa loi. Ce silence masque cependant bien des mystères dont quelques réponses dévoilent l'existence, telles les deux suivantes :

> Pour une série statistique on a deux « jeux » de valeurs : les résultats et les effectifs. Il me semble que la médiane est indépendante des effectifs. Alors que la moyenne est pondérée par des effectifs. Pour moi il n'y a donc aucune raison pour qu'elles soient « très souvent » égales.

> La moyenne donne un renseignement sur le caractère alors que la médiane donne un renseignement sur l'effectif.

On saisit ici l'effort spontané pour « expliquer » une différence dont la genèse et les raisons d'être restent en fait obscures… L'adhésion au monde tel qu'il est – il y a la moyenne et il y a la médiane – , se trouve encore augmentée dans certaines réponses qui s'en tiennent à prendre acte du fait que, « dans la nature », si l'on peut dire, les séries statistiques rencontrées sont dotées d'une médiane et d'une moyenne généralement bien distinctes :

> Médiane et moyenne coïncident peut-être souvent, mais le nombre de statistiques réelles pour lesquelles ces deux nombres diffèrent reste malgré tout énorme.

> Dans la pratique quotidienne, il apparaît que la moyenne et la médiane d'une série de nombres (notes d'élèves…) sont différentes (elles sont voisines assez souvent en ce qui concerne les notes).

> Il suffit de prendre la moyenne des notes d'une classe, elle n'est pas, le plus souvent, égale à la médiane (qui elle sépare les effectifs en 2 séries de même taille).

> Quant au côté artificiel d'une série dont la moyenne et la médiane sont différentes, il suffit de regarder les notes de la classe… On peut aussi choisir des salaires dans une entreprise (patron compris).

> … l'exemple classique salaire médian, salaire moyen ne semble pas si artificiel que ça.

> Beaucoup d'exemples, pas tous artificiels, font apparaître une moyenne sensiblement différente de la médiane : salaires en France, gains au loto…

> … les PIB des 192 pays du monde : la médiane et la moyenne sont très différentes.

> Il suffit de prendre les notes d'un contrôle pour se rendre compte qu'on va trouver deux valeurs différentes sauf cas particuliers (cas discret). Exemple : (10, 10, 20) a pour moyenne 14, pour médiane 12.

Les répondants, on le voit, ont, eux, abordé l'enseignement de la statistique – ou du moins la préparation de l'enseignement qu'ils envisagent de donner. La réponse normée s'impose donc : le point de vue exposé dans la question initiale était bien un point de vue singulier, qui, en outre, n'a pas résisté à la confrontation avec les conditions et contraintes de l'enseignement scolaire visé. D'autres réponses nous font pénétrer plus avant dans un fragment de l'univers statistique reconstitué presque entièrement par les stagiaires à partir des manuels fréquentés. Ainsi en va-t-il avec les réponses suivantes qui participent d'une élaboration technologique relativement bien diffusée dans les « médias » – essentiellement des manuels – avec lesquels ces professeurs stagiaires ont entretenu ou entretiennent un certain commerce :

> Ces deux quantités n'ont pas le même but, la médiane partage les élèves en deux groupes, la moyenne donne une information sur les notes.

> La moyenne donne une information de « centrage » en terme de poids des valeurs du caractère étudié. Alors que la médiane donne une information de « centrage » sur l'ordre, la répartition de la série (qui ne tient pas compte des valeurs du caractère).

> La moyenne d'une série statistique permet d'obtenir une information sur toute la série en général. La médiane donne un résultat plus au cœur de la série où la valeur des caractères extrêmes rangés par ordre croissant ou décroissant ont peu d'importance. Elle permet le plus souvent des cas d'être plus proche de la réalité.

> La moyenne et la médiane sont des paramètres qui permettent de donner des informations rapides sur une série statistique. La médiane permet de séparer une population en deux groupes d'effectifs égaux (exemple : population : une classe d'élèves ; caractère étudié : le temps de parcours de 100 km). La médiane aide à former deux groupes : « les plus rapides », « les moins rapides ». La moyenne est intéressante car les individus d'une population ont tendance à se rapprocher de la moyenne.

Une réponse tranche, en cela que, à l'instar de la question initiale, elle commence par faire référence au passé. En outre, elle n'avance d'autre justification en faveur de la médiane que celle donnée très classiquement dans les ouvrages élémentaires de statistique :

> Il semble que faire la distinction entre la médiane et moyenne prend son sens dans les cas de v.a.r.d. La médiane fait un classement et permet de supprimer les effets des valeurs extrêmes.

Pourtant la tendance dominante est de sens inverse : le passé semble dépassé, voire oublié, et on entre avec foi dans un discours technologique apportant surabondamment les justifications nécessaires au fait « d'avoir », pour une série statistique donnée, et la moyenne, et la médiane. Les réponses reproduites ci-après, que nous ne commenterons pas davantage, constituent un florilège de cette technologie « indigène » :

La moyenne d'une série statistique est une information globale. Elle n'informe pas sur les détails de cette série et peut, dans certains cas, ne pas refléter la réalité. Imaginons un élève qui ait eu les notes suivantes : 0, 15, 14, 16, 17 ; en rangeant ces notes dans l'ordre croissant on obtient : 0, 14, 15, 16, 17 ; la moyenne sur ces notes est 12, la médiane de cette série est 15. On peut penser que le zéro est un « accident », vu les autres notes. Et la médiane reflète ici mieux la réalité du niveau de l'élève que la moyenne.

La médiane permet de « nuancer » la moyenne des valeurs extrêmes qui seraient particulièrement grandes. Par exemple une entreprise de 10 personnes dont le salaire est : 9 ouvriers à 1000 €, 1 patron à 10 000 €. La moyenne des salaires est 1900 € dans cette entreprise, ce qui semble appréciable. Mais il n'y a qu'une seule personne qui a un salaire confortable. La médiane (1000 €) permet de montrer la différence, la disparité de ces salaires.

La moyenne d'une population dont les éléments sont rangés par ordre croissant ne sépare pas ceux-ci, en général, en deux parties de même effectif, ce qui justifie l'introduction de la médiane en classe de 3^{e}. Ces deux indicateurs sont des indicateurs de la tendance centrale d'une population.

On a trois types de mesures de tendance centrale : moyenne (la plus utilisée, elle minimise la distance euclidienne), médiane, mode. Il est possible que la moyenne et la médiane coïncident : c'est toujours le cas si la distribution est symétrique comme dans la distribution normale. Les deux valeurs seront presque égales si la distribution est en gros symétrique. Par contre, un chiffre ou un nombre peut modifier la moyenne sans influencer la médiane. Ainsi, dans certains cas, un type de mesure peut être plus approprié qu'un autre : par exemple, la médiane ou le mode est utilisé quand des observations extrêmes influencent la moyenne. On peut utiliser à la fois la moyenne et la médiane, de façon à obtenir le plus d'informations sur les données.

Le calcul de la médiane et de la moyenne d'une série statistique permet de situer la série. Ces calculs peuvent aboutir à des résultats très différents par exemple si on prend comme série les notes obtenues par un élève durant un trimestre. Une très mauvaise note à une interrogation surprise peut faire chuter une moyenne et la médiane sera alors plus représentative du niveau de l'élève que la moyenne. De même une très bonne note à un DM fait par les parents fera remonter la moyenne mais n'est pas représentative du travail de l'élève. Ainsi la médiane permet d'écarter les valeurs « marginales ». Je ne pense pas que ce type de série soit artificiel bien au contraire.

L'introduction de la médiane en 3^{e} reprise en 2de ne me paraît pas dépourvue de sens. En effet nous avons pour mission d'aider les élèves à réfléchir puis résumer une série statistique. Je trouve que se contenter de la moyenne comme mesure de tendance centrale ne tend pas à éveiller les esprits. En effet tout dans nos vies se résume en termes de moyenne (notes à un examen, salaire moyen, taille moyenne, poids moyen…). Il est intéressant de faire saisir aux élèves que cet indicateur n'est pas toujours représentatif d'une série. Ainsi en travaillant sur « leurs propres notes » on trouve là des séries statistiques qui n'ont pas même moyenne et médiane.

> La moyenne et la médiane d'une série statistique ne sont pas les mêmes choses. Une première réponse serait : « pourquoi enseigner les hauteurs et médianes dans un triangle car dans le cas d'un triangle équilatéral, elles sont confondues ? ». De plus, ces deux paramètres donnent des informations différentes sur la série, d'où leur intérêt (paramètres de position ou dispersion).

La dernière réponse mentionnée semble relier, *in fine*, l'existence du couple moyenne-médiane à la dispersion de la série étudiée. D'autres réponses sont à cet égard beaucoup plus explicites :

> En comparant médiane et moyenne, on peut avoir une idée de la dispersion de la série statistique.

> Avec la médiane, on a une petite indication sur la répartition

> Sur un ensemble d'élèves, la médiane donne plus de renseignements que la moyenne car elle informe aussi sur la répartition des notes. Exemple : la moyenne des salaires français mensuels est de 2000 € alors que la médiane est aux environs de 1300 €. Conclusion : grande différence entre les deux. La médiane est très représentative et utile. La moyenne moins dans cet exemple mais elle permet tout de même de constater qu'il y a beaucoup de « gros » salaires mensuels alors que 50 % de la population a moins de 1300 €.

> Il y a plusieurs notions qui permettent de faire l'étude des dispersions sur la statistique descriptive. La moyenne et la médiane d'une série statistique sont deux notions différentes et leur comparaison peut apporter des informations quant à la dispersion des résultats. Ce sont les premiers éléments de dispersion vus par les élèves. En premier ils verront écart type et quantile. Il est vrai que dans le domaine mathématique la statistique descriptive a peu de place.

Cette dernière réponse offre l'avantage de bien montrer qu'il ne s'agit pas là d'une méprise – par exemple sur la signification générique du mot de dispersion. Le couple moyenne-médiane est un premier outil, nous dit-on, que suivra l'introduction de l'écart type et de l'écart interquartile (« quantile »). Sans doute parce qu'il est d'usage de proposer à titre d'exemples et de contre-exemples des séries statistiques ayant, notamment, la même moyenne et des médianes différentes, plusieurs répondants voient dans le couple moyenne-médiane un outil pour *comparer* deux séries statistiques :

> Dans les cas les plus courants où le calcul de la moyenne a un intérêt et que par exemple les moyennes de deux séries sont identiques, le calcul de la médiane de chaque série (souvent différentes) permet alors de comparer ces séries.

> De plus la moyenne, accompagnée de la médiane, de plusieurs séries statistiques nous permet de comparer ces différentes séries. En effet, ne connaître que la moyenne ou que la médiane n'est pas forcément révélateur, de nombreux exercices sur les salaires (cadres / ouvriers) dans différentes

entreprises nous le font constater. Il faut aussi être critique quant aux valeurs aberrantes, d'où la notion de moyenne élaguée introduite en 2^{de}.

L'intérêt de la médiane semble être pour moi de pouvoir comparer deux séries statistiques dont la dispersion et la distribution sont différentes.

Il y a ainsi toute une élaboration spontanée d'un discours motivant l'existence de deux indicateurs dits de tendance centrale, phénomène dont les réponses reproduites ci-après fournissent une bonne illustration :

Quand on prend les notes d'un DS, la plupart du temps si le DS est facile, moyenne < médiane ; si le DS est difficile, moyenne > médiane. Pour les élèves, moyenne et médiane, c'est parlant.

Exemple : présentation des résultats d'évaluation d'une clase de 6^e (boîte à moustaches) ; moyenne et médiane permettent de mettre en évidence, pour l'une, le niveau global de la classe, pour l'autre, l'hétérogénéité de cette classe.

Dans le cas discret, la moyenne et la médiane diffèrent dans certains cas. Par exemple, quand il s'agit de notes d'élèves. La médiane sert à mettre en évidence l'hétérogénéité de la classe. En revanche dans le cas continu, il est plus fréquent que moyenne et médiane coïncident.

La moyenne est fonction de la valeur du caractère. La médiane ne dépend que de la position des effectifs par rapport au caractère. Ainsi, la moyenne renseignera sur la valeur moyenne du caractère et la médiane sur la répartition des valeurs. Exemple : on considère les notes de cinq élèves 0, 0, 0, 1 et 19. La moyenne est de 4 : en moyenne les notes sont mauvaises ; la médiane est 0 : indique que les notes ne sont pas « ciblées ».

Ces deux grandeurs sont deux indicateurs qui me paraissent assez facilement différentiables. Si on prend l'exemple d'une série de notes il suffit qu'il y ait des notes aberrantes pour modifier l'une des deux grandeurs et pas l'autre. Il est justement intéressant de calculer assez systématiquement ces deux indicateurs de dispersion, car en cas de différence notable ceci est révélateur pour la série étudiée et inversement si elles sont très proches il y a sûrement quelque chose à en tirer mais je n'en sais pas plus.

On aura noté le *lapsus calami* de l'auteur de la dernière réponse – évoquant moyenne et médiane, il parle d'indicateur de *dispersion* –, en même temps que son aveu final d'ignorance. De fait, le formateur responsable du séminaire va ressentir l'ardente obligation d'aider les participants à s'instruire quelque peu sur les questions évoquées.

Le premier point sur lequel il intervient est la croyance, qui, en apparence, est largement spontanée, dans la valeur du couple moyenne-médiane pour apprécier la dispersion. Cette intervention prend la forme du développement reproduit ci-après.

L'emploi du couple moyenne / médiane comme indicateur de dispersion d'une série statistique semble être une création spontanée, engendrée peut-être par la pratique de l'examen de séries de notes (et par l'absence, en 2de, des indicateurs de dispersion usuels). Contre l'intuition qui semble ici à l'œuvre, on doit souligner un certain nombre de faits.

① Il est certain qu'une distribution de notes dont la moyenne et la médiane sont sensiblement éloignées l'une de l'autre ne saurait être très peu dispersée. Examinons ainsi le cas évoqué dans la réponse suivante, déjà reproduite :

> Dans le cas discret le calcul de la moyenne et de la médiane d'une série statistique donnent deux informations différentes. Par exemple si dans une classe la moyenne est de 7,7 et la médiane de 5,25 ces deux résultats nous donnent deux informations différentes sur la série statistique : 5,25 de médiane signifie que la moitié de la classe a moins de 5,25. 7,7 de moyenne signifie que les élèves qui ont plus de 5,25 ont beaucoup plus que cette note. Dans le cas continu, c'est beaucoup plus nébuleux.

Supposons une classe de $2n = 30$ élèves, et une série de notes rangées par ordre croissant (au sens large) dont la 15^{e} est 5 et la 16^{e} est 5,5 : la médiane vaut 5,25. Supposons, afin d'affaiblir *a priori* l'écart type et de simplifier le calcul, que toutes les notes inférieures ou égales à 5 sont en fait égales à 5, qu'une seule note vaut 5,5, et que toutes les autres notes (au nombre de 14) ont une même valeur $k >$ 7,7. Pour que la moyenne de la série de notes vaille 7,7 on doit avoir

$$\frac{5n + 5{,}5 + k(n-1)}{2n} = 7{,}7$$

ce qui suppose que $k = \dfrac{10{,}4\,n - 5{,}5}{n-1} = 10{,}75$; on a alors pour écart type

$$\sqrt{\frac{15 \times 2{,}7^2 + 2{,}2^2 + 14 \times 3{,}05^2}{30}} \approx 2{,}85$$

soit une valeur non négligeable : le coefficient de variation, c'est-à-dire le rapport de l'écart type à la moyenne, est d'environ 37 %.

② Mais l'existence d'un écart sensible entre moyenne et médiane n'est nullement nécessaire pour avoir une dispersion « forte » : une série de notes peut être « très dispersée » et avoir une moyenne et une médiane proches l'une de l'autre ! La série de 30 notes ci-après a ainsi pour moyenne 7,7, pour médiane 7,75 et pour écart type 3,08 environ : 1 ; 2 ; 4 ; 4,5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5,5 ; 6 ; 6 ; 6 ; 6,5 ; 6,5 ; 7 ; 7,5 ; 8 ; 8,5 ; 9 ; 9 ; 9,5 ; 9,5 ; 9,5 ; 10 ; 10,5 ; 10,5 ; 10,5 ; 10,5 ; 11 ; 13,5 ; 14. (On observera, de manière analogue, que, dans une distribution normale, les paramètres μ et σ sont indépendants : σ peut être « aussi grand qu'on veut ».)

③ On notera enfin que, si la distance entre moyenne et médiane impose bien un ***minimum*** de dispersion de la série considérée, elle ne dit rien de plus précis : au delà de ce minimum, la dispersion effective peut être ***plus ou moins forte***. La série ci-après, dont la moyenne est 7,7 et la médiane 5,25, a par exemple un écart type de 4,9 environ, ce qui correspond à un coefficient de variation d'environ 63,5 % : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4,5 ; 4,5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5,5 ; 6 ; 6 ; 6,5 ; 6,5 ; 11 ; 11 ; 11,5 ; 12,5 ; 13 ; 14 ; 15 ; 15 ; 16,5 ; 20. On retiendra donc que, en règle générale, et contrairement à un mouvement de pensée qui semble trouver un écho dans certaines des réponses examinées, le couple moyenne / médiane ***ne permet pas véritablement d'apprécier la dispersion***.

Mais le responsable du séminaire va intervenir aussi sur un point plus subtil, celui de la distinction discret-continu, et cela pour mettre les points sur les *i* et lutter contre l'importation subreptice et non critique d'éléments mathématiques empruntés à la culture universitaire dans un contexte où, en vérité, ils ont fort peu de pertinence. Le développement prend la forme suivante.

On a vu que plusieurs réponses évoquent une distinction entre « cas discret » et « cas continu ». Cette distinction semble recouvrir une confusion conceptuelle plus dommageable encore que la précédente.

① L'opposition discret / continu, qui n'est pas mentionnée dans le programme de 2^de^, l'est une fois dans le document d'accompagnement de ce programme, à l'occasion d'une remarque qui porte, non sur le domaine statistique, mais sur le secteur des fonctions (c'est nous qui soulignons) :

> On évitera les exercices systématiques de détermination d'ensemble de définition ; dans la plupart des cas, on le donnera. En dehors de quelques exemples où celui-ci pourra être fini (cas de fonctions du temps du type « nombre de mariages en fonction de l'année » où la variable est ***discrète*** et les graphiques correspondants parfois ***continus*** !), ce sera toujours un intervalle ou la réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

② Cette occurrence exceptée, le couple discret / continu ne réapparaît que dans les textes officiels relatifs à la Terminale S, à propos des notions de « loi de probabilité discrète » (telle la loi binomiale) et de « loi continue » (telle la loi uniforme). L'opposition discret / continu s'applique à une entité ***théorique***, un ***modèle***, et non à une série statistique ***empirique***, par nature toujours « discrète », qu'elle provienne d'un phénomène aléatoire que l'on a choisi de modéliser par une « loi discrète » ou par une « loi continue ».

❶ Le lien entre une série statistique $(x_1, \ldots, x_n)$ et le modèle probabiliste de l'expérience aléatoire ayant fourni les valeurs de la série est précisé dans les termes suivants par le document d'accompagnement du programme de 1^re^ S :

> Dans le document d'accompagnement de seconde (…), on dit qu'un échantillon de taille n d'une expérience est la série $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ des résultats obtenus en faisant n fois la même expérience. Si le modèle associé à une expérience est le choix d'un élément d'un ensemble E selon une loi de probabilité P, le modèle associé à un échantillon de taille n de cette expérience est une liste de n variables aléatoires $(X_1, \ldots, X_n)$, qui sont les projections de $\Omega = E^n$, $X_i(\boldsymbol{x}) = x_i$, où les éléments de Ω sont choisis suivant la loi P_n telle que la probabilité d'une série de résultats est le produit des probabilités de chacun d'eux : $P_n(x_1, \ldots, x_n) = P(x_1) \times\ldots \times P(x_n)$. Les variables aléatoires X_i sont alors par construction indépendantes et de même loi. Une liste $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi P est appelée un échantillon de la loi P. Un échantillon d'une expérience est ainsi toujours modélisé par un échantillon de la loi P modélisant l'expérience.

❷ L'emploi des expressions « caractère discret » et « caractère continu » présente certaines ambiguïtés, dans la mesure où il porte à penser qu'un caractère serait ***intrinsèquement*** « discret » ou « continu », alors qu'il s'agit là de l'effet d'un choix de modélisation (même si, en quelques cas, ce choix n'apparaît plus tel, en conséquence d'un phénomène de « naturalisation institutionnelle »). C'est ainsi que la taille d'une personne n'est pas en elle-même un caractère continu et que, à l'inverse, l'effectif $N(t)$ d'une population humaine au temps t peut fort bien être modélisé comme une grandeur continue (ce qui permet de disposer de l'outillage conceptuel et technique apporté par le calcul « infinitésimal »), etc. Sur ce sujet délicat mais essentiel, on méditera les lignes suivantes, que l'on trouve sur un site Internet recommandé par les auteurs des programmes de mathématiques (http://www.inrialpes.fr/sel) :

On distingue souvent les caractères discrets (ceux qui ne prennent que peu de modalités distinctes) des caractères continus (pour lesquels toutes les valeurs observées sont a priori différentes). La frontière entre continu et discret est beaucoup moins claire en pratique qu'en théorie. Tout recueil de données se fait avec une certaine précision, et dans une certaine unité. Si une taille est mesurée avec une précision de l'ordre du centimètre, tout chiffre correspondant à une quantité inférieure au centimètre ne contient aucune information et doit être éliminé. Cela signifie que la taille en centimètres est une valeur entière, donc un caractère discret, même si on le modélise par une loi normale, qui est une loi continue. D'autre part, différentes techniques statistiques (histogrammes, test du chi-deux) imposent de regrouper les données en classes, ce qui revient à les rendre discrètes, les nouvelles modalités étant les différentes classes.

❸ Dans la perspective des considérations précédentes, on notera que le programme de 2$^{\text{de}}$, dont on a dit qu'il ne recourt pas à la distinction discret / continu, fait en revanche usage, sans doute pour contourner cette distinction, de l'expression un peu inusuelle de ***« série prenant un petit nombre de valeurs »***. Une telle série est en principe relative à un caractère dont le nombre de valeurs est ***borné*** ; mais cela n'implique pas que la modélisation probabiliste de ce caractère ne puisse se faire de manière adéquate par une « loi continue », comme le montre le cas déjà évoqué de l'effectif $N(t)$ d'une population humaine.

Une troisième intervention aborde alors la référence au modèle gaussien présente dans la question initiale. Dans leur réponse, plusieurs participants avouent leur ignorance sur ce point. « Je ne vois pas, écrit ainsi l'un d'eux, ce qu'est la notion de modèle gaussien. » Notons que l'adjectif *gaussien* n'a qu'une seule occurrence dans le programme de la classe de seconde, dans le passage suivant :

En classe de première et de terminale, dans toutes les filières, on réfléchira sur la synthèse des données à l'aide du couple moyenne, écart type qui sera vu à propos de *phénomènes aléatoires gaussiens* et par moyenne ou médiane et intervalle interquartile sinon.

En première L, lit-on encore, l'écart type est introduit « pour des données gaussiennes » ; et une annexe du document d'accompagnement du programme, intitulé *À propos des données* *gaussiennes*, est consacrée à cette question. En outre, un document d'accompagnement valant pour les classes de première et de terminale L contient, à propos cette fois de la fonction exponentielle, le développement suivant, que nous reproduisons *in extenso* :

Fonction exponentielle

Exemple 2 : Courbes en cloche – Fonctions $\exp(-kx^2)$

On considère la plus petite valeur positive x_n telle que pour tout $x \in]x_n ; \infty[$, $\exp(-x^2) < 10^{-n}$.

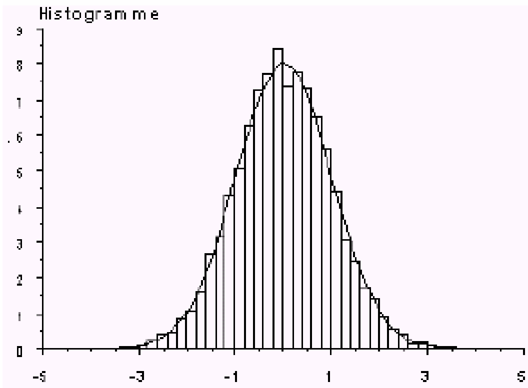
N	1	2	3	4	5	10
x_n, à 10^{-2} près	1,52	2,14	2,63	3,03	3,39	4,80

a) Construire un tableau analogue pour les fonctions $\exp(-0{,}5x^2)$ et $\exp(-2x^2)$.

b) Tracer à l'aide d'un grapheur les courbes représentatives des trois fonctions.

c) Si on prend 10 cm comme unité de longueur sur les axes et que la précision du dessin est de 1 mm, à partir de quand la représentation de la courbe se confond-elle avec l'axe des x ?

Le programme de première parle de données gaussiennes ; quand on a de très nombreuses données de ce type, l'histogramme « colle » à une courbe dont l'équation est du type $y = a\exp(-kx^2)$ (on parle parfois de courbes en « cloches »), l'origine étant placée à la moyenne des données. On a représenté ci-contre 10 000 données gaussiennes de moyenne 0. La courbe a pour équation : $y = \sqrt{1/2\pi}\ \exp(-x^2/2)$.



En terminale L, le programme prescrit l'étude sommaire de la fonction $x \mapsto \exp(-kx^2)$, avec l'objectif d'observer notamment « la décroissance rapide de ces fonctions » et en faisant « le lien avec les données gaussiennes vues en classe de première ». Mais il faut surtout souligner que la célèbre courbe en cloche associée à la loi normale (ou loi de Laplace-Gauss) reste absente des séries ES et S. C'est sans doute pour cette raison que le séminaire que nous suivons fait en ce point une première place à des développements qui s'efforcent, par la référence à l'histoire des probabilités et de la statistique, de clarifier un peu le rôle de la loi normale, en choisissant de relativiser son importance, comme le montre le passage ci-après.

② On notera ici un point d'histoire de la statistique lié à certains des développements précédents : longtemps les phénomènes que les programmes du lycée nomment aujourd'hui gaussiens furent caractérisés par le fait d'être bien modélisés par une loi… ***binomiale***, donc par une loi ***discrète***, qui paraissait plus appropriée étant donné les phénomènes étudiés (longueurs, tailles, poids, etc.). La loi de Laplace-Gauss, loi continue dont la densité est donnée par

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right),$$

apparaît d'abord, dans un tel cadre, comme un outil utile pour ***calculer*** (de manière approchée) les probabilités de distributions binomiales (et autres), et non comme un outil de modélisation « directe ». Supposons par exemple que, dans un certain procédé de fabrication, la probabilité qu'un produit soit défectueux est évaluée à $p = 0,2$; on veut connaître la probabilité que, dans un lot de $n = 40$ produits, le nombre D de produits défectueux ne dépasse pas 3. Cette probabilité est donnée par $\mathrm{P}(D < 4) = \sum_{0\leq x\leq 3} \mathrm{C}_{40}^{x}\, 0,2^x\, 0,8^{40-x}$; pour la calculer, on utilise l'approximation

$$\sum_{0\leq x\leq 3} \mathrm{C}_{40}^{x}\, 0,2^x\, 0,8^{40-x} \approx \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x$$

où l'on prend pour u l'image de la borne 3,5 (qui est le milieu de l'intervalle [3, 4[: c'est effectuer là ce qu'on nommait une « correction de continuité ») par la transformation $x \mapsto \frac{x-np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{x-8}{\sqrt{6,4}}$, soit environ $-1,779$: il vient ainsi $\mathrm{P}(D < 4) \approx \int_{-\infty}^{-1,779} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x$. À l'aide d'une table de la fonction de répartition de la loi normale, on calculait alors l'intégrale indiquée. On trouve aujourd'hui sur plusieurs sites Internet des logiciels de calcul gratuits relatifs aux diverses lois usuelles : on obtient ici, par exemple,

$$\int_{-\infty}^{-1,779} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x = 0.03761988046324197\ldots$$

Mais on trouve également des logiciels de calcul pour… la loi binomiale ; on a en l'espèce :

$$\sum_{0\leq x\leq 3} \mathrm{C}_{40}^{x}\, 0,2^x\, 0,8^{40-x} = 0.0284620944639069\ldots$$

Au passage, on notera donc l'erreur – supérieure à 30 % ! – que l'on commettait en prenant, ainsi qu'on l'a fait, une approximation normale de la distribution binomiale.

La faiblesse de la culture statistique dans la culture générale scientifique (et notamment dans la culture générale mathématique) diffusée par l'université conduit le formateur à insérer des développements dont on peut en effet penser que leur contenu ne devrait pas être absent du savoir d'un professeur de mathématiques d'aujourd'hui. Un répondant s'était ainsi interrogé en ces termes :

En ce qui concerne le modèle gaussien, est-ce que tout est régi par ce modèle ? On n'étudie pas toujours des séries à caractère continu.

La référence à l'opposition discret-continu constitue à nouveau un obstacle à propos duquel le formateur fait d'abord ce commentaire :

> Ce point de vue, qui conteste les affirmations contenues dans la question initiale, présente pourtant une faille. On semble penser ici, en effet, que tout « caractère continu » se modéliserait par une loi gaussienne, et que ce n'est donc que parce qu'existent des « caractères discrets » que l'on échappe à l'omniprésence du modèle gaussien… Or cette dernière condition, qui n'est pas suffisante (on l'a dit), n'est pas, en fait, davantage nécessaire.

L'observation est explicitée dans un développement qui resitue historiquement la saga de la loi normale. On le reproduit ici.

❶ Ce qu'on appela longtemps la « loi des erreurs » fut regardé tout au long du XIX[e] siècle comme gouvernant la ***plupart*** des phénomènes naturels et humains. C'est ainsi que, dans son livre *Natural Inheritance* (1889), Francis Galton (1822-1911) écrivait :

> I know of scarcely anything so apt to impress the imagination as the wonderful form of cosmic order expressed by the "Law of Frequency of Error." The law would have been personified by the Greeks and deified, if they had known of it. It reigns with serenity and in complete self-effacement, amidst the wildest confusion. The huger the mob, and the greater the apparent anarchy, the more perfect is its sway. It is the supreme law of Unreason. Whenever a large sample of chaotic elements are taken in hand and marshaled in the order of their magnitude, an unsuspected and most beautiful form of regularity proves to have been latent all along.

❷ Mais cette croyance trop rapidement validée, et souvent utilisée à des fins politiques conservatrices, sera mise en cause à partir de la fin du XIX[e] siècle. Ainsi le statisticien Karl Pearson (1857-1936), qui nommera en 1894 loi ***normale*** ce que Galton appelait encore la loi de fréquence des erreurs, se fera-t-il connaître notamment par l'étude de lois de probabilités ***asymétriques*** (les distributions χ^2, caractérisées par une dissymétrie gauche). À partir de cette époque, les études empiriques de caractères mettent en évidence des cas où les données recueillies sont incompatibles avec l'hypothèse gaussienne. C'est ainsi que le biométricien W. F. R. Weldon (1860-1906), étudiant onze caractères morphométriques du crabe *Carcinus moenas*, en trouve dix normaux, et ***un*** qui échappe à la loi normale, comme le montre le diagramme ci-après (http://www.francisgalton.com/chapter9.pdf).

❸ La non-normalité (pour ne pas dire l'***anormalité***, terme qui faisait regretter à Pearson d'avoir popularisé l'expression de loi normale) de certains caractères a été reconnue depuis dans nombre de domaines. À titre d'unique exemple, on citera – sans le commenter davantage – un ouvrage intitulé *Géographie et statistique* (PUF, coll. Que sais-je ?, 1997), dont l'auteur, Emmanuel Vigneron, écrit (pp. 54-55) :

> Il arrive fréquemment en géographie que la courbe tracée révèle une distribution en cloche mais asymétrique à gauche ou bien que le mode soit inférieur à la médiane et celle-ci à la moyenne. Ceci est une indication que

le grand nombre de facteurs qui concourent à l'expression des valeurs de la variable *x* sont multiplicatifs et non plus additifs. Il en résulte une loi log-normale qui détermine cette forme caractéristique de la courbe. Une variable *x* suit la loi log-normale si son logarithme ln *x* suit la loi normale.

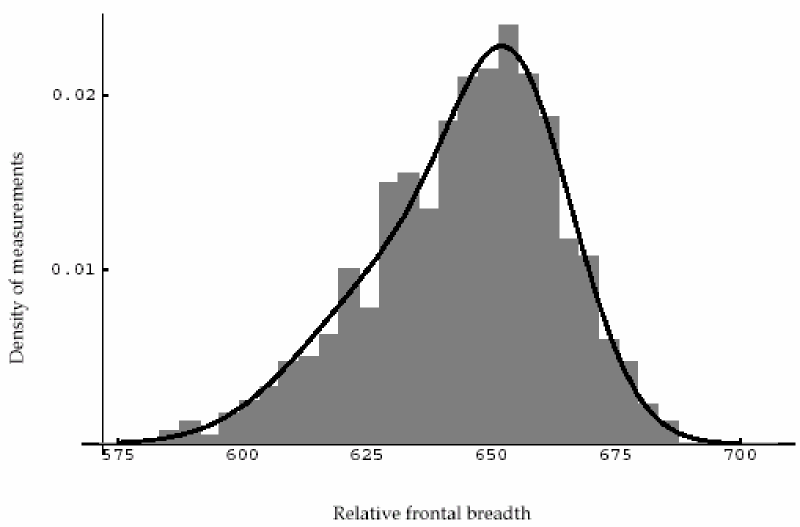
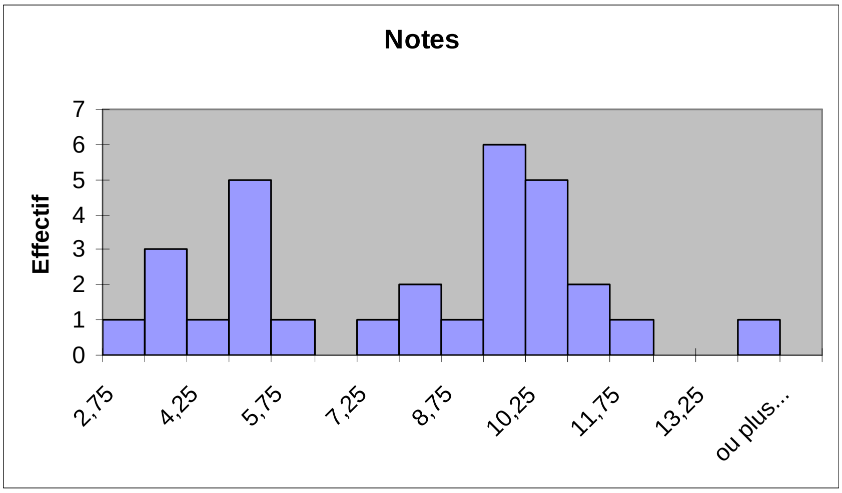


Figure 9.1. Distribution of relative frontal breadth (1000 x frontal breadth/total length of carapace) in 1000 female crabs from the Bay of Naples. The curve is the mixture of two normal distributions with means of 630.6 and 654.7, and with probable errors of 12.1 and 8.4, respectively, in the proportion of 41:59. Redrawn from Weldon 1893 and Pearson 1894.

En ce cas, la faiblesse de la culture statistique des élèves professeurs est, par contraste, cruellement exposée : nombre de phénomènes de la nature, leur explique-t-on, ne sont, ni de près, ni de loin, « normalement distribués » ! Une autre observation apparaît plus encore significative de ce besoin d'une meilleure information et d'une plus grande familiarité avec les faits statistiques. Sur ce point, nous laisserons entièrement la parole au responsable du séminaire, qui note ceci.

8. Le fait que certains caractères ne puissent être modélisés par une loi gaussienne « pure » suffirait à justifier le double calcul de la moyenne et de la médiane d'une série statistique. Mais même lorsque une distribution gaussienne se révèlera *in fine* être un bon modèle probabiliste du caractère étudié, on ne doit pas oublier un phénomène essentiel dans l'abord des séries statistiques relatives à ce caractère : la ***fluctuation d'échantillonnage*** – qui est au cœur de l'enseignement de la statistique à donner en 2de.

① Lorsque, par exemple, on dispose de petits échantillons, disons de taille 30 (celui de Weldon était de taille 1000), la forme des distributions empiriques est souvent bien éloignée de celle de la distribution théorique qu'il s'agira éventuellement de mettre en évidence, ce qui conduit souvent à observer ***un écart sensible entre moyenne et médiane***. C'est ainsi que la série de notes ci-après, qui a été obtenue en arrondissant les valeurs d'un échantillon de la loi normale de moyenne 7,7 et d'écart type 2,85, a pour moyenne 7,65 et pour médiane 8,75 (avec un écart type d'environ 2,96) : 2,5 ; 3 ; 3 ; 3,5 ; 4 ; 4,5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5,5 ; 7 ; 8 ; 8 ; 8,5 ; 9 ; 9 ; 9,5 ; 9,5 ; 9,5 ; 9,5 ; 10 ; 10 ; 10 ; 10 ; 10 ; 10,5 ; 10,5 ; 11,5 ; 13,5. L'histogramme ci-après fournit une image de cette série qui la montre coupée en deux blocs (ou même en trois).



② ***Aucune*** des réponses recueillies lors de la séance 19 du Séminaire ne mentionne l'argument – pourtant essentiel – de la fluctuation d'échantillonnage. Cette absence conduit donc à attirer encore l'attention sur la distinction, non du discret et du continu (qui apparaît décidément comme un « distracteur »), mais de l'***empirique*** et du ***théorique*** (ou, de manière moins emphatique, du ***système*** et du ***modèle***), distinction que les textes officiels ne manquent pas, au reste, de mettre en avant…

3. Répondre aux besoins de formation en statistique ?

La formation prodiguée aux professeurs stagiaires, en deuxième année d'IUFM, peut-elle répondre à leurs besoins de formation en statistique ? Nous examinerons ici le cas de la promotion 2004-2005 à l'IUFM d'Aix-Marseille. L'effectif de la promotion est de 45. Parmi eux, 22 élèves professeurs effectuent leur stage en responsabilité en collège tandis que 23 sont en lycée, et plus précisément dans une classe de seconde. Au cours de l'année 2004-2005, et dans le cadre de la rubrique des « Questions de la semaine », les premiers ont posé 503 questions écrites, les seconds 511. Sur les 503 questions des élèves professeurs intervenant en collège, trois, et trois seulement, touchent à la statistique ! Sur ces trois questions deux émanent en outre de la même personne, qui les formule respectivement lors des 14^{e} et 16^{e} séances du séminaire donné le mardi matin à l'ensemble de la promotion [12]. On les reproduit ci-après.

[12] En 2004-2005, le séminaire a couru sur 24 séances : la première séance a eu lieu le 7 septembre 2004, la dernière le 26 avril 2005.

Dans le domaine de la statistique, en 4e, on trouve le thème des effectifs et fréquences cumulés. Je pensais que cela signifiait forcément « effectifs et fréquences cumulés *croissants* ». Or, dans de nombreux livres, ils parlent aussi effectifs et fréquences cumulés *décroissants*. Faut-il inclure cela dans l'OM de la séquence ? J'aimerais avoir votre avis.

En 4e, un des types de tâches du domaine de la statistique est de « calculer une valeur approchée de la moyenne d'une série statistique regroupée en classe d'intervalles ». Quelles sont les raisons d'être ?

Ces deux questions recevront des éléments de réponse lors de la séance 17 du séminaire. Nous en reproduisons le contenu ci-après afin de montrer l'effort du formateur pour, tout à la fois, expliciter les raisons d'être des notions examinées, en proposer des définitions opérationnelles, et les situer au sein d'une culture statistique qui, à l'évidence, fait défaut aux jeunes professeurs auxquels il s'adresse. La réponse à la première question est la suivante.

1. Le programme du cycle central du collège précise que c'est en 4e que l'on étudie les notions d'effectifs et de fréquences cumulés, que les élèves doivent apprendre à calculer. Rien n'est précisé quant au caractère « croissant » ou « décroissant » des effectifs ou fréquences cumulées.

2. Notons que, en 5e, les élèves doivent apprendre à « regrouper des données statistiques en classes » et à « calculer des effectifs » (et aussi des fréquences), sans pour autant que le calcul d'effectifs (ou de fréquences) ***cumulés*** soit regardé comme « une compétence exigible » en cette classe, bien qu'il trouve de façon naturelle « un prolongement en classe de 4e, avec les effectifs cumulés et les fréquences cumulées », comme le précise le document d'accompagnement du programme du cycle central. D'une manière générale, le travail demandé consiste, étant donné un caractère X sur une population Ω prenant ses valeurs dans $V \subset \mathbb{R}$, à déterminer l'effectif $\text{Card}\{\, i \,/\, a \prec x_i \prec b \,\}$ et la fréquence $\frac{\text{Card}\{\, i \,/\, a \prec x_i \prec b \,\}}{N}$, où $a, b \in V$, $N = \text{Card}\,\Omega$ et où $\prec$ désigne soit $\leq$, soit $<$.

3. L'intérêt de connaître l'effectif et la fréquence des valeurs « tombant » entre a et b est analogue à celui de connaître la médiane ou le premier quartile, etc. Par exemple, si dans une certaine population Ω, un individu ω est tel que $X(\omega) = 1{,}72$ et que l'on se demande s'il s'agit là d'une valeur élevée, on aura un élément de réponse pertinent en apprenant qu'en fait

$$\frac{\text{Card}\{\, \omega \in \Omega \,/\, X(\omega) \geq 1{,}72 \,\}}{N} \geq 77\ \%.$$

L'assertion que « un X de 1,72, finalement, c'est pas beaucoup » se verra à son tour mise en question si l'on apprend ensuite que l'on a

$$\frac{\text{Card}\{\, \omega \in \Omega \,/\, 1{,}72 \leq X(\omega) \leq 1{,}76 \,\}}{N} \geq 74\ \%,$$

etc. La question qui se pose alors est : comment calculer de façon systématique ces « fréquences d'événements » (comme les appelle le programme de 2[de]) ?

① On a défini la ***fonction de répartition*** par $v \mapsto F(v) = \dfrac{\text{Card}\,\{\, i \,/\, x_i \le v \,\}}{N}$ où $v \in V \subset \mathbb{R}$. On a donc :

$\dfrac{\text{Card}\,\{\, i \,/\, a < x_i \le b \,\}}{N} = F(b) - F(a)$.

② Soit $v_j \mapsto n_j$ ($1 \le j \le p$) la ***distribution des effectifs*** (= des ***fréquences absolues***) :

Valeurs	Effectifs
v_1	n_1 (= 1)
v_2	n_2 (= 1)
v_3	n_3 (= 2)
v_4	n_4 (= 1)
…	…
v_p	n_p (=)

Si a n'est pas l'une des valeurs v_j prises par X sur Ω, on a aussi : $\dfrac{\text{Card}\,\{\, i \,/\, a \le x_i \le b \,\}}{N} = F(b) - F(a)$.

Si, au contraire, a est l'une des valeurs v_j, on a Card $\{\, i \,/\, x_i = a \,\} = F(a) - F(a_{-})$, où $F(a_{-})$ désigne la limite de F en a à gauche. Il vient alors : $\dfrac{\text{Card}\,\{\, i \,/\, a \le x_i \le b \,\}}{N} = F(b) - F(a_{-})$. En pratique, si $a = v_j$ avec $2\ j \le p$, on a : $\dfrac{\text{Card}\,\{\, i \,/\, a \le x_i \le b \,\}}{N} = F(b) - F(v_{j-1})$.

③ Pour $j = 1, \dots, p$, posons $F(v_j) = F_j$.

❶ Toute fréquence $\dfrac{\text{Card}\,\{\, i \,/\, a \prec x_i \prec b \,\}}{N}$ s'exprime alors sous la forme $F_\ell - F_k$, où $1 \le k, \ell \le p$.

❷ On a $F_1 = F(v_1) = \dfrac{\text{Card}\,\{\, i \,/\, x_i \le v_1 \,\}}{N} = \dfrac{\text{Card}\,\{\, i \,/\, x_i = v_1 \,\}}{N} = \dfrac{n_1}{N} = f_1$ et, pour $j = 2, \dots, p$, $F_j = F(v_j) = \dfrac{\text{Card}\,\{\, i \,/\, x_i \le v_j \,\}}{N} = \dfrac{\text{Card}\,\{\, i \,/\, x_i = v_1 \,\}}{N} + \dots + \dfrac{\text{Card}\,\{\, i \,/\, x_i = v_j \,\}}{N} = \dfrac{n_1}{N} + \dots + \dfrac{n_j}{N} = f_1 + \dots + f_j$. C'est le p-uplet $(F_1, \dots, F_p)$ que l'on nomme la ***distribution des fréquences*** (relatives) ***cumulées croissantes*** : pour $j = 1, \dots, p$, $F_j = \sum\limits_{k=1}^{j} f_k$.

❸ L'intérêt des fréquences cumulées (croissantes) est donc qu'elles permettent d'exprimer (de façon unique) la fréquence de tout événement de la forme $\{\, a \prec x_i \prec b \,\}$. Mais ce n'est pas là le seul système vérifiant la condition d'existence et d'unicité. On peut en effet définir aussi la ***distribution des fréquences cumulées décroissantes***, ou fréquences ***rétrocumulées***, $G_j = \sum\limits_{k=j}^{p} f_k$. On a en particulier $G_1 = 1$ et $G_p = f_p$ et, par exemple, $\dfrac{\text{Card}\,\{\, i \,/\, v_k \le x_i \le v_\ell \,\}}{N} = G_k - G_{\ell+1}$, où $G_{\ell+1} = 0$ si $\ell = p$.

4. Les programmes du collège ne parlent de façon explicite ni de fréquences cumulées ***croissantes***, ni de fréquences cumulées ***décroissantes***.

① À consulter les épreuves du (diplôme national du) brevet – on peut les trouver pour les diverses académies et les années 1996-2004 à l'adresse suivante : http://www.crdp.ac-grenoble.fr/imel/niveau/index.htm –, il apparaît que, si la notion de fréquences cumulées ***croissantes*** a pu quelquefois y être mobilisée, il n'en va pas de même pour les fréquences cumulées ***décroissantes***.

② Quel choix opérer ? Si l'enseignement prodigué se borne à être un ensemble de tâches de calcul, on peut ajouter sans façon les fréquences rétrocumulées aux fréquences cumulées. Mais ce ne serait pas là un enseignement de ***statistique*** ! Par ailleurs, il est déjà délicat de bien maîtriser le système d'écriture des fréquences d'événements $\{ a \prec x_i \prec b \}$ à l'aide des fréquences cumulées, et d'en user à bon escient. Il n'apparaît donc pas déraisonnable de s'en tenir aux seules fréquences cumulées croissantes.

La deuxième question reproduite plus haut fait alors l'objet de la réponse suivante.

1. On a dit l'intérêt de « regrouper des données en classes » et de calculer des effectifs Card $\{ i \,/\, a \prec x_i \prec b \}$ et les fréquences correspondantes : c'est le même intérêt que de calculer une médiane (ou, à défaut, une moyenne), ou un quartile, etc. : cela permet de répondre à des questions qu'on a présentées comme génératrices de la statistique.

2. Il en va autrement du fait de « calculer une valeur approchée de la moyenne d'une série statistique regroupée en classe d'intervalles ». Car on pourrait aussi bien se proposer de calculer une valeur approchée de la moyenne d'une série statistique connaissant, disons, la médiane et quelques autres informations !

① La situation évoquée n'est pas imaginaire. C'est ainsi que le célèbre statisticien anglais Karl Pearson (1857-1936), qui, entre beaucoup d'autres choses, introduisit le mot de ***mode*** (ce qu'il commente ainsi : "I have found it convenient to use the term *mode* for the abscissa corresponding to the ordinate of maximum frequency. Thus the 'mean,' the 'mode,' and the 'median' have all distinct characters"), a proposé la relation ***approchée*** moyenne $\approx \frac{3 \text{ médiane} - \text{mode}}{2}$, au moins pour des distributions unimodales et pas trop asymétriques. Par exemple, dans le cas de la série 12 ; 3 ; 5 ; 17 ; 11 ; 6 ; 19 ; 13 ; 12 ; 1 ; 7 ; 12 ; 16 ; 10 ; 11 ; 13 ; 4 ; 5 ; 1 ; 19 ; 14 ; 2 ; 9 ; 11 ; 16 ; 12 ; 4 ; 2 ; 8 ; 14 ; 11 ; 3, on a *Me* = 11, comme le montre la série mise en ordre croissant : 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3; 4 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 11 ; 11 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 13 ; 13 ; 14 ; 14 ; 16 ; 16 ; 17 ; 18 ; 19 ; 19. Cet arrangement montre que la série (de taille 31) a pour mode 12 et pour médiane 11 ; on aurait ici : $\bar{x} \approx \frac{3 \times 11 - 12}{2} = 10{,}5$, alors que la moyenne de la série proposée est en fait $\bar{x} = 9{,}84$. On obtient ainsi une valeur assez grossièrement approchée. En fait, la distribution est ici assez asymétrique, à cause du grand nombre de valeurs « faibles » : les effectifs des classes [0 ; 5[, [5 ; 10[, [10 ; 15[, [15 ; 20[sont en effet, respectivement, 8, 5, 12, 6.

② Il n'est évidemment pas anormal de vouloir tenter un calcul de moyenne à partir, non de la médiane et du mode (supposés uniques), mais des effectifs $n_1, \dots, n_\ell$ des classes $I_1, \dots, I_\ell$ (et, bien sûr des extrémités de ces classes, supposées elles-mêmes de même longueur). La valeur approchée que l'on adopte généralement est donnée par $\bar{x} \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{\ell} n_k \mu_k$, où μ_k est le milieu de la classe I_k et n_k est l'effectif de cette classe. On obtient ainsi, dans le cas de la série prise pour exemple plus haut, $\bar{x} \approx \frac{8 \times 2,5 + 5 \times 7,5 + 12 \times 12,5 + 6 \times 17,5}{31} \approx 10,1$. Le résultat est à peine meilleur – dans le cas de la série examinée et des classes choisies – que la valeur obtenue par la « relation de Pearson » ! Cela noté, cette façon de faire appelle des remarques dénuées d'ambiguïté.

③ Longtemps, à cause de la faiblesse des moyens de calcul disponibles, on était amené, afin de diminuer l'ampleur des calculs, à ne pas traiter les données brutes, mais leurs regroupements en classes.

❶ Considérons par exemple la série suivante, de taille 276, qu'on peut regarder comme des notes d'examen entre 0 et 20 :

0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 3 ; 3 ; 3 ; 3 ; 3 ; 3 ; 3 ; 3 ; 3 ; 3 ; 3 ; 3 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 6 ; 6 ; 6 ; 6 ; 6 ; 6 ; 6 ; 6 ; 6 ; 6 ; 6 ; 6 ; 6 ; 6 ; 6 ; 7 ; 7 ; 7 ; 7 ; 7 ; 7 ; 7 ; 7 ; 7 ; 7 ; 7 ; 7 ; 7 ; 7 ; 7 ; 7 ; 7 ; 7 ; 7 ; 7 ; 7 ; 8 ; 8 ; 8 ; 8 ; 8 ; 8 ; 8 ; 8 ; 8 ; 8 ; 8 ; 8 ; 8 ; 8 ; 8 ; 8 ; 8 ; 8 ; 9 ; 9 ; 9 ; 9 ; 9 ; 9 ; 9 ; 9 ; 9 ; 9 ; 9 ; 9 ; 9 ; 9 ; 9 ; 9 ; 9 ; 9 ; 9 ; 10 ; 10 ; 10 ; 10 ; 10 ; 10 ; 10 ; 10 ; 10 ; 10 ; 10 ; 10 ; 10 ; 10 ; 10 ; 11 ; 11 ; 11 ; 11 ; 11 ; 11 ; 11 ; 11 ; 11 ; 11 ; 11 ; 11 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 12 ; 13 ; 13 ; 13 ; 13 ; 13 ; 13 ; 13 ; 13 ; 13 ; 13 ; 13 ; 13 ; 13 ; 13 ; 13 ; 13 ; 14 ; 14 ; 14 ; 14 ; 14 ; 14 ; 14 ; 14 ; 14 ; 14 ; 14 ; 14 ; 14 ; 14 ; 14 ; 14 ; 15 ; 15 ; 15 ; 15 ; 15 ; 15 ; 15 ; 15 ; 15 ; 15 ; 15 ; 15 ; 15 ; 15 ; 16 ; 16 ; 16 ; 16 ; 16 ; 16 ; 16 ; 16 ; 16 ; 16 ; 16 ; 16 ; 16 ; 16 ; 16 ; 16 ; 17 ; 17 ; 17 ; 17 ; 17 ; 17 ; 17 ; 17 ; 17 ; 17 ; 17 ; 17 ; 17 ; 17 ; 17 ; 17 ; 18 ; 18 ; 18 ; 18 ; 18 ; 18 ; 18.

❷ On peut les regrouper entre les 10 classes [0 ; 2[, [2 ;4[, [4 ; 6[, [6 ;8[, [8 ;10[, [10 ; 12[, [12 ; 14[, [14 ; 16[, [16 ; 18[, [18 ; 20[; on obtient ainsi les effectifs suivants : 16 ; 32 ; 27 ; 36 ; 37 ; 27 ; 32 ; 30 ; 32 ; 7. On a alors : $\bar{x} \approx \frac{1}{276}(1 \times 16 + 3 \times 32 + 5 \times 27 + 7 \times 36 + 9 \times 37 + 11 \times 27 + 13 \times 32 + 15 \times 30 + 17 \times 32 + 19 \times 7) = \frac{1}{276}(16 + 96 + 135 + 252 + 333 + 297 + 416 + 450 + 544 + 133) = \frac{1}{276} \times 2672 \approx 9,7$.

❸ Les fonctions disponibles sur le traitement de texte Word 97 permettent de calculer la somme des 276 valeurs (en fractionnant la série en sous-séries de taille adéquate). On a par exemple $\sum x_i = 88 + 257 + 384 + 390 + 468 + 550 + 398 = 2535$ (au lieu de 2672) et il vient donc $\bar{x} = \frac{1}{276} \times 2535 \approx 9,2$.

④ En classe de 2^de^, le document d'accompagnement exclut le recours systématique au procédé approché précédemment mis en œuvre, pour cette raison que cet usage ne se justifie plus, compte tenu des moyens de calcul aujourd'hui disponibles :

> La statistique donne lieu à de nombreuses activités numériques et favorise la maîtrise du calcul ; cependant, de tels calculs ne doivent être demandés que dans la mesure où ils permettent aux élèves de mieux comprendre la spécificité de la série statistique en jeu. Estimer la moyenne de séries de données quantitatives en les regroupant par classe n'est plus une pratique utile en statistique depuis que des ordinateurs calculent la moyenne de milliers de données en une fraction de seconde ; par contre savoir calculer une moyenne à partir de moyennes des sous-groupes ou comprendre la linéarité de la moyenne peut donner lieu à des exercices pertinents au regard de la pratique de la statistique. Calculer simplement, à partir de la moyenne, la moyenne élaguée d'une ou plusieurs valeurs extrêmes montre l'influence d'éventuelles valeurs aberrantes.

❶ Une telle façon de faire, autrefois classique, ne se justifie que dans les cas où, précisément, on ne dispose pas des données ponctuelles x_i mais seulement d'un regroupement en classes $(I_k, n_k)_{1\leq k\leq \ell}$ – ce qui est, à vrai dire, fréquent lorsqu'on travaille sur des données « institutionnelles ».

❷ Des calculs approchés sont demandés au brevet, comme il en va dans l'épreuve proposé en 2003 dans l'académie d'Aix-Marseille et quelques autres (voir ci-après). On observera que le fait que les données ponctuelles ont été regroupées en classes dont seul le centre est indiqué n'est pas signalé aux candidats, qui peuvent donc en toute sérénité travailler comme s'ils avaient affaire à une série non groupée…

3. Le regroupement en classes d'une série statistique resurgira dans un autre contexte, que le programme de la terminale S indique en ces termes :

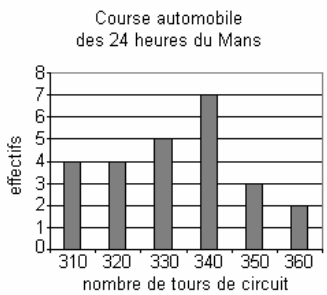
> Étude d'un exemple traitant de l'adéquation de données expérimentales à une loi équirépartie.

Mais c'est là une autre histoire.

Brevet 2003 - Activités numériques 3 : Aix-Marseille, Corse, Montpellier, Nice, Toulouse

La course automobile des 24 heures du Mans consiste à effectuer en 24 heures le plus grand nombre de tours d'un circuit.

Le diagramme en bâtons ci-contre donne la répartition du nombre de tours effectués par les 25 premiers coureurs automobiles du rallye.



1. Compléter le tableau des effectifs et des effectifs cumulés croissants de cette série statistique.

Nombre de tours effectuées	310	320	330	340	350	360
Effectifs	4					
Effectifs cumulés croissants						

2. Déterminer la médiane et l'étendue de cette série.

3. Calculer la moyenne de cette série (*on donnera la valeur arrondie à l'unité*).

La troisième question laisse voir une attitude un peu distanciée par rapport à la matière à enseigner :

Dans le programme de 4^{e} on voit apparaître le calcul de « moyennes pondérées » dans la partie *Statistique*. Les raisons d'être semblent intéressantes mais est-ce bien du travail de statistique ?

Quoiqu'il en soit, cette question, posée un peu tardivement, ne sera pas travaillée dans le séminaire de façon explicite. En revanche, lors de la séance 17, à la suite des réponses aux deux premières questions, une autre question, concernant, elle, la classe de seconde, était prise en considération, comme le montre la suite du passage des notes de cette séance [13].

• On complète brièvement ce qui précède en se penchant sur la question ci-après.

La détermination de la médiane d'une série continue par interpolation linéaire est-elle au programme de 2de ? Je comptais le faire à travers cet exercice :

On effectue des essais sur un échantillon de 200 ampoules électriques afin de tester leur durée de fonctionnement. Les résultats sont regroupés en classes d'amplitude égale à 100 h dans le tableau ci-dessous. On suppose que la répartition est régulière à l'intérieur de chaque classe.

Classe	[1200 ; 1300[	[1300 ; 1400[	[1400 ; 1500[	[1500 ; 1600[	[1600 ; 1700[
Effectif	30	50	75	25	20

1) a) Dresser le tableau des fréquences cumulées croissantes et tracer la courbe des fréquences cumulées croissantes.

b) En déduire graphiquement une valeur approchée de la médiane M.

2) On se propose dans cette question de calculer M.

a) Pourquoi la médiane M appartient-elle à la classe [1400 ; 1500[?

b) La répartition étant uniforme à l'intérieur de la classe [1400 ; 1500[, on considère alors que l'accroissement des effectifs est proportionnel à la durée du fonctionnement des ampoules. Justifiez que M vérifie $\frac{M - 1400}{1500 - 1400} = \frac{50 - 40,77}{5 - 40}$. Déduisez-en M.

Cet exercice est-il bien approprié ? Sa place n'est-elle pas en AER ?

Matériaux pour une réponse

1. On a vu déjà que le regroupement en classes n'était pas une pratique intégrée dans le programme de 2de. Dans le cas de données fournies groupées, on pourra utiliser la fiction – mise en jeu dans le problème du DNB vu plus haut – consistant à remplacer les classes par leur milieu : dans le cas examiné, par exemple, la médiane des durées de vie des ampoules est alors 1450 h.

2. Une réponse explicite à la question posée ne se rencontre en vérité ni dans le programme de 2de proprement dit, ni dans son document d'accompagnement, mais dans une « annexe commune aux

[13] Le sigle AER qui apparaît ci-après signifie « activité d'étude et de recherche ». Les AER sont au cœur du travail mathématique de la classe. Leurs résultats font l'objet en principe d'une *synthèse*, le tout étant alors mis à l'épreuve par un « travail » approprié – réalisé en particulier sous la forme d'exercices et de problèmes – de l'organisation mathématique ainsi obtenu.

classes de première des séries L, ES et S » publiée par le GTD de mathématiques. À propos de la détermination de la médiane d'une série statistique, ce texte exclut un procédé qui est la contrepartie graphique du procédé évoqué dans la question examiné :

La procédure qui consiste à tracer une courbe dite de fréquences cumulées croissante, continue, obtenue par interpolation linéaire à partir des valeurs $F(a_i)$ définies ci-dessus et à définir la médiane comme l'intersection de cette courbe avec la droite d'équation $y = 0,5$, ou avec une courbe analogue dite des fréquences cumulées décroissantes n'est pas une pratique usuelle en statistique et ne sera pas proposée au lycée.

On note à nouveau le souci des auteurs du programme d'éliminer des pratiques jugées inactuelles et, de ce fait, indésirables. Le sujet d'étude évoqué ***n'est donc pas au programme*** de la classe de 2^{de}.

Il s'agit-là de l'une des 24 questions touchant à la statistique qui émanent des élèves professeurs enseignant en seconde : le pourcentage de ce type de questions était de $\frac{3}{503} \approx$ 0,6 % s'agissant des élèves professeurs effectuant leur stage en collège ; il passe ici à près de 4,7 %. Ce qu'on doit donc souligner *a priori*, c'est d'abord que l'enseignement en seconde suscite chez ces jeunes professeurs une interrogation sensiblement plus vive sur la statistique. Mais quelles questions se posent-ils ? Un premier ensemble de questions pourrait se résumer crûment ainsi : *Faut-il vraiment faire (tout) ça ?* On sait par exemple que les textes gouvernant l'enseignement en seconde prévoit un cahier de statistique ; une stagiaire soulève, dès la séance de rentrée (c'est-à-dire avant même le première séance du séminaire), la question suivante :

Si on utilise un classeur avec les différentes rubriques suivantes :

1. Calcul et fonctions $\left\{\begin{array}{l}\text{a) AER}\\ \text{b) Synthèses}\\ \text{c) Exercices}\end{array}\right.$

2. Géométrie $\left\{\begin{array}{l}\text{a)}\\ \text{b)}\\ \text{c)}\end{array}\right.$

3. Devoirs

4. Vie et travail

est-il quand même conseillé de demander aux élèves un cahier de statistique, même s'il n'est pas poursuivi jusqu'en classe de Terminale dans l'établissement, ou peut-on rajouter une rubrique *Statistique* dans leur classeur ?

L'innovation proposée paraît irréelle ; et de fait, on verra qu'elle ne parvient guère à s'imposer dans la pratique. La nouveauté pousse en avant des idées qui, parfois, font fi des contraintes les plus classiques au plan pédagogique, comme le donne à voir cette question, rédigée lors de la 15^e séance du séminaire :

À propos de la statistique, je compte leur donner une enquête à faire pendant les vacances. Est-il possible que la phase d'expérimentation se déroule hors classe et que des personnes extérieures y participent ?

Mais ce statut d'exception qui, à plusieurs égards, est reconnu à l'enseignement de la statistique en seconde ne saurait masquer un fait essentiel : la dévalorisation du domaine, ce dont témoignent – très classiquement – certaines questions. « Peut-on traiter le chapitre statistique sous forme d'exercices et de devoirs à la maison ? » demande ainsi, lors de la 17e séance du séminaire, un élève professeur qui, en réalité, n'est pas tout à fait un débutant et qui se montre ainsi sensible à une certaine *doxa* professorale. Une de ses jeunes collègues est elle-même tentée par cette apparente solution de facilité, qui écrit :

Je voudrais savoir si dans la partie statistique je dois faire apparaître tout ce qui est diagrammes, camemberts en AER et en synthèse ou si une simple utilisation en exercices ou problèmes est suffisante.

Cette question, formulée lors de la séance 11, jointe à une autre question formulée, elle, dès la séance 7, sera l'objet d'un assez long commentaire à la 14e séance du séminaire, développement que nous reproduisons ci-après.

1. On n'a pas à faire un sort particulier au vocabulaire de la statistique, non plus d'ailleurs qu'aux instruments graphiques dont le travail statistique tire profit. Ce sont là autant ***outils*** qui ne doivent s'introduire – quasiment d'eux-mêmes, n'était le choix du vocable ou du graphisme particulier – que lorsqu'ils apparaissent ***utiles***. Dans l'exemple ci-dessus, les ***mots*** d'individu, d'échantillon, de population s'introduisent dans le sillage des ***choses*** qu'ils viennent nommer : ***les choses sont premières***, et les mots que l'on mobilise nous aident à en parler – pour les commenter, nous interroger, etc.

2. En statistique comme ailleurs, les types de tâches et les techniques tout comme le vocabulaire et les notations pour en parler ou les résultats pour les éclairer et les justifier s'introduisent dans le cadre d'AER, par lesquelles se construit progressivement le système des savoirs et savoir-faire constitutif de la science statistique. Il n'y a donc ***rien*** de particulier à envisager à cet égard : la règle commune (AER, synthèses, etc.) prévaut strictement – à condition de la bien entendre…

③ Dans l'exemple précédemment évoqué, se trouve aussi – en filigrane – l'une des notions cardinales du programme de statistique de 2de : celle de ***fluctuation d'échantillonnage***. Mais, pour mieux le voir (lors de la prochaine séance), il conviendra d'abord de généraliser la situation envisagée plus haut.

❶ Considérons une population Ω et une propriété que peuvent avoir ou non les individus composant Ω (dans le cas envisagé, les individus étaient des groupes de 30 personnes et la propriété était le fait que se trouvent dans le groupe deux personnes au moins ayant le même jour anniversaire). On peut généraliser cette situation : au lieu d'une propriété possédée ou non, on suppose un ***caractère***, dont un individu statistique possède telle ***modalité*** – le caractère peut être par exemple la couleur des cheveux d'une personne et la modalité la couleur auburn. On peut généraliser encore : au lieu d'un caractère ***qualitatif*** ou ***nominal*** assignant à chaque individu une modalité (ou ***attribut***) parmi un ensemble fini de modalités, on peut envisager une ***variable*** X, application de Ω dans l'ensemble V des ***valeurs*** du caractère, qui peuvent être des nombres entiers, issus d'un ***dénombrement*** (caractère ***discret***), ou des nombres quelconques, issus d'un ***mesurage*** (caractère ***continu***). Dans le cas envisagé plus haut, on peut ainsi assigner à chaque individu ω le nombre $X(\omega)$ de paires de personnes ayant le même jour anniversaire : dans le cas de la promotion actuelle de professeurs stagiaires de mathématiques, par exemple, on a $X = 9$.

❷ Que sont alors les ***questions génératrices*** de la science statistique ? On suppose dans ce qui suit que $V \subset \mathbb{R}$. Le type principal, en 2de, de questions auxquelles la statistique s'efforce de répondre, a la forme suivante :

Étant donné une population Ω, un caractère X défini sur Ω à valeurs dans $V \subset \mathbb{R}$, et une partie A de V, les individus ω tels que $X(\omega) \in A$ sont-ils fréquents ?

En particulier, lorsque A est de la forme $\{ v \in V / v \geq a \}$ (où $a \in V$), on se demandera si, par rapport à la population Ω, avoir un $X \geq a$ (une taille, un poids, un revenu, si l'individu est une personne), c'est avoir « un gros X », etc. Plus largement, on se demandera aussi ce que c'est que « le X d'un ω », comme il en va dans le florilège de questions ci-après :

1. Un professeur, ça gagne combien ?
2. Ça pèse combien, une tomate ?
3. Ça gagne bien, un professeur ?
4. C'est gros, une tomate ?
5. C'est quoi une grosse tomate ?
6. C'est quoi, un professeur qui gagne beaucoup ?
7. C'est quoi, un gros éléphant ?
8. Ça pèse combien, un éléphant ?
9. Une taille d'un mètre quarante-sept, c'est grand pour un élève de 6^{e} ?
10. …

❸ On notera que, de façon presque inévitable, les questions précédentes sont imprécises, et cela pour plusieurs raisons :

– la ***population*** Ω est souvent mal définie : que sont exactement « les professeurs », ou « les tomates », ou « les éléphants » dont parlent les questions ?

– le ***caractère*** X n'est pas toujours bien défini non plus : « ce que gagne un professeur » ou « la grosseur d'une tomate » (mais non son poids) ne sont pas des notions précises.

Dans la mesure où la statistique doit permettre de répondre à des questions des types précédents, il conviendra donc dans chaque ***étude statistique*** particulière de définir avec précision la population Ω considérée et le caractère X étudié.

④ Que peuvent être les réponses aux questions évoquées plus haut ? Considérons la question « Une taille d'un mètre quarante-sept, c'est grand pour un élève de 6^e^ ? » La population est celle de tous les élèves de 6^e^ de France, le caractère est la taille : les deux choses sont assez bien définies. Supposons que l'on sache ceci : parmi les élèves de 6^e^, un peu plus de 50 % ont une taille inférieure ou égale à 1,41 cm. On pourra déjà répondre à la question qu'un élève de 6^e^ haut de 1,47 m ***n'est pas petit***, qu'il est même « plutôt grand », etc. Si, voyant l'élève en question, quelqu'un le déclarait « petit pour un 6^e^ », nous ne pourrions que le démentir.

❶ Si nous apprenions maintenant que seulement 5 % des élèves de 6^e^ ont une taille supérieure ou égale à 1,45 m, nous pourrions dire que l'élève considéré est ***grand*** – en tant qu'élève de 6^e^, toujours. On voit ainsi que ce qui nous intéresse, c'est ce qu'on nommera la ***distribution*** de X dans Ω – soit la façon dont les observations $X(\omega)$, $\omega \in \Omega$, ***se distribuent*** sur l'ensemble V des valeurs.

❷ Pour cela, on peut partir du ***tableau de données ponctuelles*** donnant, pour chaque $\omega_i \in \Omega$, $1 \leq i \leq N$, la valeur $x_i = X(\omega_i)$, c'est-à-dire le tableau des valeurs de X :

Individus	Valeurs
ω_1	x_1 (= v_1)
ω_2	x_2 (= v_2)
ω_3	x_3 (= v_3)
ω_4	x_4 (= v_4)
ω_5	x_5 (= v_5)
…	…
ω_N	x_N (= v_k)

Lorsqu'on réduit ce tableau au N-uplet $(x_1, \ldots, x_N)$, c'est-à-dire lorsqu'on le réduit à la ***série statistique*** correspondante, on perd l'identité de l'individu $\omega_i \in \Omega$ (on ne sait plus qui est au juste ω_i), dont on ne retient plus, dès lors, que la valeur x_i que prend sur lui le caractère X – et cela en conformité avec le fait qu'on ne s'intéresse pas ***aux individus*** en tant que tels, mais ***à la distribution*** des valeurs de X sur Ω.

❸ La ***distribution des observations*** se déduit du tableau des données ponctuelles, dont elle est en quelque sorte l'inverse :

Valeurs	Échantillon
v_1	$\{ \omega_1 \}$
v_2	$\{ \omega_2 \}$
v_3	$\{ \omega_3, \omega_5 \}$
v_4	$\{ \omega_4 \}$
…	…
v_p	$\{ \omega_m, \ldots \}$

La ***distribution des effectifs*** (ou des ***fréquences absolues***), n_j ($1 \le j \le p$), qui se déduit aussi bien de la ***série statistique***, fait perdre le ***rang*** dans la série statistique de chacune des valeurs observées lors du recueil de données :

Valeurs	Échantillon
v_1	n_1 (= 1)
v_2	n_2 (= 1)
v_3	n_3 (= 2)
v_4	n_4 (= 1)
…	…
v_p	n_p (= …)

La ***distribution des fréquences*** (ou des ***fréquences relatives***) $f_j = n_j/N$ permet (théoriquement), si on connaît $N = \sum_{j=1}^{p} n_j$, de reconstituer la distribution des effectifs ($n_j = N \times f_j$), et est souvent présentée sous forme de ***pourcentages*** :

Valeurs	Échantillon
v_1	$f_1 = 1/N =$ … %
v_2	$f_2 = 1/N =$ … %
v_3	$f_3 = 2/N =$ … %
v_4	$f_4 = 1/N =$ … %
…	…
v_p	$f_p =$ …$/N =$ … %

⑤ Comment répondre alors aux questions du type « Est-ce grand ? » (ou « Est-ce petit ? », etc.) ? On a entrevu ci-dessus qu'il est intéressant de connaître une valeur $v \in V$ (si elle existe) telle qu'à peu près 50 % des individus $\omega \in \Omega$ vérifient $X(\omega) < v$ tandis qu'à peu près 50 % vérifient $X(\omega) > v$.

❶ Ce qui précède renvoie à l'idée de ***médiane***. À cet égard, un site Web intitulé *Earliest Known Uses of Some of the Words of Mathematics* donne les indications suivantes (http://members.aol.com/jeff570/m.html) :

MEDIAN (in statistics). *Valeur médiane* was used by Antoine A. Cournot in 1843 in *Exposition de la Théorie des Chances et des Probabilités* (pp. 119-20) (David, 1998).
Median was used in English by Francis Galton in *Report of the British Association for the Advancement of Science* [Tables and discussion of range in height, weight and strength] in 1881: "The Median, in height, weight, or any other attribute, is the value which is exceeded by one-half of an infinitely large group, and which the other half fall short of." (OED2).

❷ Comment peut-on formaliser l'idée précédente ? L'idéal, si l'on peut dire, serait qu'existe une valeur $Me \in \mathbb{R}$ telle que l'on ait :

$$\frac{\text{Card}\ \{\ i\ /\ x_i < Me\ \}}{N} = \frac{\text{Card}\ \{\ i\ /\ x_i > Me\ \}}{N} = 50\ \%.$$

(ce qui suppose bien sûr que $\{ i / x_i = Me \} = \varnothing$). Cette définition conviendrait pour la série

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 5$$

par exemple (où $N = 4$ et où Me peut être n'importe quel nombre de l'intervalle]2 ; 3[), mais buterait sur la série $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 5, x_5 = 7$. Cette dernière série peut suggérer de choisir pour critère

$$\frac{\text{Card } \{ i / x_i < Me \}}{N}, \frac{\text{Card } \{ i / x_i > Me \}}{N} \leq 50 \ \%.$$

On obtient alors $Me = 3$ pour la série précédente ; pour la série (où $N = 15$)

$$1 ; 1 ; 3 ; 3 ; 3 ; 3 ; 3 ; 4 ; 7 ; 7 ; 7 ; 7 ; 7 ; 7 ; 7$$

on obtient $Me = 4$.

❸ Posons $f_< = \frac{\text{Card } \{ i / x_i < Me \}}{N}$, $f_= = \frac{\text{Card } \{ i / x_i = Me \}}{N}$, $f_> = \frac{\text{Card } \{ i / x_i > Me \}}{N}$. Posons encore $f_< + f_= = \frac{\text{Card } \{ i / x_i \leq Me \}}{N} = f_\leq$, $f_> + f_= = \frac{\text{Card } \{ i / x_i \geq Me \}}{N} = f_\geq$. Comme $f_< + f_= + f_> = 100\ \%$ et $f_<$, $f_> \leq 50\ \%$, on a $f_\leq = f_< + f_= = 100\ \% - f_> \geq 50\ \%$ et $f_\geq = f_> + f_= = 100\ \% - f_< \geq 50\ \%$. Réciproquement, si $f_\leq$, $f_\geq \geq 50\ \%$, alors $f_<$, $f_> \leq 50\ \%$. Les deux critères sont équivalents.

❹ Examinons le problème de l'existence et de l'unicité de la médiane si on la définit par les critères précédents. Soit une série de taille N dont les valeurs sont rangés par ordre non décroissant : $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \ldots \leq x_N$.

➢ Si $N = 2m + 1$, la série s'écrit : $x_1 \leq \ldots \leq x_m \leq x_{m+1} \leq x_{m+2} \ldots \leq x_{2m+1}$. Si $t < x_{m+1}$, on a $\frac{\text{Card } \{ i / x_i \leq t \}}{\text{Card } \{ i \}} \leq \frac{m}{N} = \frac{m}{2m+1} < 50\ \%$, en sorte que $Me \geq x_{m+1}$. De même si $t > x_{m+1}$, on a $\frac{\text{Card } \{ i / x_i \geq t \}}{\text{Card } \{ i \}} \leq \frac{N-m-1}{N} = \frac{m}{N} = \frac{m}{2m+1} < 50\ \%$, en sorte que $Me \leq x_{m+1}$. Finalement, comme on a $\frac{\text{Card } \{ i / x_i \leq x_{m+1} \}}{\text{Card } \{ i \}} \geq \frac{m+1}{N} = \frac{1}{2}\frac{m+1}{m+\frac{1}{2}} > 50\ \%$ et $\frac{\text{Card } \{ i / x_i \geq x_{m+1} \}}{\text{Card } \{ i \}} \geq \frac{N-m}{N} = \frac{1}{2}\frac{m+1}{m+\frac{1}{2}} > 50\ \%$, on peut conclure qu'il existe une médiane unique, $Me = x_{m+1}$.

➢ Si $N = 2m$, la série s'écrit : $x_1 \leq \ldots \leq x_m \leq x_{m+1} \leq x_{m+2} \ldots \leq x_{2m}$. Si $t < x_m$, on a $\frac{\text{Card } \{ i / x_i \leq t \}}{\text{Card } \{ i \}} \leq \frac{m-1}{N} = \frac{m-1}{2m} < 50\ \%$, en sorte que $Me \geq x_m$. De même si $t > x_{m+1}$, on a $\frac{\text{Card } \{ i / x_i \geq t \}}{\text{Card } \{ i \}} \leq \frac{N-m-1}{N} = \frac{m-1}{N} < 50\ \%$, en sorte que $Me \leq x_{m+1}$. Finalement, si $x_m \leq t \leq x_{m+1}$, comme on a $\frac{\text{Card } \{ i / x_i \leq t \}}{\text{Card } \{ i \}} \geq \frac{m}{N} = 50\ \%$ et $\frac{\text{Card } \{ i / x_i \geq t \}}{\text{Card } \{ i \}} \geq \frac{m}{N} = 50\ \%$, on peut conclure que tout nombre de l'intervalle $[x_m ; x_{m+1}]$ est une médiane. Dans ce cas, pour assurer l'unicité de ***la*** médiane, l'usage est de prendre pour médiane la ***moyenne*** des valeurs de rang $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2} + 1$. C'est ce qu'il convient de faire en 2$^{\text{de}}$ comme l'indique le passage ci-après d'un document dû au « Groupe technique disciplinaire » de mathématiques (qui a élaboré l'actuel programme de 2de) :

Médiane : on ordonne la série des observations par ordre croissant ; si la série est de taille $2n+1$, la médiane est la valeur du terme de rang $n+1$ dans cette série ordonnée ; si la série est de taille $2n$, la médiane est la demi-somme des valeurs des termes de rang n et $n+1$ dans cette série ordonnée.

On voit ici le formateur animé par le souci de donner de la profondeur de champ à des questions qui tendent à réduire la statistique à une affaire de mots plutôt qu'à une affaire de concepts et de problématiques, et cela en donnant une certaine attention à l'histoire de la culture statistique. L'auteur de la première des deux questions précédentes en a formulé deux autres, respectivement lors des séances 3 et 8 du séminaire :

Comment introduire la statistique en 2de ? Je pensais à une activité sur les lancers de dés puis faire une simulation (avec la touche RANDOM) sur ordinateur ou avec leur calculatrice (TI 82 par exemple).

Comment gérer une activité statistique ? L'usage trop précoce de la calculatrice en classe entière a engendré une difficulté imprévue – mais, en l'analysant après la séance, prévisible.

Ces deux questions laissent penser que, pour ce professeur stagiaire, l'enseignement de la statistique est, selon une formule célèbre, « un art tout d'exécution » : il suffirait de faire, après avoir pris les décisions qui s'imposent, sans qu'une enquête épistémologique plus approfondie soit nécessaire. La première des deux questions que l'on vient de mentionner fera l'objet, bien longtemps après avoir été formulée, d'une réponse apportée lors de la 15e séance du séminaire ; on la reproduit ci-après.

• Le premier élément de réponse à la question ainsi formulée aura l'apparence d'une lapalissade : pour « introduite » la statistique, on lancera dans la classe ***l'étude d'une question de statistique***, soit d'une question de l'un des types dont on a donné lors de la séance précédente un petit florilège, reproduit ci-après.

1. Un professeur, ça gagne combien ?
2. Ça pèse combien, une tomate ?
3. Ça gagne bien, un professeur ?
4. C'est gros, une tomate ?
5. C'est quoi une grosse tomate ?
6. C'est quoi, un professeur qui gagne beaucoup ?
7. C'est quoi, un gros éléphant ?
8. Ça pèse combien, un éléphant ?

9. Une taille d'un mètre quarante-sept, c'est grand pour un élève de 6e ?

10. …

① En fait, un grand nombre de travaux proposés dans les manuels se situent d'emblée hors de la problématique évoquée ici – qu'on essaie de rendre sensible dans ce qui suit.

② Considérons plus particulièrement les trois questions suivantes :

1. Un professeur, ça gagne combien ?
2. Ça pèse combien, une tomate ?
8. Ça pèse combien, un éléphant ?

❶ Ces questions renvoient plus directement que les autres proposées au fait fondamental : elles désignent par un nom (« professeur », « tomate », « éléphant ») l'élément générique d'une certaine ***population*** Ω – à préciser ! – à propos duquel elles s'interrogent sur la valeur d'une certaine ***grandeur*** (ou ***variable***), elle-même à préciser. Ce qu'il faut noter d'emblée est ceci : si l'on pouvait à tout coup faire des réponses telles les suivantes

1. Un professeur, ça gagne 2397 €.
2. Une tomate, ça pèse 128 g.
8. Un éléphant, ça pèse 5,2 t.

la statistique n'existerait guère !

❷ On commence à entrer dans la problématique statistique quand on apprend à voir dans le monde, non des grandeurs ***fixes*** (elles sont rares : les cinq doigts de la main, etc.), mais la foule des ***grandeurs variables*** ou ***aléatoires***. Ce que gagne ***un*** professeur, ce que pèse ***une*** tomate, ou ***un*** éléphant, cela n'existe pas ! Ce qui existe, ce sont des ***distributions***, la distribution des fréquences du caractère X (le poids, le salaire, etc.) dans la population Ω. Ce sont ces distributions que l'on s'efforce de connaître en statistique, à la fois par le recueil empirique de données – ***les*** statistiques – et par un travail spécifique sur ces données – celui que permet et qu'inspire ***la*** statistique.

③ Sans connaître « parfaitement » la distribution des fréquences de X sur Ω, on peut avoir certaines informations.

❶ Pour la population des éléphants, on trouve la description suivante lit sur le site du zoo d'Honolulu (http://www.honoluluzoo.org/indian_elephant.htm) :

Elephants in general are the largest existing land mammals and they have the biggest brains in the animal kingdom (weighing 5 kg or 11 lbs).
In general, the Asian elephant weighs between 3-5 tons (6,615-11,025 lbs); however the smaller Sumatran subspecies weight range begins at 2 tons (4,000 lbs). By contrast, the African elephant weighs between 4-7 tons (8,820-15,435 lbs). An Asian elephant's height at the shoulder is between 6.6-11.5 ft (2-3.5 m). By contrast the African elephant stands 9.8-13.1 ft (3-4 m).

On voit ici que le poids du ***cerveau*** d'un éléphant, grandeur ***variable***, est considéré comme une grandeur ***fixe*** (sans doute en partie pour impressionner le lecteur : un cerveau de 5 kg !). On voit aussi que, s'agissant du ***poids***, ***la*** population des éléphants (« Elephants in general ») est scindée en plusieurs ***(sous-)populations*** et que le poids de l'éléphant, de même que la hauteur au garrot, ne sont pas précisée par un seul nombre, mais par deux, que l'on peut regarder comme le ***minimum*** et le ***maximum*** de la distribution ***élaguée*** (dans quelle proportion, on ne le sait pas).

❷ Pour ***le*** poids de ***la*** tomate, un site Internet (http://www.bioweight.com/nous.html) indique, sous le titre *La tomate, un fruit idéal !*, ceci :

Un excellent coupe faim dont le poids peut varier de 10 g à près de 2 kg !

On verra que le minimum et le maximum annoncés ici ne sont pas ceux que donnent une SCEA (société civile d'exploitation agricole), « Le bon plant », qui commercialise des plants et livre les informations suivantes (http://www.bonplant.fr/pages/tomate0.htm) :

Petite, moyenne, grosse tomate ? À quoi cela correspond-il ?
Pour la production maraîchère le type de fruit correspond au calibre de la tomate (diamètre) ; en général le calibre correspond à une certaine fourchette de poids. Mais certaines variétés de tomates de calibre identique seront plus lourdes que d'autres.
Quelques poids moyens de variétés de tomates.
Les tomates cerises :
poids de 15 g à 30 g (tomates en forme de poire).
Les tomates cerises cocktail :
poids de 35 g à 40 g.
Les tomates à petits fruits :
poids de 50 g à 100 g, le calibre correspond à 47 - 57 millimètres.
Les tomates à fruits moyens :
poids de 100 g à 150 g, le calibre correspond à 57 - 67 millimètres.
Les tomates à gros fruits :
poids de 150 g à 200 g, le calibre correspond à 67- 77 ou 67 - 82 millimètres.
Les tomates à très gros fruits :
poids de 200 g à un kilo, le calibre est supérieur à 82 millimètres.
Les tomates en grappes se situent dans les calibres 47 -57 ou 57 - 67 millimètres.
La plupart des variétés de tomates anciennes produisent des fruits irréguliers.

❸ On voit ainsi que, en pratique, on précise une distribution de fréquences (ou de valeurs) par la donnée d'un minimum et d'un maximum, entre lesquels on aura par exemple 95 % des valeurs. Le fait de préciser par un nombre ***unique*** correspond à une simplification, dont il convient de contrôler la validité (l'***étendue***, c'est-à-dire la différence entre le maximum et le minimum, doit par exemple être « petite » par rapport à l'ordre de grandeur du minimum) ; mais elle a surtout le démérite de refaire surgir l'idée d'une grandeur presque fixe…

④ On peut répondre ainsi aux questions 2 & 8 évoquées plus haut de la façon suivante :

2. Une tomate cerise, ça pèse entre 15 g à 30 g, etc.
8. Un éléphant d'Afrique, ça pèse entre 4,5 et 7 t, etc.

❶ Bien entendu, ces données ne permettent pas, formellement, de répondre à la question « C'est quoi une grosse tomate ? » ou « C'est quoi une gros éléphant ? », d'abord parce que ces questions sont mal définies – de quelle sorte de tomates ou d'éléphants parle-t-on au juste ? –, mais, même quand la population Ω est assez bien définie, parce que l'on ne sait pas ***au-delà de quelle valeur*** v de X – poids de la tomate ou de l'éléphant… – il ne reste plus, par exemple, qu'au mieux 10 %, 5 % ou 1 % de la population Ω :

$$\frac{\text{Card } \{ \omega \in \Omega \,/\, X(\omega) > v \}}{N} = \frac{\text{Card } \{ i \,/\, x_i > v \}}{N} \leq r\ \%.$$

❷ Dans certains cas, il est facile d'obtenir ces valeurs. Considérons la question suivante :

Les professeurs français sont-ils parmi les mieux payés des professeurs d'Europe ?

Selon le site Internet d'une section départementale d'un syndicat d'enseignants, qui reproduit ces données (http://snfolc29.free.fr/journal/ocde1001.html), l'OCDE (*Organisation for Economic Co-operation and Development* : http://www.oecd.org/home/) a publié des statistiques relatives à l'année 1999 et au « salaire statutaire d'un professeur de l'enseignement général public » par exemple « ayant 15 ans d'ancienneté et la certification standard requise », exprimé en $ PPA (parités de pouvoir d'achat : en 1999, selon l'OCDE, 1 $ valait 6,69 FF en PPA, soit à peu près un euro), dans divers pays. La série statistique en question, dont les valeurs sont ici classées par ordre ***décroissant***, porte sur les 25 pays suivants :

01. Suisse :	62 052
02. Pays-Bas :	46 148
03. Allemagne :	41 745
04. Belgique :	41 528
05. Danemark :	40 019
06. Corée du Sud :	39 265
07. Australie :	37 138
08. États-Unis :	36 219
09. Irlande :	35 944
10. Espagne :	33 988
11. Angleterre :	33 540
12. Écosse :	32 858
13. Nouvelle Zélande :	32 573
14. Autriche :	30 376
15. Finlande :	29 530
16. France :	**28 757**
17. Portugal :	27 465
18. Suède :	26 210
19. Italie :	26 175
20. Norvège :	25 854
21. Islande :	25 795

22. Grèce :	23 943
23. République Tchèque :	10 695
24. Hongrie :	10 355
25. Turquie :	9 355

Ici, la ***médiane*** est donnée par la 13^e^ valeur, égale à 32 573 : la France se classant 16^e^, on ne peut certainement pas dire – si du moins on se fie aux données proposées – que « les professeurs français sont parmi les mieux payés des professeurs de ces 25 pays »… « Bien gagner », par exemple, peut se traduire par « être parmi les 20 % les mieux payés » : ici, cela signifie être parmi les 5 pays que sont la Suisse, les Pays-Bas, l'Allemagne, la Belgique, le Danemark, où l'indicateur de salaire dépasse 40 000 $ PPA. Si l'on écarte la Corée du Sud, l'Australie, les États-Unis, la Nouvelle Zélande et la Turquie (?), on obtient la série de taille 20 suivante :

01. Suisse :	62 052
02. Pays-Bas :	46 148
03. Allemagne :	41 745
04. Belgique :	41 528
05. Danemark :	40 019
06. Irlande :	35 944
07. Espagne :	33 988
08. Angleterre :	33 540
09. Écosse :	32 858
10. Autriche :	30 376
11. Finlande :	29 530
12. France :	**28 757**
13. Portugal :	27 465
14. Suède :	26 210
15. Italie :	26 175
16. Norvège :	25 854
17. Islande :	25 795
18. Grèce :	23 943
19. République Tchèque :	10 695
20. Hongrie :	10 355

La médiane est ici comprise entre les 11^e^ et 12^e^ valeurs, alors que la France se classe 13^e^ : à nouveau, on ne peut pas dire que « les professeurs français sont parmi les mieux payés des professeurs de ces 20 pays ». La chose resterait vraie si l'on retranchait la Suisse, classée 1^re^, la France étant alors tout juste « dans la médiane ».

• Ce qu'on peut rechercher, plus généralement, c'est à « fractionner » la série de taille N formées des valeurs $x_i = X(\omega_i)$ des individus constituant Ω.

① Rappelons que la médiane *Me* a été définie par les inégalités

$$\frac{\text{Card } \{ i \,/\, x_i \leq Me \}}{N}, \frac{\text{Card } \{ i \,/\, x_i \geq Me \}}{N} \geq 50\ \%.$$

❶ Pour tout $v \in V \subset \mathbb{R}$, posons $F(v) = \frac{\text{Card } \{ i \,/\, x_i \leq v \}}{N}$. $F(v)$ désigne la fréquence des éléments de la série inférieurs ou égaux à v. Si $v_1, \ldots, v_p$ est la suite strictement croissante des valeurs prises par la série de taille N considérée, la fonction F est discontinue à gauche en chacun des points v_j et constante sur les intervalles $[v_i\,; v_{i+1}[$: sa représentation graphique est composée de segments horizontaux. On a par exemple : $F(Me) \geq 50\ \%$. Notons que, si

$$F(v) \geq (100 - r)\ \%$$

c'est-à-dire si $\frac{\text{Card } \{ i \,/\, x_i \leq v \}}{N} \geq (100 - r)\ \%$, alors $\frac{\text{Card } \{ i \,/\, x_i > v \}}{N} = 100\ \% - \frac{\text{Card } \{ i \,/\, x_i \leq v \}}{N} \leq$ $100\ \% - (100 - r)\ \% = r\ \%$.

❷ Posons plus généralement $Q(u) = \inf \{ v \in V \,/\, F(v) \geq u \}$ et notons qu'on a aussi bien

$$Q(u) = \min \{ v \in V \,/\, F(v) \geq u \}.$$

L'application Q est la fonction ***quantile*** : $Q(u)$ est la plus petite valeur v parmi les valeurs $v_1, \ldots, v_p$ prises par la série telle que $F(v)$ atteigne ou dépasse u. Lorsque $u = \frac{k}{4}$ (où $k = 1, 2, 3$), $Q(u)$ est appelé le k-ième ***quartile*** ; pour $u = \frac{k}{10}$ (où $k = 1, 2, \ldots, 9$), $Q(u)$ est le k-ième ***décile*** ; pour $u = \frac{k}{100}$ (où $k = 1, 2, \ldots, 99$), $Q(u)$ est le k-ième ***centile***. Par exemple, pour la série suivante (dont on sait que la médiane est 4)

$$1\,;\,1\,;\,3\,;\,3\,;\,3\,;\,3\,;\,3\,;\,4\,;\,7\,;\,7\,;\,7\,;\,7\,;\,7\,;\,7\,;\,7$$

on a $F(1) = \frac{2}{15}$; $F(3) = \frac{7}{15}$; $F(4) = \frac{8}{15}$; $F(7) = 1$, en sorte que, par exemple, $Q(0{,}25) = 3$, $Q(0{,}5) = 4$, $Q(0{,}75) = 7$.

② Pour la série de taille 14

$$1\,;\,1\,;\,3\,;\,3\,;\,3\,;\,3\,;\,3\,;\,7\,;\,7\,;\,7\,;\,7\,;\,7\,;\,7\,;\,7$$

on a $Q(0{,}25) = Q(0{,}5) = 3$, $Q(0{,}75) = 7$. Le 2^e quartile $Q(0{,}5) = 3$ est ***une*** médiane, mais ce qu'on nomme par convention ***la*** médiane, à savoir $\frac{3+7}{2} = 5$, n'est pas le 2^e quartile…

À nouveau, on constate le souci du formateur de donner une substance à une réflexion qui, à travers les questions proposées, apparaît très formelle et, en vérité, bien superficielle. Chez quelques-uns, rares il est vrai, l'attitude générale reste marquée par une réelle suspicion, qui s'exprime par des insinuations critiques, comme il en va dans la question suivante, mise par écrit à la séance 17, et en elle-même parfaitement légitime :

En terminale ES, la loi binomiale est au programme mais uniquement pour au plus 4 expériences de Bernoulli. Cette restriction est due au fait que la notion de combinaison n'est pas au programme. Quel est l'intérêt alors de parler de loi binomiale ? (Le cas de quatre expériences ne présente pas beaucoup d'intérêt.)

Le même élève professeur avait posé, lors de la séance 11, une question qui fera l'objet d'une attention particulière lors de la séance 15, à la suite de la réponse – rapportée ci-dessus – à la question sur la manière d'introduire la statistique en classe de seconde. À nouveau, la question est des plus légitimes ; mais elle porte en elle l'ombre d'une accusation quant au piètre agencement du corpus des notions statistiques. Le formateur répondra en faisant notamment remarquer que la difficulté soulevée est bien connue et a été prise en compte par les textes gouvernant l'enseignement en seconde.

❶ À propos de cette non-coïncidence [de la médiane et du 2^{e} quartile], la question suivante a été posée :

Médiane et 2^{e} quartile

Soit une série statistique qui est composée de 2*n* termes. Alors la médiane de la série statistique est la demi-somme du terme de rang *n* et du terme de rang *n* + 1. Dans ce cas-là, la médiane n'appartient pas à la série statistique. Si on veut le deuxième quartile, c'est la valeur du terme de rang *n* + 1. Pourquoi n'a-t-on pas un système où le deuxième quartile correspond à la médiane ?

La question comporte une petite erreur : le 2^{e} quartile dans la série

$$x_1 \leq \ldots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq x_{n+2} \ldots \leq x_{2n}$$

est $Q(0,5) = x_m$ et n'est égal à x_{n+1} que si $x_m = x_{n+1}$, auquel cas… la médiane et le 2^{e} quartile coïncident !

❷ Cela noté, le problème soulevé a été signalé dans une note du GTD de mathématiques à l'origine de l'actuel programme de 2de :

Pour les quartiles, nous proposons de garder la définition liée à la fonction quantile :

Premier quartile : c'est le plus petit élément *q* des valeurs des termes de la série, ordonnées par ordre croissant, tel qu'au moins 25 % des données soient inférieures ou égales à *q*.

Troisième quartile : c'est le plus petit élément *q*' des valeurs des termes de la série, ordonnées par ordre croissant, tel qu'au moins 75 % des données soient inférieures ou égales à *q*.

Certains logiciels prennent pour le premier quartile une définition analogue à la médiane : par exemple si *n* = 4*r*, le premier quartile est la demi-somme des valeurs prises par le terme de rang *r* et le terme de rang *r*+1. Nous n'adopterons pas cette définition un peu marginale.

Nous suggérons de ne pas définir le second quartile mais de manipuler { premier quartile, médiane, troisième quartile } ; il n'y a pas de raisons de signaler qu'avec la définition adoptée, la médiane n'est pas le second quartile, sauf si un élève pose précisément la question. Dans ce cas, on pourra lui expliquer individuellement que certaines séries comportant des ex-æquo (par exemple 1 2 2 2 2 2 3 5) ne permettent pas une définition agréable de la médiane comme « le » nombre *m* tel qu'exactement 50 % des termes de la série sont inférieurs à *m* et exactement 50 % supérieurs à *m* ; à partir de là, plusieurs choix étaient possibles, mais l'idée reste que la médiane coupe la série en deux dans le cas où il n'y a pas d'ex-æquo.

En première L, on ne définira que le premier et le neuvième déciles :

Premier décile : c'est le plus petit élément *d* des valeurs des termes de la série, ordonnées par ordre croissant, tel qu'au moins 10 % des données soient inférieures ou égales à *d*.

Neuvième décile : c'est le plus petit élément *d*' des valeurs des termes de la série, ordonnées par ordre croissant, tel qu'au moins 90 % des données soient inférieures ou égales à *d*'.

❸ En 2de, toutefois, la connaissance de la distribution des fréquences d'une série se limite au minimum, au maximum, à l'étendue, et à la médiane – à quoi il faudra bien sûr ajouter la moyenne (arithmétique), sur laquelle on reviendra : le champ des questions de statistique que l'on pourra se proposer d'étudier en est *a priori* quelque peu réduit.

Un autre élève professeur, qui, en fait, a déjà enseigné, exprime de même, dans une forme qui se veut critique, ses difficultés avec une matière qu'il maîtrise mal, et cela par le biais des deux questions suivantes, rédigées respectivement lors des séances 15 et 20 du séminaire :

> Dans le chapitre « Statistique », plusieurs exercices, après avoir demandé d'établir la moyenne et la médiane d'une série, demandent ensuite d'interpréter la différence qui existe entre ces deux paramètres. Or, à part dans quelques cas simples, j'ai moi-même beaucoup de mal à fournir une explication. Et je n'ai pas réussi à me procurer une documentation satisfaisante.
>
> Il me semble que montrer la linéarité de la moyenne revient à montrer que la moyenne est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$. Or montrer que la moyenne d'une série, image d'une première série par une fonction affine, est l'image de la première moyenne par cette fonction, n'est pas suffisant pour pouvoir appeler ensuite cette propriété « linéarité de la moyenne ». Par ailleurs, alors que l'on utilise là une fonction affine, le mot *linéarité* ne facilite pas l'acquisition de cette propriété par les élèves. Ne sont-ce pas là deux bonnes raisons pour ne pas appeler cette propriété « linéarité de la moyenne » mais seulement « 2e propriété de la moyenne » ? Mais a-t-on seulement le droit de changer la dénomination d'une propriété ?

La première de ces questions fait l'objet d'un long commentaire dès la séance suivante. L'examen des éléments de réponse apportés montre qu'on y retrouve le souci constant du formateur de montrer aux professeurs stagiaires combien ce qu'ils croient trop souvent à portée de main suppose une étude spécifique, attentive, généreuse – dans laquelle, au reste, il n'hésite pas à insérer des considérations toutes pratiques sur l'utilisation d'un tableur.

1. Le programme de 2de comporte le passage suivant :

> On commentera quelques cas où la médiane et la moyenne diffèrent sensiblement.

Notons la référence à ***quelques cas*** : la question évoquée ne saurait en aucun cas devenir l'alpha et l'oméga du travail statistique !

2. On a vu que c'est la ***médiane*** qui importe pour répondre à certaines au moins des questions génératrices de la statistique univariée (= à une variable). La ***moyenne*** (arithmétique) n'est, à cet égard, qu'un indice numérique qui n'a d'intérêt que s'il est ***proche*** de la médiane : c'est en quelque sorte un « indicateur approché » de l'indicateur utile, la médiane. L'attitude saine à avoir – et à faire prévaloir dans la classe – ne consiste pas à se délecter des cas où moyenne et médiane diffèrent sensiblement, mais tout au contraire à comprendre que, dans la problématique statistique évoquée jusqu'ici, on ne s'intéresse à la moyenne que lorsque celle-ci est suffisamment proche de la médiane.

3. Situons d'abord médiane et moyenne par rapport à un type commun de caractérisation mathématique que précise le théorème suivant (que l'on admettra).

Théorème. – Soit une série statistique $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et soit d l'une des distances sur $\mathbb{R}^n$ ci-après :

➔ la distance ***euclidienne*** : $d((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$;

➔ la distance ***des valeurs absolues*** : $d((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$;

➔ la distance du ***maximum des écarts absolus*** : $d((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\}$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$; alors $d((x, x, \ldots, x), (x_1, x_2, \ldots, x_n))$ est ***minimal***…

➔ … dans le cas où d est la distance ***euclidienne***, lorsque x est la ***moyenne arithmétique***

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

et on a alors $d((\overline{x}, \overline{x}, \ldots, \overline{x}), (x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \sqrt{n}\, s$, où s est ***l'écart type*** de la série $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;

➔ … dans le cas où d est la distance ***des valeurs absolues***, lorsque x est ***une médiane Me*** de la série donnée, à savoir, en supposant les valeurs x_i rangées par ordre non décroissant et numérotées de 1 à n,

– la valeur de rang $\frac{n+1}{2}$ si n est ***impair***,

– ***tout réel*** entre les valeurs de rang $\frac{n}{2}$ et $\frac{n}{2} + 1$ si n est ***pair***,

et on a alors $d((Me, Me, \ldots, Me), (x_1, x_2, \ldots, x_n)) = n\, e_{Me}$, où e_{Me} est *l'écart médian* ;

➔ … dans le cas où d est la distance ***du maximum des écarts absolus***, en supposant les valeurs x_i rangées par ordre non décroissant et numérotées de 1 à n, lorsque x est la ***moyenne des valeurs***

extrêmes $ME = \frac{x_1+x_n}{2}$ et on a alors $d((ME, ME, \ldots, ME), (x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \frac{w}{2}$, où w est ***l'étendue*** de la série statistique.

4. Examinons maintenant l'« erreur » commise en prenant la valeur ***moyenne*** pour approximation de la valeur ***médiane***, en nous plaçant dans le cas d'une série

$$x_1 \leq \ldots \leq x_m \leq x_{m+1} \leq x_{m+2} \ldots \leq x_{2m+1}$$

de taille impaire.

① On a alors $Me = x_{m+1}$ et il vient :

$$Me - \overline{x} = x_{m+1} - \overline{x} = x_{m+1} - \frac{x_1+x_2+\ldots+x_{2m+1}}{2m+1} = \frac{1}{2m+1}\sum_{i=1}^{2m+1}(x_{m+1} - x_i).$$

❶ On a d'abord : $|Me - \overline{x}| = \frac{1}{2m+1}\left|\sum_{i=1}^{2m+1}(x_{m+1} - x_i)\right| \leq \frac{1}{2m+1}\sum_{i=1}^{2m+1}|x_{m+1} - x_i| = e_{Me}$. Rappelons que la valeur de la somme $\sum_{i=1}^{2m+1}|x_{m+1} - x_i|$ est, d'après le théorème de caractérisation de la médiane, la plus petite possible au sens que l'on a indiqué. On voit ici que, si l'écart médian est « petit », c'est-à-dire ***si la dispersion est, en un sens, faible***, la moyenne arithmétique est une bonne approximation de la médiane. Ainsi en va-t-il par exemple de la série suivante :

1,91 ; 1,92 ; 1,93 ; 1,96 ; 2 ; 2,04 ; 2,10 ; 2,13 ; 2,16

On a $2m + 1 = 9$, $e_{Me} = 0{,}71$ et donc $|Me - \overline{x}| \leq \frac{0{,}71}{9} \leq 0{,}08$.

❷ Plus précisément, on a : $Me - \overline{x} = \frac{1}{2m+1}\left(\sum_{i=1}^{m}(x_{m+1} - x_i) - \sum_{i=m+2}^{2m+1}(x_i - x_{m+1})\right)$. L'écart $Me - \overline{x}$ est d'autant plus petit (en valeur absolue) que les sommes $\sum_{i=1}^{m}(x_{m+1} - x_i)$ et $\sum_{i=m+2}^{2m+1}(x_i - x_{m+1})$ ***sont plus proches l'une de l'autre***. Dans le cas de la série précédente, on a $\sum_{i=1}^{m}(x_{m+1} - x_i) = 0{,}28$ et $\sum_{i=m+2}^{2m+1}(x_i - x_{m+1}) = 0{,}43$ et il vient donc : $\overline{x} - Me = \frac{1}{9} \times 0{,}15 = \frac{1}{60} \leq 0{,}02$.

❸ Entre la condition suffisante déterminée par la majoration $|Me - \overline{x}| \leq e_{Me}$ et la condition nécessaire et suffisante considérée ensuite, on peut glisser une condition suffisante plus faible que la première. Pour $i = 1, \ldots, m$, posons $\delta = \max\left|x_{m+1} - \frac{x_i + x_{2m+2-i}}{2}\right|$. On a :

$$Me - \overline{x} = \frac{1}{2m+1}\left(\sum_{i=1}^{m}(x_{m+1} - x_i) - \sum_{i=m+2}^{2m+1}(x_i - x_{m+1})\right) = \frac{1}{2m+1}\left(\sum_{i=1}^{m}(x_{m+1} - x_i) - \sum_{i=1}^{m}(x_{2m+2-i} - x_{m+1})\right)$$

$$= \frac{1}{2m+1}\left(\sum_{i=1}^{m}(x_{m+1} - x_i) - (x_{2m+2-i} - x_{m+1})\right) = \frac{2}{2m+1}\sum_{i=1}^{m}(x_{m+1} - \frac{x_i + x_{2m+2-i}}{2})$$

$$\leq \frac{2}{2m+1}\sum_{i=1}^{m}\left|x_{m+1} - \frac{x_i + x_{2m+2-i}}{2}\right| \leq \frac{2m\delta}{2m+1}.$$

Dans le cas de la série prise pour exemple, on a $\delta = 0{,}035$ et donc $Me - \overline{x} \leq \frac{8 \times 0{,}035}{9} \approx 0{,}03$.

❹ On peut encore examiner le cas d'une « valeur aberrante » (en anglais, *outlier*), ξ, qui remplacerait la plus grande valeur x_{2m+1} ; on aurait alors : $Me - \overline{x} = \frac{1}{2m+1}\sum_{i=1}^{m}(x_{m+1} - x_i) - \sum_{i=m+2}^{2m+1}(x_i - x_{m+1}) - \frac{1}{2m+1}(\xi - x_{2m+1})$. Dans le cas de la série prise pour exemple, il vient ainsi : $Me - \overline{x} = \frac{1}{60} - \frac{1}{9}(\xi - 2) = \frac{43}{180} - \frac{1}{9}\xi$ ou $\overline{x} - Me = \frac{1}{9}\xi - \frac{43}{180}$. Pour $\xi = 18$, on a donc $\overline{x} - Me = 2 - \frac{43}{180} = \frac{317}{180} \geq 1{,}76$ et, ainsi, $\frac{\overline{x} - Me}{Me} = \frac{317}{360} \approx$ 88 %, ce qui ne qualifie pas $\overline{x}$ pour être une bonne valeur approchée de la médiane !

5. On voit ainsi que $\overline{x}$ est une approximation convenable de la médiane lorsque la distribution des valeurs x_i est ***peu dispersée*** (même si elle présente une certaine asymétrie), soit lorsqu'elle est ***nettement symétrique*** (et en ce cas, même si elle est fortement dispersée).

① La raison principale qui pousse à substituer la moyenne à la médiane chaque fois que c'est possible, c'est que, à plusieurs égards, le « travail » avec la moyenne et plus « facile » que celui qu'appelle la médiane.

② Le programme de 2de fournit de cela un exemple. On y lit en effet ceci :

On remarquera que la médiane d'une série ne peut se déduire de la médiane de sous-séries. Le calcul de la médiane nécessite de trier les données, ce qui pose des problèmes de nature algorithmique.

❶ Il existe bien sûr des moyens automatiques de tri : on l'a vu en ce qui concerne le tableur Excel (séance 11) ou la calculatrice TI-89 (séance 13). Notons ici comment il est possible de trier une série statistique de taille modeste à l'aide du traitement de texte (on utilise ici Windows 97) :

1° Considérons, à titre d'exemple, la série suivante, de taille 32 : 12 ; 3 ; 5 ; 17 ; 11 ; 6 ; 19 ; 13 ; 12 ; 1 ; 7 ; 12 ; 16 ; 10 ; 11 ; 13 ; 4 ; 5 ; 1 ; 19 ; 14 ; 2 ; 9 ; 11 ; 16 ; 12 ; 4 ; 2 ; 8 ; 14 ; 11 ; 3.

2° On sélectionne la série de notes, puis on clique sur **Tableau** puis sur **Convertir texte en tableau…** en saisissant 1 dans **Nombre de colonnes:** (et, par exemple, 2 dans **Largeur des colonnes:**). On obtient ainsi un tableau à une colonne et 32 lignes : 12 / 3 / 5 / …

3° On fait trier alors le tableau obtenu : pour cela, après l'avoir sélectionné, on clique sur **Tableau** puis sur **Trier** (en choisissant le type *numérique* et l'ordre *croissant*) : 1 / 1 / 2 / …

4° On fait alors numéroter les lignes du tableau. Pour cela, après avoir sélectionné le tableau, on clique sur **Format** puis sur **Puces et numéros**, et là sur **Numéros**, où l'on choisit le style illustré ci-après : 1 / 1 / 2 / … On lit alors la médiane, qui est ici égale à 11 : 9 / 10 / 11 / 11 / 11 / …

❷ Notons en passant comment il est possible de calculer la ***moyenne*** sans même exploiter le tableau obtenu précédemment, en utilisant simplement la fonction de sommation du traitement de texte. On clique sur **Tableau**, puis sur **Formule**, enfin sur **Insérer la fonction:** et on choisit alors dans le menu déroulant la fonction MOYENNE. En collant la suite

12 ; 3 ; 5 ; 17 ; 11 ; 6 ; 19 ; 13 ; 12 ; 1 ; 7 ; 12 ; 16 ; 10 ; 11 ; 13 ; 4 ; 5 ; 1 ; 19 ; 14 ; 2 ; 9 ; 11 ; 16 ; 12 ; 4 ; 2 ; 8 ; 14 ; 11 ; 3

dans les parenthèses ouvertes après MOYENNE, on obtient pour valeur de la moyenne 9,47. En opérant de même, mais avec la fonction SOMME, on obtient pour somme 303 ; on a donc $\bar{x} = \frac{303}{32} = 9{,}46875$.

③ Du point de vue de la facilité (ou de la difficulté) de calcul, on peut imaginer par exemple ceci : une population Ω est scindée en p populations deux à deux disjointes Ω_j : $\Omega = \bigcup_{1 \leq j \leq p} \Omega_i$, chacune de ces sous-populations faisant l'objet d'une enquête exhaustive à propos d'un caractère X. Pour déterminer la ***médiane*** de X sur Ω, il convient de disposer de ***toutes*** les valeurs $x(\omega)$, pour $\omega \in \Omega_j$, $1 \leq j \leq p$; tandis que, pour calculer la ***moyenne*** $\bar{x}$ de X sur Ω, il suffit de connaître la moyenne $\bar{x}_j$ de X sur Ω_j ainsi que l'effectif de Ω_j, pour $j = 1, \ldots, p$.

Le panorama un peu restreint dessiné par les questions posées est, par delà les tentations protestataires et une apparente distanciation, révélateur d'une absence réelle de connaissances chez les professeurs stagiaires au moment où ils doivent, bon gré, mal gré, s'engager dans l'enseignement de la statistique tel qu'il se propose en seconde. Dans certains cas, le questionnement est naïf, sincère et met le doigt sur des difficultés sur lesquelles on pourrait, en bonne méthode, attendre que des lauréats de concours de recrutement soient au clair. Ainsi en va-t-il par exemple des quatre questions suivantes, formulées pour la première lors de la 17e séance, pour les deux suivantes à la 19e séance et pour la dernière lors de la 20e séance, et rédigées par une même professeure stagiaire, lauréate de l'agrégation n'ayant sans doute guère eu jusqu'alors l'occasion de se pencher sur la matière sur laquelle elle s'interroge ainsi :

> Quels sont les avantages comparés des diverses représentations qu'on peut faire d'une même série statistique ? Pourquoi choisir un type de représentation plutôt qu'un autre ? Par exemple, si on étudie une série statistique groupée en classes, est-il préférable de la représenter à l'aide d'un histogramme ou à l'aide d'une courbe ? Quand est-il avantageux d'utiliser un diagramme circulaire ?

Dans quelles circonstances est-il intéressant de savoir calculer la moyenne d'une série à partir de la distribution des fréquences ? Généralement, ne dispose-t-on pas des effectifs avant de calculer les fréquences ?

En consultant le document d'accompagnement du programme de 2de ainsi que différents manuels, j'ai trouvé deux exemples d'application de la linéarité de la moyenne : calcul mental d'une moyenne ; calcul de la moyenne d'une série de nombres décimaux comportant de nombreuses décimales et dont seules les dernières décimales diffèrent. Existe-t-il d'autres applications ? Lesquelles ?

Lors de l'étude des propriétés de la moyenne j'ai introduit – comme le suggère le programme – la notation $\sum$. J'ai expliqué à mes élèves la signification de cette notation sans pour autant exiger d'eux qu'ils sachent l'utiliser. Un élève m'a demandé pourquoi on utilise une lettre grecque au lieu de la lettre S. Je lui ai répondu, un peu prise de court, que c'est la notation utilisée par tous les mathématiciens. Ma question est la suivante :pourquoi l'usage est-il aussi répandu en mathématiques ? Depuis quand utilise-t-on ces notations ? L'usage des notations telles que « la droite Δ », « l'angle α » date-t-il de la Grèce antique ?

La deuxième de ces questions illustre de manière particulièrement claire l'absence d'expérience et de réflexion sur des sujets très élémentaires de statistique : l'auteure ne semble pas imaginer que, en certains cas, on ne dispose pas des effectifs n_i mais seulement des fréquences f_i, les effectifs n_i ayant permis de calculer ces fréquences étant – pour une raison ou une autre – non disponibles. Dans cette même perspective, notons encore la question suivante, posée lors de la 21e séance, émanant d'un professeur stagiaire dont l'état d'esprit semble proche de celui de l'auteure des quatre questions que l'on vient de mentionner :

La notion de médiane pour les séries statistiques rangées par classes est-elle utile en 2de, ou bien suffit-il de définir la classe médiane ? Dans cette optique, peut-on se servir du polygone des effectifs cumulés pour calculer la médiane ?

En ce cas, la réponse apportée par la formation semble ne pas pouvoir dépasser beaucoup le niveau d'un simple viatique. Dans le séminaire de l'année 2004-2005, au reste, la question précédente – très voisine de celle mentionnée plus haut portant sur la moyenne de données groupées – ne sera pas travaillée. La question concernant la linéarité de la moyenne apparaît également comme une difficulté classique pour les professeurs en formation. De fait, la liste des « mystères » que rencontrent ces nouveaux professeurs de mathématiques comporte bien d'autres imprévus. Ainsi en va-t-il avec l'interrogation suivante, qui semble surgir presque inopinément :

> En statistique, lorsqu'on étudie les séries statistiques continues, on a toujours (dans les livres) des séries où les caractères prennent leurs valeurs dans des intervalles où la borne inférieure d'un intervalle est égale à la borne supérieure de l'intervalle précédent (exemple : [20 ; 30[, [30 ; 40[, [40 ; 50[. Peut-il y avoir des séries continues où la borne inférieure d'un intervalle n'est pas la borne supérieure de l'intervalle précédent ([20 ; 30[, [40 ; 50[) ou est-ce exclu par définition ?

En règle générale, la formation dans le cadre de la deuxième année d'IUFM semble, s'agissant de statistique, devoir ainsi parer au plus pressé, même si, comme on l'a vu, l'ambition d'accéder à des points de vue plus relevés, jugée indispensable par les formateurs, n'est en rien écartée. Mais dans le domaine statistique sans doute plus qu'ailleurs, les conditions et contraintes de l'enseignement qui sera donné par les jeunes professeurs stagiaires ne se limitent pas à celles mises progressivement et difficilement en place par la formation prodiguée à l'IUFM. Car les conditions et contraintes créées par la fréquentation des manuels vont fortement imposer leur perspective – qui équivaudra souvent, quoique non toujours, à un écrasement de la perspective.

Chapitre 6

Avant la classe : la leçon des manuels

1. Les types de tâches de la statistique

L'une des questions posées lors de la 11^{e} séance du séminaire 2004-2005 est rédigée ainsi :

> Le prochain chapitre que je vais aborder avec mes élèves est « Les statistiques ». Dans ce chapitre deux thèmes apparaissent : « les outils pour analyser une série statistique » et « la simulation ». Je me suis demandé s'il fallait traiter ces deux thèmes en un seul chapitre ou positionner un ou plusieurs chapitres entre les deux.

La question est en fait délicate. À suivre la structuration adoptée par le texte du programme, on peut considérer que le domaine statistique comporte en seconde deux grands secteurs : celui, traditionnel, de la description statistique, et un secteur nouveau, comportant deux thèmes distincts mais présentés comme solidaires, fluctuation d'échantillonnage et simulation. S'il faut donc adopter un ordre dans l'abord des différents thèmes et si l'on peut ainsi envisager de faire correspondre aux deux secteurs évoqués deux « chapitres » distincts de son cours – pour employer ici un langage familier aux professeurs –, il n'en reste pas moins qu'existent, entre les deux secteurs et, au sein de ceux-ci, entre les thèmes qui les composent, des solidarités structurelles et surtout fonctionnelles dont la rupture équivaudrait à une perte de signification et d'authenticité dans l'étude de la statistique. L'intercalation d'autres « chapitres » du cours du professeur entre l'étude de ces deux secteurs de la statistique participe d'une organisation didactique globale qui ne devrait pas pour autant entraîner, dans l'organisation mathématique relative à la statistique, l'apparition de composantes séparées ou dont les liens n'apparaîtraient pas nettement. Cela noté, quel secours les professeurs trouvent-ils dans les manuels en usage ? Nous examinerons cette question, ici, à propos de deux manuels – choisis parmi les dix ouvrages disponibles sur le marché à la rentrée 2000 – dont le mérite principal, à nos yeux, est d'être les plus fréquemment adoptés dans les classes de seconde des professeurs dont nous aurons à examiner l'enseignement dans la suite de ce travail. Le premier manuel est celui de la collection *Déclic* chez Hachette Éducation ; le second est le manuel de la collection *Hyperbole* publié chez Nathan. Ces deux manuels donnent à la question posée plus haut deux réponses différentes : le premier ne comporte qu'un chapitre consacré à la statistique, le chapitre 7, qui, formellement, court de la page 170 à la page 196, soit sur 27 pages, à quoi il faut ajouter une page consacrée aux TEL de statistique [1] ; le second, en revanche, consacre à la statistique ses deux chapitres initiaux : le premier, intitulé « Résumé numérique d'une série statistique », court de la page 8 à la page 27, soit sur 20 pages ; le deuxième, intitulé « Échantillonnage – simulation », se déroule de la page 28 à la page 45, soit sur 18 pages [2]. On peut voir ici un effet mécanique de la décision de scinder en deux chapitres le travail sur la statistique : de même que davantage de pages sont consacrées à cette matière dans le manuel Hyperbole – qui alloue à la statistique environ 36 % de plus de surface imprimée que le manuel Déclic –, de même la bipartition temporelle de l'enseignement entraîne automatiquement une augmentation du temps d'horloge utilisé – ce qui ne saurait être pertinent que si ce supplément de temps est transformé en temps didactique efficace en termes d'apprentissage.

Mais que sont, plus généralement, les conditions et contraintes dans lesquelles entre l'enseignant qui prend appui sur les manuels examinés ici ? Et, plus précisément, quels effets, quant à la formation à la statistique et à l'enseignement de la statistique, peut induire la fréquentation de ces manuels par de jeunes professeurs, dont nous avons vu qu'ils sont largement démunis devant un grand nombre d'analyses à faire et de décisions à prendre ? Notons tout d'abord que le manuel Déclic semble sous-évaluer quelque peu la place à donner à la statistique : les 28 pages qu'il y consacre ne représente qu'environ 8 % de la surface imprimée totale, alors que, selon les prescriptions officielles, l'enseignement de la statistique devrait occuper 1/8 du temps d'étude, soit 12,5 % du temps total [3]. Un examen rapide des différents types de contenus proposés confirme cette première appréciation : le manuel

[1] Le programme indique à cet égard : « … un ensemble de thèmes d'études est proposé, dans lequel l'enseignant pourra puiser au gré du questionnement et des motivations de ses élèves ; ces thèmes, entourant le contenu du chapitre, permettent de faire vivre l'enseignement au-delà de l'évaluation sur les capacités attendues et de prendre en compte dans une certaine mesure l'hétérogénéité des classes. L'enseignant a toute liberté pour choisir les thèmes au-delà de ces propositions. » Pour le « chapitre » de statistique, les TEL proposés sont les suivants : simulations d'un sondage ; simulations de jeux de pile ou face ; simulations du lancer de deux dés identiques et distribution de la somme des faces ; simulations de promenades aléatoires sur des solides ou des lignes polygonales ; simulations de naissances.

[2] Cet ouvrage ne comporte pas de développements séparés consacrés aux TEL.

[3] Bien entendu, la mise en relation de la surface imprimée et du temps d'étude ne saurait être qu'indicative.

Hyperbole offre 6 exercices résolus (dans une rubrique intitulée « Les méthodes »), 13 activités, 96 exercices (dont 24 sont corrigés), tandis que le manuel Déclic ne compte que 11 travaux dirigés, 2 activités, 42 exercices (dont 8 sont corrigés), à quoi s'ajoutent deux thèmes d'étude d'une demi-page chacun. Bien entendu la relative retenue du manuel Déclic n'en fait pas pour autant un lieu vide du point de vue de la formation de ses utilisateurs !

Pour aller plus avant dans cette exploration, nous tirerons d'abord le fil du répertoire des *types de tâches* présents dans l'un et l'autre manuel. On peut, dans ce but, distinguer cinq thèmes, numérotés ici de 0 à 4. Le thème 0 rassemble l'ensemble des types de tâches déjà travaillés au collège et qui, au moins une fois dans les manuels examinés, ne sont pas appelés de manière explicite par la réalisation d'un type de tâches plus propre au programme de seconde [4]. Un premier grand type de tâches, est celui du calcul d'effectifs et/ou de fréquences ; dans le corpus étudié, il s'actualise en quelque six sous-types que l'on peut expliciter ainsi [5] :

T_1^0. Calculer les effectifs des différentes valeurs d'une série (x_i) à partir des données brutes.

T_2^0. Calculer un effectif connaissant la fréquence associée et l'effectif total.

T_3^0. Calculer l'effectif total de la série connaissant l'effectif et la fréquence associés à une valeur.

T_4^0. Calculer les fréquences des modalités d'une série statistique $(x_i ; n_i)$ ou $(C_i ; n_i)$.

T_5^0. Calculer les fréquences des modalités d'une série statistique à partir de sa représentation par un diagramme circulaire.

T_6^0. Calculer la fréquence d'une valeur connaissant les fréquences de toutes les autres.

L'ensemble des types de tâches précédents s'inscrit *grosso modo* dans le programme de la classe de cinquième ; par contraste, les types de tâches ci-après, qui se réfèrent tous à la manipulation d'effectifs et de fréquences *cumulés*, n'apparaissent vraiment qu'en classe de quatrième [6] :

T_7^0. Calculer les effectifs cumulés croissants (resp. décroissants) d'une série statistique $(x_i ; n_i)$ ou $(C_i ; n_i)$.

T_8^0. Calculer les fréquences à partir des effectifs cumulés croissants d'une série $(x_i ; e_i)$.

---

[4]Ainsi le type de tâches « dresser un tableau d'effectifs à partir du recueil des données brutes » n'est pas répertorié ici : présent dans de nombreux exercices proposés par les deux manuels, il y apparaît dans des exercices mettant tous en œuvre des types de tâches qui relèvent *stricto sensu* du programme de la classe de seconde.

[5] Dans ce qui suit, on désigne par C_i ce que les programmes du collège nomment une « classe d'intervalles », c'est-à-dire un intervalle de $\mathbb{R}$.

[6] Dans ce qui suit, e_i désigne l'effectif cumulé associé à x_i ou C_i tandis que f_i désigne la fréquence non cumulée.

T_9^0. Calculer les fréquences cumulées croissantes (resp. décroissantes) d'une série statistique (x_i ; f_i) ou (C_i ; f_i) [resp. (x_i ; n_i) ou (C_i ; n_i)].

Très classiquement, on rencontre bien sûr le calcul de la moyenne d'une série statistique :

T_{10}^0. Calculer la moyenne d'une série statistique (x_i ; n_i).

T_{11}^0. Calculer une valeur approchée de la moyenne d'une série statistique (C_i ; n_i).

Si le calcul de la moyenne relève du programme de quatrième, le type de tâches suivant, plus complexe, appartient plutôt aux acquis de la classe de troisième :

T_{12}^0. Calculer l'effectif n_k d'une modalité x_k d'une série (x_i ; n_i) connaissant le tableau des effectifs des autres modalités et la moyenne $\overline{x}$ de la série.

Un ensemble de types de tâches est voué à ce « grand » type de tâches qu'est le calcul d'une médiane ; l'ensemble relève du programme de troisième :

T_{13}^0. Déterminer la médiane d'une série statistique (x_i) dont les données (brutes) ne sont pas ordonnées.

T_{14}^0. Déterminer la médiane d'une série statistique ordonnée (x_i)

T_{15}^0. Déterminer la médiane d'une série statistique (x_i ; n_i) ou (x_i ; f_i).

T_{16}^0. Calculer une valeur approchée de la médiane d'une série statistique (C_i ; n_i) ou (C_i ; f_i).

T_{17}^0. Déterminer la classe médiane d'une série statistique (C_i ; n_i).

Enfin, le calcul de l'étendue d'une série se concrétise en les deux types de tâches suivants :

T_{18}^0. Calculer l'étendue d'une série statistique (x_i ; n_i) ou (x_i ; f_i).

T_{19}^0. Calculer l'étendue d'une série statistique (C_i ; n_i).

Quels effets peut avoir un tel « tableau » de types de tâches sur l'enseignement que les manuels utilisés pourraient inspirer au moins en partie ? D'un côté, on peut imaginer que le choix en acte des manuels vise à articuler l'enseignement de la statistique en seconde à l'enseignement reçu dans les classes précédentes. N'oublions pas, cependant, que les types de tâches que nous venons de mentionner n'apparaissent pas comme instrumentaux pour des types de tâches nouveaux, mais bien comme des types de tâches qui auraient une valeur en eux-mêmes : il y aurait donc ainsi simple révision, sans véritable progression. D'un autre côté, donc, une telle situation peut induire des professeurs débutants – la chose est moins vraie, nous le verrons, pour des professeurs aguerris – à travailler sur du temps didactique déjà produit dans les classes antérieures, au détriment du temps didactique à produire en classe de seconde. À cet égard, l'examen des deux manuels fait apparaître une différence que l'on n'avait pas anticipée jusqu'ici. Le manuel Hyperbole, plus généreux en surface imprimée, propose 70 tâches, sur les 126 relevant du thème 0, qui sont indépendantes des contextes d'étude propres à la classe de seconde, tandis que, pour le manuel Déclic, ces chiffres sont respectivement 26 et 71 : le pourcentage diminue de presque 20 points, passant de 56 % à 37 % environ. Par ailleurs, les tâches relevant du thème 0 proposées par le manuel Hyperbole, au nombre de 126, on l'a dit, représentent presque 57 % des 222 tâches qui, dans ce manuel, sont proposées pour l'ensemble de la statistique ; pour le manuel Déclic la proportion est voisine : 71 tâches relevant du thème 0 pour 129 tâches au total, soit 55 % environ. Par delà la différence des surfaces allouées à la statistique, le manuel Hyperbole se distingue – négativement – du manuel Déclic par le fait de proposer à son utilisateur des exercices non reliés de façon explicite à l'activité statistique qui doit impérativement devenir celle d'élèves de seconde. Soulignons encore, pour l'un et l'autre manuel, que les tâches relevant de ce thème 0, et donc relevant essentiellement du passé, constituent la majorité des tâches proposées : aucun des autres thèmes que nous allons examiner maintenant ne se compare au thème 0 du point de vue de la profusion des tâches proposées dans les manuels examinés.

Le thème 1 est celui des résumés chiffrés d'une série statistique : c'est à la fois un thème non entièrement neuf et un thème clairement inscrit au programme de seconde, qui impose tout de même quelques nouveautés saillantes. Le premier type de tâches que l'on rencontre dans les manuels examinés se décline en deux sous-types et est relatif au calcul du *mode* d'une série statistique :

T^1_1. Déterminer le mode d'une série (x_i ; n_i).

T^1_2. Déterminer la classe modale d'une série (C_i ; n_i).

Le sujet classique du calcul de la moyenne d'une série statistique est partiellement renouvelé en seconde par l'adjonction des propriétés dites de *linéarité de la moyenne*, qui donnent lieu d'abord aux deux types de tâches suivants [7] :

T^1_3. Calculer (mentalement) la moyenne de la série $x' = (x'_i ; n_i)$, respectivement $(C'_i ; n_i)$, telle que $x' = ax + b$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $x = (x_i ; n_i)$, resp. $(C_i ; n_i)$, est une série statistique de moyenne $\overline{x}$.

T^1_4. Calculer (mentalement) la moyenne d'une série (x_i ; n_i) en utilisant les propriétés de linéarité de la moyenne.

La technologie de la linéarité engendre aussi des types de tâches neufs :

T^1_5. Calculer la valeur à ajouter (ou soustraire) aux variables x_i pour que la moyenne $\overline{x}$ de la série (x_i ; n_i) augmente (ou diminue) de b.

[7] Le second type de problèmes diffère du premier en ceci que la transformation affine à mettre en œuvre n'y est pas donnée.

T^1_6. Calculer le pourcentage à appliquer aux variables x_i pour que la moyenne $\overline{x}$ de la série (x_i ; n_i) augmente (ou diminue) de b.

On trouve aussi une tâche relevant du type suivant :

T^1_7. Calculer la moyenne $\overline{x}$' d'une série (x'_i ; n_i), partagée en k sous-groupes $S_k = (x'_{ik}$; $n_i)$ tels que $x'_{ik} = x_i + b_k$ connaissant la moyenne $\overline{x}$ de la série (x_i ; n_i).

C'est ici le lieu de souligner que la grande majorité des types de tâches qui apparaissent dans l'un au moins des deux manuels examinés n'y apparaissent que par de rares, voire de *très rares spécimens*. Dans les types de tâches déjà mentionnés relatifs au thème 1, les types T^1_5 et T^1_6, par exemple, ne sont présents qu'à travers *un* spécimen, et cela encore dans le seul manuel Hyperbole ! Quant à T^1_7, il est, de même, représenté par un unique spécimen du manuel Déclic. Le tableau ci-après donne une image d'ensemble des différents types de tâches sur l'ensemble des thèmes que nous avons commencé d'examiner [8].

Thème 0		Thème 1		Thème 2		Thème 3		Thème 4	
Hyperbole	*Déclic*	*Hyper.*	*Déclic*	*Hyper.*	*Déclic*	*Hyper.*	*Déclic*	*Hyper.*	*Déclic*
T^0_1. 1 (3)	T^0_1. 2 (2)		T^1_1. 1	T^2_1. 13		T^3_1. 2	T^3_1. 4		T^4_1. 3
T^0_2. 2 (2)		T^1_2. 8	T^1_2. 3		T^2_2. 1	T^3_2. 14	T^3_2. 9		T^4_2. 1
T^0_3. 1 (1)		T^1_3. 10	T^1_3. 2	T^2_3. 11	T^2_3. 9	T^3_3. 14	T^3_3. 1		T^4_3. 1
T^0_4. 4 (9)	T^0_4. 2 (13)	T^1_4. 1	T^1_4. 2			T^3_4. 5	T^3_4. 2	T^4_4. 1	
	T^0_5. 1 (1)	T^1_5. 1					T^3_5. 4		
T^0_6. 1 (1)		T^1_6. 1							
T^0_7. 5 (6)	T^0_7. (2)		T^1_7. 1						
T^0_8. 1 (1)		T^1_8. 9	T^1_8. 7						
T^0_9. 5 (9)	T^0_9. 3 (5)	T^1_9. 1							
T^0_{10}. 17 (40)	T^0_{10}. 7 (16)	T^1_{10}. 1	T^1_{10}. 3						
T^0_{11}. 5 (14)	T^0_{11}. 4 (8)		T^1_{11}. 3						
T^0_{12}. 1 (1)		T^1_{12}. 1							
T^0_{13}. 4 (4)		T^1_{13}. 2	T^1_{13}. 1						
T^0_{14}. 4 (4)		T^1_{14}. 2							

[8] S'agissant des types de tâches du thème 0, on a indiqué d'abord le nombre de spécimens apparaissant dans des exercices où ils ne sont pas appelés par un type de tâches relevant strictement du programme de seconde, puis, entre parenthèses, le nombre total de spécimens correspondants.

T^0_{15}. 7 (12) T^0_{17}. 3 (7) T^0_{18}. 8 (9) T^0_{19}. 1 (3)	T^0_{15}. 1 (5) T^0_{16}. 2 (4) T^0_{17}. (1) T^0_{18}. 3 (11) T^0_{19}. 1 (3)								
Total 70 31,5 % (126) (56,8 %)	Total 26 20,15 % (71) (55 %)	Total 37 16,7 %	Total 23 17,8 %	Total 24 10,8 %	Total 10 7,8 %	Total 34 15,3 %	Total 20 15,6 %	Total 1 0,45 %	Total 5 3,9 %

À considérer les deux colonnes relatives au thème 1, on s'aperçoit que, lorsque le type de tâches considéré n'est pas quasi absent des deux manuels, son traitement y est contrasté. Ainsi le type T^1_3 fait-il l'objet de 10 spécimens dans le manuel Hyperbole mais de 2 seulement dans le manuel Déclic. Les accords sont relativement rares. Ainsi en va-t-il cependant, pour le thème 1, d'un type de tâches non encore mentionné, représenté par 9 spécimens dans l'un des manuels, par 7 dans l'autre :

T^1_8. Calculer la moyenne d'une série (x_i ; n_i) obtenue en groupant des séries S_k d'effectif N_k et de moyenne $\overline{x_k}$.

Par contraste, les deux types de tâches suivants sont faiblement et, si l'on peut dire, inégalement représentés [9] :

T^1_9. Calculer une valeur approchée de la moyenne d'une série (C_i ; n_i) obtenue en groupant des séries S_k = (C_{ki} ; n_{ki}) d'effectif N_k et de moyenne $\overline{x_k}$.

T^1_{10}. Calculer la moyenne $\overline{x_1}$ du sous-groupe S_1 d'effectif N_1 d'une série d'effectif N pour que sa moyenne soit une valeur donnée $\overline{x}$, connaissant la moyenne $\overline{x_2}$ de l'autre sous-groupe de la série.

La « loi » qui semble ici s'imposer est la suivante : lorsqu'un type de tâches est nettement explicité dans le texte du programme, notamment dans la rubrique des capacités attendues, il fait l'objet d'une attention quantitativement soutenue, tandis que les types de tâches en quelque sorte dérivés sont représentés d'une manière relativement erratique. Derrière ce

[9] Dans le second type de tâches, si N_1 = 1 alors il s'agit de calculer la valeur de la modalité $\tilde{x}$ pour qu'une série ait une moyenne $\overline{x}$' donnée, connaissant la moyenne $\overline{x}$ et l'effectif N de cette série avant l'ajout de cette modalité. (C'est ce type de tâches qui est réalisé lorsqu'on doit chercher, par exemple, la valeur que doit prendre une note pour qu'une moyenne trimestrielle, calculée par exemple sur 5 devoirs, passe de 9 à 10.)

contraste, on peut évidemment apercevoir un manque commun, qui s'impose d'abord à propos des types de tâches les plus faiblement représentés : souvent aucune motivation n'en est donnée, hormis une motivation formelle, telle celle qui permettrait d'engendrer T_{10}^{1} à partir de T_{8}^{1} par exemple. Quant aux types de tâches poussés en avant de manière explicite par le programme, cette accréditation semble suffire pour les faire exister, sans considération de leur place dans le domaine statistique.

Le tableau reproduit ci-dessus fait encore apparaître d'autres types de tâches, dont l'importance quantitative est des plus faibles, et qui se situent dans la ligne du travail sur une série statistique lorsqu'on connaît les résumés statistiques correspondant à des sous-séries réalisant une partition de la série :

T_{11}^{1}. Calculer la fréquence d'une modalité d'un caractère dans une population à partir des fréquences de cette modalité dans les sous-populations.

T_{12}^{1}. Calculer un pourcentage total à partir des pourcentages de sous-groupes d'effectifs connus.

Les colonnes du tableau relatives au thème 1 recensent encore deux autres types de tâches :

T_{13}^{1}. Choisir l'indicateur de tendance centrale qui résume le mieux une série statistique donnée.

T_{14}^{1}. Situer moyenne et médiane l'une par rapport à l'autre à partir d'une représentation graphique d'une série statistique donnée.

Le nombre de spécimens est évidemment faible, mais l'épisode déjà commenté relatif à l'interprétation de l'écart entre moyenne et médiane en termes de dispersion tend à montrer que rien, dans ce que propose un manuel, ne peut être considéré *a priori* comme dépourvu d'effets sensibles sur le comportement des professeurs ! Sans doute serait-il plus juste, en nombre de cas, de considérer qu'un *unique* spécimen, une seule tâche particulière d'un type de tâches donné *peut* prendre, pour le professeur utilisateur du manuel, la valeur d'un spécimen *générique*, représentatif de tout un type, sur lequel pourra s'appuyer un travail effectif dans la classe, même s'il n'alimente pas à tout coup une technologie « folklorique » dans la culture des professeurs concernés. Cette observation, qui peut s'avérer cruciale, ne doit pas masquer cependant un autre phénomène : tel qu'on peut le saisir dans cette première génération de manuels, le corpus enseigné n'est dessiné que de manière bien floue, et apparaît non stabilisé, situation susceptible d'engendrer chez les professeurs tout à la fois une réelle inquiétude et un sentiment de liberté un peu illusoire et qui rend *a priori* difficile de prévoir quel enseignement, à la longue, en sortira. Mais revenons ici au tableau déjà consulté. On y voit recensé un « thème 2 » dont il apparaît tout de suite qu'il ne fait se rencontrer les deux manuels examinés que sur *un* type de tâches, T_{3}^{2}. Le type T_{1}^{2} est tout simplement le suivant :

T_1^2. Calculer la moyenne d'une série statistique (x_i ; f_i).

Un tel calcul, qui met en œuvre la formule $\bar{x} = \sum_i f_i x_i$, ne se rencontre pas dans le manuel Déclic, lequel lui préfère, si l'on peut dire, le type de tâches suivant :

T_2^2. Calculer la moyenne d'une série statistique (C_i ; f_i).

Qui a raison, qui a tort ? L'examen du programme ne permet pas de trancher. Dans la rubrique des « capacités attendues », celui-ci en effet indique sobrement un type de tâches formulé ainsi : « calcul de la moyenne à partir de la distribution des fréquences ». On a là un cas typique d'une divergence rendue possible par une explicitation insuffisante des textes et l'absence simultanée d'une tradition d'enseignement qui fixerait à chacun des deux types de tâches envisageables sa place relative dans le *cursus studiorum*. Cette hypothèse interprétative est renforcée lorsqu'on découvre le type de tâches T_3^2 sur lequel les deux manuels s'accordent :

T_3^2. Calculer la fréquence d'un événement E.

Ce type de tâches, en effet, n'est pas exactement nouveau : dès la classe de cinquième, les élèves ont calculé la fréquence de modalités déterminées d'un caractère, exercice repris, dans les manuels examinés ici, à travers le type de tâches T_4^0 recensé plus haut ; dès la classe de quatrième, ils ont déterminé la fréquence d'événements E correspondant à ce qu'il est usuel d'appeler des fréquences *cumulées* (croissantes, beaucoup plus rarement décroissantes), activité subsumée, dans ce qui précède, sous les types de tâches T_8^0 et T_9^0. Le programme de seconde ne fait donc qu'augmenter l'ensemble des événements dont on devra établir la fréquence [10]. Notons ici, pour conforter le sentiment d'une convergence des deux manuels autour du type de tâches T_3^2, que, sur les types de tâches T_4^0, T_8^0 et T_9^0, ils ne sont pas fort éloignés l'un de l'autre au plan quantitatif, comme le montre le tableau des types de tâches.

Le thème 3 a trait à une innovation remarquée du programme de seconde en vigueur à la rentrée 2000. La rubrique des capacités attendues enjoint en effet aux professeurs de

[10] La rubrique « Contenus » de ce programme prescrit la « définition de la distribution des fréquences d'une série prenant un petit nombre de valeurs et de la fréquence d'un événement ». On voit ainsi que ce qu'on doit regarder comme un événement n'est pas complètement explicite. On lit par ailleurs dans le document d'accompagnement du programme : « … on n'hésitera pas à parler de la fréquence d'un événement ("le nombre observé est pair", "le nombre est un multiple de trois", etc.) sans pour autant définir formellement ce qu'est un événement, ni donner de formules permettant le calcul automatique de la fréquence de la réunion ou de l'intersection de deux événements. »

mathématiques de faire que les élèves deviennent capables de « concevoir et mettre en œuvre des simulations simples à partir d'échantillons de chiffres au hasard ». Ce thème est évidemment incontournable. Les textes officiels lui consacrent des développements notables et les deux manuels examinés ne sont pas globalement en désaccord à son endroit puisqu'ils lui associent l'un comme l'autre un peu plus de 15 % des tâches proposées en matière de statistique : le traitement du thème 3 se rapproche ainsi, au plan quantitatif, de celui accordé au thème 1. L'examen des types de tâches en lesquels se concrétisent le travail sur ce thème 3 montre en revanche un accord plus relatif entre les deux ouvrages. Le premier type de tâches recensé dans le tableau présenté plus haut est simplement celui-ci :

> T_1^3. Simuler une liste de chiffres au hasard.

Les effectifs apparaissant dans le tableau se réfèrent, en ce cas, aux tâches du type qui apparaissent hors d'une visée immédiate de simulation, ce qui explique sans doute la faiblesse de ces effectifs. Le deuxième type de tâches, T_2^3, fait entrer dans le vif du sujet :

> T_2^3. Simuler p réalisations (successives et indépendantes) d'une expérience aléatoire à n issues équiprobables.

Dans ce cas, le nombre de tâches proposées augmente, et les manuels ne divergent guère [11]. Une divergence apparaît toutefois sur le troisième type de tâches recensé dans le tableau :

> T_3^3. Simuler p réalisations (successives et indépendantes) d'une expérience aléatoire consistant en la réalisation de k expériences aléatoires identiques à n issues équiprobables.

Alors que la simulation de 10 lancers d'une pièce équilibrée relève de T_2^3, la simulation de trois lancers de cinq pièces équilibrées relève de T_3^3. Ici, comme le montre le tableau, les choix effectués par les auteurs des deux manuels sont fortement contrastés : l'inexistence d'une tradition d'enseignement est patente. La situation est un peu différente avec le type de tâches suivant :

> T_4^3. Simuler p réalisations (successives et indépendantes) d'une expérience aléatoire à n issues non équiprobables.

Les quelques tâches proposées par chacun des deux manuels font référence à une distribution de probabilités des plus simples : il s'agira par exemple de simuler 10 réalisations d'un tirage au hasard dans une urne contenant 60 boules blanches, 20 boules rouges et 30 boules noires,

[11] On pourra observer que la proportion est en fait un peu plus faible dans le manuel Hyperbole (14 tâches sur 222, soit environ 6,3 %) que dans le manuel Déclic (9 sur 129, soit environ 7 %).

ou encore de simuler le jet d'une pièce mal équilibrée dont le côté pile sort deux fois plus souvent que le côté face. On est là, en vérité, à la limite de ce que le programme enjoint d'étudier, comme le souligne cette indication insérée dans le document d'accompagnement du programme :

> On se contentera de simuler des situations très simples, reposant le plus souvent sur la simulation d'expériences de référence où toutes les issues ont des chances égales d'apparaître.

Le dernier type de tâches relevant du thème 3 s'appuie sur les capacités attendues précédemment évoquées jusqu'ici.

> T_5^3. Comparer les fréquences d'un événement E dans plusieurs séries statistiques obtenues par simulation.

En principe, on a là un type de tâches qui répond à l'étude, centrale dans le programme de statistique de la classe de seconde, des phénomènes de *fluctuation d'échantillonnage*. Le document d'accompagnement indique à ce propos que l'abord de « la notion de fluctuation d'échantillonnage se fera en premier lieu dans des cas simples (lancers de dés, de pièces), où la notion d'expériences identiques et indépendantes est intuitive et ne pose pas de problème », avant de conclure en des termes qui ne laissent pas place au doute : « L'étude de ces expériences de référence sera ainsi à la base de la formation sur l'aléatoire des élèves. » Il est alors curieux de constater que le nombre de tâches du type T_5^3 explicitement proposées pour alimenter le travail sur la notion de fluctuation d'échantillonnage est fort petit, et même nul dans le manuel de la collection Hyperbole. Il semble, et en vérité la chose n'est pas bien mystérieuse, que les manuels examinés en soient restés, sur cette question, à un constat sans paroles – et sans conséquences – quant à la variabilité des phénomènes étudiés. La variabilité se voit, s'observe même – pour mieux être vue. On en prend acte sans doute, parce qu'elle est *là*. Mais on n'en fait rien, et on ne fait rien à son propos.

Le tableau que nous avons présenté fait place à un quatrième thème, dont la légitimité, au regard du programme, n'est pas éclatante. En fait, ce « thème » est artificiellement composé de deux sous-thèmes dont chacun se rencontre dans un et un seul des deux manuels. En chaque cas, il semble qu'il s'agisse d'une sorte de licence que s'accordent les auteurs, en incluant un développement que le programme n'appelle pas. Les types de tâches présents dans le manuel Déclic sont les suivant :

> T_1^4. Calculer la variation relative (en pourcentage) d'une grandeur entre deux instants ou l'écart relatif (en pourcentage) entre deux mesures d'une grandeur.
>
> T_2^4. Calculer la variation absolue d'une grandeur entre deux instants.

T_3^4. Calculer le coefficient multiplicateur d'une grandeur entre deux instants.

L'inspiration paraît claire : il s'agit-là de notions cardinales dans le programme de mathématiques de la première ES [12]. Le motif de leur inclusion dans un manuel de seconde est moins clair. S'agit-il d'anticiper, au risque de donner l'impression que la statistique est promise à devenir à brève échéance un savoir « spécial » ? S'agit-il, plus simplement, d'étoffer une partie un peu moins nourrie de l'ouvrage ? Certains indicateurs, on l'a dit, montrent que ce manuel est, en règle générale, moins porté à revenir sur le temps didactique passé. Mais il y a ici, en sens inverse, une anticipation d'un temps didactique à venir qui ne s'accorde pas nettement avec un programme dont les auteurs, loin d'ignorer la question des variations absolues et relatives, l'ont fait figurer parmi les TEL – facultatifs – relatifs au domaine des *fonctions* (et non pas en relation avec le domaine statistique), avec l'intitulé très explicite suivant :

Croissance et fonction du temps. Suites de données annuelles : mesure absolue $f(t+1) - f(t)$ et mesure relative (coefficient multiplicateur) $\frac{f(t+1)}{f(t)}$. On observera que l'évolution relative n'est pas visible sur un graphique à graduation régulière.

Que le programme propose d'étudier ces questions en seconde pour prolonger l'étude des fonctions confortent – sans la prouver – l'idée que les auteurs du manuel ont eu la tentation de rattacher la statistique à certaines questions davantage liées à une filière de formation qu'à la statistique elle-même. L'attitude des auteurs du manuel de la collection Hyperbole est, à cet égard, un rien différente puisque le type de tâches dont ils se font subrepticement les propagandistes est le suivant :

T_4^4. Calculer l'écart moyen d'une série statistique.

Ce type de tâches n'est certes représenté que par *une* tâche. Ici, on ne résiste pas à la tentation d'outrepasser l'injonction du programme selon laquelle, en matière de mesure de dispersion, « on se restreindra en classe de seconde à l'étendue ». Chose exceptionnelle, les auteurs font suivre l'énoncé de l'exercice où apparaît la tâche incriminée d'un encadré bordé de rouge, intitulé *INFO*, où ils précisent ceci :

$\bar{y}$ moyenne des écarts absolus à $\bar{x}$ s'appelle l'écart moyen, c'est une mesure de dispersion.

Il ne s'agit-là, certes, que d'un détail véniel, mais qui peut induire un professeur débutant – parce qu'on lui propose un type de tâches calculatoire, donc facile à négocier avec les élèves –

[12] On saluera en passant l'ambition et la qualité du manuel de la collection Déclic pour cette classe.

à oublier la dynamique fondamentale que le programme pousse en avant, au profit d'une arithmétique certes conviviale mais où le temps didactique patine.

2. Études statistiques : des questions introuvables

L'inventaire précédent a l'avantage d'en venir au fait, c'est-à-dire aux tâches dont l'exécution sera éventuellement demandée aux élèves. Mais il ne montre guère ce qui motiverait l'exécution de telles tâches en leur donnant une *fonctionnalité* ou, comme on dit, un *sens*. Il apparaît donc indispensable de questionner les manuels examinés sur les raisons d'être et les motivations du matériel didactico-statistique qu'ils proposent. Expliquent-ils par exemple – ne serait-ce que par un petit discours liminaire, si formel soit-il – ce qu'est ou prétend être la statistique, ou du moins ce qu'elle sera ou pourra être, en classe de mathématiques, pour des élèves de seconde ? Pour le manuel de la collection Hyperbole, la réponse est simple : rien n'y apparaît qui prétende apporter formellement réponse à ce premier questionnement. Le manuel de la collection Déclic est, de ce point de vue, différent. On y trouve en effet un texte introductif présentant en quelques lignes la science statistique, son développement historique et son importance socio-économique :

> La statistique est une science qui se propose de décrire, de représenter, d'analyser et d'interpréter des phénomènes collectifs susceptibles d'être quantifiés.
> Depuis l'Antiquité jusqu'au Moyen Âge, la statistique avait surtout pour objectif de recenser la population afin de renseigner les États (même racine que « statistique » : *Status*, en latin).
> Le vocabulaire employé en statistique en découle (population, individus…).
> De nos jours les États modernes possèdent des organismes chargés de mesurer l'activité économique sous ses différents aspects. En France, c'est l'*Institut national de la statistique et des études économiques* (INSEE, site internet : www.insee.fr).
> Depuis plusieurs décennies, la statistique a évolué : elle a pris une ampleur considérable dans les secteurs publics et privés qui possèdent leurs propres services de statistique pour mesurer, prévoir et prendre des décisions.

Cette présentation est suivie alors de l'énoncé d'un principe placé en exergue de l'ensemble des développements qui suivront :

> La démarche statistique commence toujours par une question que l'on se pose.
> C'est à partir de cette question qu'est élaborée l'enquête.

De semblables déclarations liminaires sont rares dans les manuels disponibles à la rentrée 2000. Il semble à cet égard que les auteurs appliquent ici à la statistique le même régime que l'on applique à des domaines d'étude que le temps a canonisés, à la géométrie par exemple :

sauf exception, on ne prend pas la peine – ni le temps – d'en expliciter la problématique générale, non plus que les objets auxquels le domaine en question se voue. Pour le contraste, voici, à titre d'exemple, les premières lignes d'un *Manuel d'algèbre et de trigonométrie* du début du XX^{e} siècle :

> *But de l'Algèbre.* L'*Algèbre* est une science qui a pour but de généraliser toutes les questions qu'on peut proposer sur les quantités.
>
> Pour arriver à ce résultat, on représente par des *lettres* les nombres qui mesurent les quantités, et on emploie des *signes* qui indiquent les opérations à effectuer ou les relations entre les grandeurs.
>
> Les premières lettres de l'alphabet désignent les quantités *connues* ou *données*, et les dernières, les quantités *inconnues*.
>
> On peut donc dire d'une manière générale que l'Algèbre est la science des grandeurs représentées par des lettres.

Cet exemple paraît conforter une remarque de bon sens : toutes choses égales par ailleurs, la présence d'un petit discours introductif serait d'autant plus à attendre que le domaine d'étude dans lequel on va entrer est ressenti comme plus neuf – même s'il est vrai que nombre d'ouvrages anciens faisaient l'effort de présenter explicitement des domaines – telle la géométrie – aussi anciens que les mathématiques elles-mêmes ! Mais le « vieillissement » du domaine peut être accéléré délibérément. Tranchant avec l'introduction que l'on vient de reproduire, on pourra voir ainsi, dans les premières lignes de l'ouvrage *Pour comprendre l'algèbre* publié en 1926 par Théophile Moreux (1867-1954), abbé astronome et polygraphe prolifique, l'abandon de ce moment inaugural, au profit d'une entrée en matière voulue immédiate :

> Les savants ont beaucoup discuté autrefois et discutent encore pour savoir si l'Algèbre est une science proprement dite, comme la Mécanique, ou un simple procédé. Vous pensez bien que nous ne perdrons pas un temps précieux à ces discussions oiseuses, encore moins à chercher une définition de l'Algèbre.
>
> Mieux vaut montrer par des exemples ce que peut faire l'Algèbre et de quel secours elle nous sera pour résoudre quantités de problèmes qui exercent la sagacité des esprits les mieux doués pour l'Arithmétique.
>
> Supposez que je vous pose le problème suivant : …

Nous ne discuterons pas, quant à nous, l'affirmation selon laquelle une présentation liminaire, globale, à coup sûr simplificatrice d'un champ d'étude soit une perte de temps dans l'étude à promouvoir dans la classe. Mais nous observerons que, lorsqu'on tient pour rien, en droit ou en faits, le souci de « déclarer » ainsi le domaine à étudier, tout se passe comme si l'on postulait que le travail proposé aux élèves recelait en lui-même sa signification, sans qu'il soit nécessaire de le faire apparaître comme motivé par un projet plus vaste. À cet égard, le manuel de la collection Hyperbole présente un cas limite d'entrée en matière immédiate, puisque la première page consacrée à la statistique s'ouvre sur une suite d'exercices dont le premier est le suivant :

Pour chaque question une seule réponse est exacte ; laquelle ?

Exercice 1 : Calcul d'une moyenne simple

Les cinq dernières performances de Thierry sur 1000 mètres sont :

3 min 05 s ; 2 min 55 s ; 3 min 02 s ; 2 min 50 s ; 2 min 48 s.

Quelle est la moyenne de ces performances ?

a) 2 min 55 s b) 3 min 02 s c) 2 min 56 s d) 3 min 12 s

À l'évidence, il s'agit ici, non de susciter une prise de distance réflexive avec ce qu'on peut savoir de la statistique lorsqu'on entre en seconde, mais de confirmer des pratiques antérieures, dont l'intérêt ne sera pas davantage interrogé.

Mais l'exigence explicative éventuelle ne s'arrête pas une fois passé le seuil de l'étude de la statistique (ou de quelque autre domaine que ce soit). La deuxième question qu'on peut alors soulever est la suivante : de même qu'on peut se demander en quoi consiste une *étude de géométrie* ou une *étude d'algèbre*, sans supposer *a priori* à ces questions une réponse unique ou même univoque, de même on peut se demander en quoi consiste une *étude de statistique* ou, comme on dira, une *étude statistique*. Les manuels disponibles n'ignorent pas toujours la question, puisque tous ne se contentent pas de lui donner seulement une réponse en actes, laissée implicite. Ainsi, dans le manuel *Maths 2^e^* publié en 2000 par Belin, le chapitre « Statistiques » *(sic)* s'ouvre-t-il par des « rappels » dont le premier est libellé ainsi :

Effectuer une étude statistique consiste à recueillir, présenter et exploiter des informations sur un *caractère* d'une *population* c'est-à-dire une propriété que possèdent les individus de cette population.

Il s'agit là, en vérité, d'une autre manière de prétendre entrer directement dans le travail statistique. Car une citation précédente du manuel Déclic permet de voir que cette présentation possède une lacune essentielle : *dans quel but* recueille-t-on et exploite-t-on des informations statistiques, et quelles « propriétés » sont-elles l'objet de l'attention du travail statistique ? Le manuel Déclic recèle en fait, sur le point examiné ici, une ambiguïté redoutable. Dire qu'une étude statistique part toujours d'une « question que l'on se pose » ne nous dit rien sur les *types* de questions relevant de la science statistique. Quant aux questions qui illustrent dans ce manuel cette assertion inaugurale, elles semblent ne répondre à aucun schéma formel déterminé qui éclairerait le lecteur sur les types de questions visés. À propos du recensement de la France réalisé en 1999, par exemple, les auteurs retiendront les deux blocs de questions reproduits ci-après :

• Questions légales et administratives
– Quelle est la population de la France ?
– Comment varie cette population ? En nombre, en structure, en densité ?
– Les députés représentent-ils le même nombre d'habitants dans chaque circonscription ?
– A-t-on plus de personnes âgées dans les régions du sud de la France que dans le nord (*doc.* 1) ?

• Questions sociales
– Les femmes se marient-elles de plus en plus tard ?
– Quelle est la durée des vacances prises pas les Français selon leur catégorie socioprofessionnelle ?
– L'augmentation du prix du tabac conduit-elle à une diminution de la consommation ?
– Peut-on prévoir que 80 % d'une génération ait le niveau bac (*doc.* 2) ?

Le travail sur l'identification de *types* de questions, c'est-à-dire de types de *problèmes* que peut tenter de résoudre une étude statistique reste donc fort limité, alors que l'un des grands problèmes de l'organisation d'un domaine d'études est, précisément, celui de l'identification des types de problèmes qu'on peut y envisager. En géométrie, par exemple, les problèmes de *lieux* géométriques se distinguent des problèmes de *constructions* géométriques, même si, bien entendu, ces deux classes de problèmes sont organiquement liées l'une à l'autre. En algèbre élémentaire, de même, on distingue classiquement les problèmes *du premier degré* des problèmes du *second* degré, etc. La profusion des questions posées, l'absence de classification de ces questions constituent très vraisemblablement des conditions favorisant la diffusion d'une image de la statistique rabattue sur les tâches instrumentales de base – calculer une moyenne, une fréquence, etc. –, et dont restent absents les types de tâches de plus haut niveau, ayant une puissance génératrice essentielle, telles celles qu'on a vu mises en avant dans la formation des professeurs stagiaires à l'IUFM d'Aix Marseille, et dont un spécimen serait ici : *Se marier à 30 ans, en 1999, lorsqu'on est une femme, est-ce se marier tard ?* Notons, à cet égard, que le grand problème de l'inférence statistique est ici évité – on en reste en principe à un problème de simple description statistique, comme on le ferait avec la question suivante par exemple : *Entrer en seconde avant d'avoir fêter ses quinze ans, dans* ce *lycée, est-ce être dans la normale ?* En revanche, la question relative à la comparaison du nord et du sud de la France quant à la présence des personnes âgées ne fait pas partie des types de problèmes que le programme de seconde prévoit de travailler d'une façon un tant soit peu approfondie. Sa présence, ainsi que celles de bien d'autres questions proposées à titre d'exemples, peut renforcer cette idée que, dès lors qu'on dispose (mais comment ?) des

« bonnes données » – en l'espèce, ici, le document 1, soit une carte donnant à voir les pourcentages des personnes de 65 ans et plus dans la population française de 1999 –, on peut répondre à la question de manière quasi immédiate (ici, en effet, un coup d'œil suffit). C'est gommer là le fait que la statistique s'est construite et continue de se construire comme une « méthodologie », c'est-à-dire comme un complexe de savoirs proposant des techniques qui répondent à la question : comment faire pour répondre à tel *type* de questions ? La conséquence de cette occultation est prévisible : la « méthodologie » à étudier ne sera plus vue comme telle, c'est-à-dire comme un ensemble de techniques fonctionnelles avec leurs environnements technologico-théoriques respectifs, mais comme une juxtaposition de techniques numériques et graphiques définies formellement, dont la motivation fonctionnelle pourra aisément être perdue de vue [13]. Le manuel de la collection Déclic, nous l'avons noté, est à cet égard ambigu. Ce n'est, en vérité, qu'à la toute dernière page de son chapitre de statistique que, dans le corpus des « exercices » proposés, dans une rubrique intitulée *Études statistiques à réaliser*, on trouve ce développement qu'on eût aimé voir gouverner l'ensemble du chapitre :

Plan pour mener une étude statistique

a) Énoncer la question que l'on se pose.

b) Définir la population soumise à l'étude et le (ou les) caractère(s) étudié(s) sur chaque individu. Indiquer les conditions de la collecte des données.

c) Si l'on procède par échantillonnage, donner la taille de l'échantillon (ou des échantillons).

d) Éventuellement, choisir un ou plusieurs graphiques pour présenter la distribution des fréquences.

e) Énoncer une conclusion.

Bien entendu, les aspects méthodologiques correspondant aux deux derniers points notamment ne peuvent guère, en seconde, être fortement développés. Mais ils devraient permettre de poser les problèmes qu'une étude ultérieure de la statistique devrait amener à résoudre. Cela noté, le manuel propose quatre « études » intitulées respectivement *La cote de*

[13] Dans un ouvrage publié en 1967 chez Dunod et intitulé significativement *Éléments de méthodologie statistique*, l'auteur, Maurice Girault, professeur à la Faculté de droit et de sciences économiques de Paris et à l'Institut de statistique, ouvrait son avant-propos par ces lignes : « À son origine, la statistique s'est présentée comme l'étude des grands ensembles, quelle que soit la nature de ceux-ci. Peu à peu, cette science s'est appliquée aux résultats expérimentaux qui présentent une variabilité. Le développement moderne des sciences a donné une importance capitale à cet aspect de la statistique. En modifiant son objet, en élargissant son but, la statistique est devenue *la méthode fondamentale* des sciences expérimentales et des sciences d'observation. C'est pour désigner plus clairement cet aspect de la statistique que nous parlons de *méthodologie statistique*. »

popularité, *Le mois de naissance*, *Six coups de suite sans le 6*, *Le jeu du robot*. La première étude porte sur une question présentée ainsi :

> On fait deux sondages sur 100 personnes choisies au hasard en France :
>
> • le premier, au mois de septembre, donne 56 % d'opinions favorables pour un personnage politique important ;
>
> • le second, au mois de décembre, lui donne 58 % d'opinions favorables.
>
> Peut-on en conclure de façon certaine que la cote de popularité a augmenté de 2 points de pourcentage entre septembre et décembre ?
>
> D'ailleurs, est-on certain qu'elle a augmenté ?

La suite de l'énoncé guide l'étude ; mais rien n'y ressemble à un plan d'étude conforme au patron exposé plus haut. En réalité, les questions soulevées sont – de façon non illégitime, quoique non discutée – remplacées par une autre. Supposons que le pourcentage d'opinions favorables soit en réalité de 55 % et, comme le dit l'énoncé, « que ce taux reste parfaitement constant au cours du temps ». La population Ω qui nous intéresse alors est celle des échantillons de taille 100 que l'on peut extraire de la population E des personnes vivant en France et sur laquelle porte l'enquête : si l'effectif de cette dernière population est Card E = N, alors l'effectif de la population statistique Ω est Card $\Omega = C_N^{100}$. Le caractère X à étudier sur Ω est la proportion $X(\omega)$ d'opinions favorables dans l'échantillon $\omega \in \Omega$. La question que l'on se pose alors peut être formulée ainsi : un échantillon ω tel que $X(\omega) \geq 0{,}56$, est-ce un échantillon qui a un « grand » X ? Si par exemple on trouvait que, dans Ω, les échantillons ω tels que $X(\omega) \geq 0{,}56$ représentent 1 % de la population, on pourrait sans doute répondre par l'affirmative à la question posée. Pour déterminer la fréquence des échantillons ω tel que $X(\omega) \geq 0{,}56$, soit $f = \dfrac{\text{Card }\{\ \omega \in \Omega \ /\ X(\omega) \geq 0{,}56\ \}}{\text{Card }\Omega}$, il conviendrait, idéalement, de connaître la distribution des fréquences de X sur Ω. La chose est considérée comme hors de portée en classe de seconde. L'étude proposée va donc s'attaquer au problème par la voie de la simulation : à l'aide d'une calculatrice, on engendre des échantillons ω de taille 100, sur chacun desquels on calcule la proportion $X(\omega)$ d'opinions favorables ; on obtient ainsi un échantillon de la population Ω sur lequel on peut faire des considérations rudimentaires mais non moins instructives. Il y a là le point de départ de la théorie – ou, si l'on veut de la *méthodologie* – des tests d'hypothèse : pourra-t-on rejeter la supposition faite au départ, à savoir que le taux, supposé constant, d'opinions favorables dans la population enquêtée serait de 55 % ? Si, par exemple, sous l'hypothèse H_0 que la proportion d'opinions favorables reste de 55 % dans la population enquêtée, la fréquence de l'événement $\{ X \geq 0{,}58 \}$, supposé effectivement observé, est trouvée, sur l'ensemble des échantillons (supposé en assez grand nombre), inférieure ou égale à 1 ‰, est-il raisonnable de continuer à croire en H_0 ? Et si, alors, on ne se décide pas à prendre le risque de rejeter H_0, pourra-t-on au moins rejeter l'hypothèse que la proportion, toujours supposée constante dans le temps, des opinions favorables, serait, non de 55 %, mais de 53 % [14] ?

L'étude proposée est riche et de nature à faire rencontrer des situations typiques de la pratique et de la pensée statistiques. En outre, comme on vient de le suggérer, elle se glisse bien dans le schéma général présenté par les auteurs comme devant gouverner toute étude statistique. Mais il s'en faut qu'elle en soit une illustration évidente ! Au demeurant, même dans des cas où l'explicitation et la mise en œuvre du schéma d'étude proposé seraient plus naïvement apparentes, l'analyse correspondante demeure virtuelle. L'« exercice » suivant, intitulé *Le mois de naissance*, commence ainsi, certes, par cette déclaration :

> Les naissances sont-elles régulièrement réparties au cours des mois de l'année ?
> Pour répondre à cette question, mener une étude statistique. L'échantillon servant à l'étude sera constitué des élèves du lycée. En demandant au CPE la liste des élèves par division, on dispose de la date de naissance de chaque élève. On ne s'intéressera qu'au mois de naissance.

On aura reconnu là une question appelant la méthode statistique des tests d'ajustement, problématique qui, au lycée, n'apparaît en principe qu'en terminale scientifique où, toutefois, on demande simplement que soit conduite l'étude « d'un exemple traitant de l'adéquation de données expérimentales à une loi équirépartie », cette demande étant assortie en outre d'un commentaire qui fixe tant le minimum (inclus) que le maximum (exclu) de ce que l'on pourra se proposer de faire :

> L'élève devra être capable de poser le problème de l'adéquation à une loi équirépartie et de se reporter à des résultats de simulation qu'on lui fournit.
> Le vocabulaire des « tests » (test d'hypothèse, hypothèse nulle, risque de première espèce) est hors programme.

L'anticipation par les auteurs d'un manuel de seconde d'une question qui ne sera étudiée qu'en terminale (au mieux) confirme les observations précédemment faites selon lesquelles le corpus à enseigner n'est pas encore structuré de manière suffisamment claire et stable. Mais

[14] Telle est en effet la question subsidiaire que proposent les rédacteurs de l'exercice : « Si le pourcentage réel d'opinions favorables a baissé de 2 points (53 % au lieu de 55 %), un sondage de 100 personnes permet-il de le révéler ? »

l'essentiel, ici, est ailleurs : le schéma de base d'une étude statistique n'est invoqué, liminairement, qu'à propos de situations statistiques *complexes*, qui ont tôt fait de l'occulter. Où est ici la population ? Où est le caractère ? Que sont les échantillons ? En réalité, selon une pente déjà notée, on invoque une situation dont, on vient de le dire, l'analyse statistique est complexe mais dont en outre l'étude *naïve* est simple, puisqu'un coup d'œil sur le graphique obtenu comme l'indique l'énoncé de l'exercice montrera à l'œil même non exercé qu'il serait bien paradoxal de ne pas conclure au rejet de l'hypothèse nulle – soit l'ajustement à une distribution équirépartie. En réalité, le lien est subtil entre l'inutilité du plan d'étude proposé et l'évitement d'un engagement – certes trop précoce par rapport à la gradation prévue dans les programmes du lycée – dans la construction de « méthodes » statistiques appropriées [15].

Le défaut mis en évidence par les analyses précédentes tient à l'absence d'une mise en œuvre claire et éclairante du schéma général d'étude dans des cas suffisamment simples pour que cette mise en œuvre, explicitée, apparaisse comme utile pour parvenir à une conclusion même limitée. Dans la troisième étude proposée, intitulée *Six coups de suite sans le 6*, la population Ω étudiée est celle des parties ω d'un certain jeu et le caractère X considéré vaut 1 sur certains d'entre eux, -1 sur les autres. Bien entendu, une partie du jeu en question peut être simulée aisément : elle revient au lancer simultané de 6 dés cubiques non pipés. Le caractère X vaut 1 si, lors du lancer, le 6 n'apparaît pas ; il vaut -1 s'il apparaît au moins une fois. La question à étudier est : « Ai-je intérêt à jouer ? » L'étude à conduire, ici, n'est pas guidée par l'énoncé. Elle reste bien sûr empirique et recourt donc à une simulation. En réalité, la situation travaillée – que l'énoncé propose ensuite de réétudier en redéfinissant une partie comme une succession de *quatre* lancers, au lieu de six – a la même structure que l'étude proposée dans les documents officiels sous l'intitulé *Le lièvre et la tortue* [16], et il en va de même de la quatrième étude proposée, *Le jeu du robot*. Peut-on faire grief à des auteurs de manuel de s'inspirer on ne peut plus fidèlement d'un exemple officiellement proposé ? Ce qui apparaît ici, en vérité, est un manque d'intégration, dans le programme de statistique de seconde, entre le secteur de la *description* statistique et celui de la *simulation* statistique, défaut d'intégration qui, ainsi qu'on l'a suggéré, ne permet que très malaisément la mise en place des cadres conceptuels utiles à l'analyse statistique des situations de variabilité. Nous nous arrêterons donc, dans ce qui suit, sur ces cadres conceptuels et sur leur mise en œuvre en interrogeant les manuels sur un ensemble de questions cruciales : sur les questions mises à

[15] Ce qui, ici, conduirait vraisemblablement à la rencontre avec le test du χ^2.

[16] Voir le chapitre 2, § 7.

l'origine des problèmes proposés ; sur les situations du monde auxquelles elles se réfèrent ; sur la manière de préciser ces questions en déterminant une population et un caractère ; sur la façon de rendre les données disponibles ; sur le traitement de ces données et la manière d'en tirer des éléments de réponse à la question étudiée.

L'examen des deux manuels retenus conduit, à cet égard, à des conclusions contrastées. Le manuel de la collection Hyperbole ne contient pas véritablement d'études statistiques explicites et organisées par un énoncé structuré conformément au plan d'étude que nous avons évoqué. Le travail statistique y est le plus souvent ramené au schéma suivant : on dispose de données numériques fournies par l'énoncé ; on calcule, à l'instigation de l'énoncé, la valeur de certains indicateurs (moyenne, etc.) ; l'énoncé demande alors de « commenter ces résultats », voire de « comparer ces résultats ». Un exemple typique de cette manière de faire est offert par l'exercice d'application ci-après [17] :

> Voici les temps réalisés (en secondes) par trois sprinters de 100 m, au cours d'entraînements :
>
> John : 11,5 - 10,9 - 12 - 11,3 - 11
>
> Bruny : 12,5 - 11,3 - 12,8 - 9,9 - 10,2
>
> David : 11,3 - 11,6 - 11,1 - 11,5 - 11,2
>
> a) Calculer la moyenne et la médiane des temps de chacun.
>
> b) Calculer l'étendue des temps de chaque sprinter. Commenter ces résultats.

Ici, le commentaire à apporter pourrait ressembler à ceci [18] : « Bruny a la meilleure performance mais aussi les résultats les plus dispersés : il réalise même le temps maximal ! Parmi les deux autres, c'est John qui a la meilleure performance mais c'est David qui a les résultats les plus réguliers, avec en outre le temps maximal le moins élevé (11,6 s contre 12 s pour John et 12,8 s pour Bruny). » Cela noté, aucune question préalable n'engendre l'étude ; il n'y a pas de recherche des données utiles, ni de discussion sur les informations à extraire de ces données. Le travail « statistique » devient ici une affaire de petite arithmétique. Cette réduction arithmétique de la statistique est plus visible encore dans les cas – nombreux – où, selon une pente dont nous avons déjà observé l'effet, les auteurs se réfèrent à des situations statistiques complexes, pour lesquelles les outils appropriés sont hors de portée, et qui ne

[17] Il s'agit de l'exercice 22, page 20.

[18] En fait l'exercice choisi est l'un des exercices pour lesquels les auteurs fournissent un corrigé. Le corrigé de la question b) propose ce commentaire : « Bruny a réalisé le meilleur temps des trois sprinters (9,9 s) mais ses temps sont très étalés. Tandis que les temps réalisés par David sont très concentrés. »

demandent alors aux élèves qu'un travail très guidé de calcul arithmétique. Ainsi en va-t-il dans l'exercice suivant [19] :

Calculer des mesures de tendance centrale

On fait germer des graines de poireaux dans des milieux différents : un milieu témoin A et un milieu B avec apport d'engrais. Après quelques jours on mesure la tige des plantules (en mm) et on obtient les résultats suivants :

Longueur	Milieu A	Milieu B
[0 ; 5[	3	1
[5 ; 10[	8	3
[10 ; 15[	10	5
[15 ; 20[	20	21
[20 ; 25[	20	24
[25 ; 30[	12	20
[30 ; 35[	7	11
[35 ; 40[	3	8

1. Dire pour chaque milieu, quelle est la classe qui a le plus grand effectif. Sous quel nom, connaît-on cette classe ?

2. a) Pour le milieu A, quel est l'effectif total ?

b) Pourquoi la médiane pour le milieu A est-elle la longueur située en 42^{e} position ? Dans quelle classe se trouve-t-elle ?

c) Quelle est la classe médiane pour le milieu B ?

3. a) Pour le milieu A recopier et terminer le tableau suivant :

Longueur	Centre x_i	Effectif n_i	$n_i x_i$
[0 ; 5[	2,5	3	7,5
[5 ; 10[	7,5	8	60
[10 ; 15[			

b) Calculer le total de la colonne « $n_i x_i$ ». En déduire une valeur approchée de la moyenne, arrondie au dixième, des longueurs des plantules du milieu A.

c) Calculer une valeur approchée de la moyenne, arrondie au dixième, de la moyenne des longueurs des plantules du milieu B.

4. À l'aide de ces résultats, comparer ces deux séries.

On aura noté que, là où le statisticien voit une comparaison de moyennes de deux échantillons non appariés [20], les auteurs voient surtout – comme l'indique le titre qu'ils ont donné à l'étude

[19] Il s'agit de l'exercice 44, page 23.

proposée – l'occasion de faire effectuer divers calculs numériques. En conséquence, bien entendu, toute la problématique de l'étude statistique reste implicite : au lieu d'annoncer explicitement que l'étude complète viserait à apprécier les effets d'un apport d'engrais en comparant les distributions des longueurs des tiges des plantules, et notamment en recherchant si la moyenne de la distribution « avec engrais » est significativement supérieure à la moyenne « sans engrais », on laisse cette interrogation à l'arrière-plan, comme un simple décorum : l'élève effectue alors de menus travaux pour le statisticien, sans faire lui-même

---

[20] La moyenne de l'échantillon A est $\bar{x}_A = \frac{1662{,}5}{83} = 20{,}030\ldots$, celle de l'échantillon B est $\bar{x}_B = \frac{2202{,}5}{93} = 23{,}682\ldots$, tandis que leurs tailles sont respectivement $n_A = 83$ et $n_B = 93$. Peut-on penser que l'adjonction d'engrais est associée à une croissance plus forte des plantules de poireaux ? Classiquement, on suppose que, aux milieux A et B, correspondent des variables aléatoires indépendantes X_A et X_B distribuées selon une loi normale : $X_A \sim \mathcal{N}(m_A ; \sigma_A)$ et $X_B \sim \mathcal{N}(m_B ; \sigma_B)$; et on regarde les séries statistiques $x_{A,1}, x_{A,2}, \ldots, x_{A,n_A}$ et $x_{B,1}, x_{B,2}, \ldots, x_{B,n_B}$ obtenues comme réalisant respectivement n_A variables aléatoires $X_{A,1}, X_{A,2}, \ldots, X_{A,n_A}$ indépendantes et de loi $\mathcal{N}(m_A ; \sigma_A)$ pour la première série, n_B variables aléatoires $X_{B,1}, X_{B,2}, \ldots, X_{B,n_B}$ indépendantes et de loi $\mathcal{N}(m_B ; \sigma_B)$ pour la seconde série. On démontre alors que $Y = \frac{\bar{X}_B - \bar{X}_A - (m_B - m_A)}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}}$ est une variable aléatoire normale centrée réduite : $Y \sim \mathcal{N}(0 ; 1)$. Ici, on ne connaît ni σ_A^2 ni σ_B^2 ; mais les échantillons étant de tailles supérieures à 30, on démontre que, alors, le résultat précédent reste approximativement valide si l'on remplace ces variances inconnues par leurs estimations $\frac{n_A}{n_A - 1} s_A^2$ et $\frac{n_B}{n_B - 1} s_B^2$, où s_A^2 et s_B^2 sont les variances des échantillons empiriques recueillis, ce qu'on peut écrire ainsi : $Y^* = .\frac{\bar{X}_B - \bar{X}_A - (m_B - m_A)}{\sqrt{\frac{s_A^2}{n_A - 1} + \frac{s_B^2}{n_B - 1}}} \approx \mathcal{N}(0 ; 1)$. On a ici $s_A^2 = \frac{470500}{83^2} = 68{,}297\ldots$ et $s_B^2 = \frac{499400}{93^2} = 57{,}740\ldots$ *Sous l'hypothèse* que $m_A = m_B$, on a $Y^* = \frac{\bar{X}_B - \bar{X}_A - (m_B - m_A)}{\sqrt{\frac{s_A^2}{n_A - 1} + \frac{s_B^2}{n_B - 1}}} = \frac{\bar{X}_B - \bar{X}_A}{\sqrt{\frac{s_A^2}{n_A - 1} + \frac{s_B^2}{n_B - 1}}}$; la variable aléatoire $Y^{**} = \frac{\bar{X}_B - \bar{X}_A}{\sqrt{\frac{s_A^2}{n_A - 1} + \frac{s_B^2}{n_B - 1}}}$ suit donc approximativement une loi normale centrée réduite ; or la valeur de cette variable que l'on a « observée » est $y^{**} = \frac{\bar{x}_B - \bar{x}_A}{\sqrt{\frac{s_A^2}{n_A - 1} + \frac{s_B^2}{n_B - 1}}} = \frac{\frac{28195}{83 \times 93}}{\sqrt{\frac{470500}{83^2 \times 82} + \frac{499400}{93^2 \times 92}}} \approx 3{,}02245$. Comme on a $P_{\mathcal{N}(0\,;\,1)}([3{,}02244 ; +\infty[) = 0{,}00125\ldots$, la probabilité d'observer une valeur aussi forte lorsque $m_A = m_B$ est inférieure à 1,3 ‰ : selon l'usage on rejette donc l'hypothèse $m_A = m_B$, au profit de l'hypothèse $m_A > m_B$.

véritablement de statistique. Le choix des données est lui-même en quelque sorte « gauchi » par l'intention didactique des auteurs : les deux séries proposées, en effet, ont été construites de façon à avoir la même classe médiane (à savoir [20 ; 25[), mais des moyennes sensiblement différentes (environ 20 mm sans engrais et 24 mm avec). D'une façon générale, les auteurs organisent la rencontre de l'élève (et du professeur) avec des situations d'études statistiques qui ne seront pas travaillées réellement, et qui ont pour seul mérite – en dehors du fait qu'elles sont classiques en statistique – de fournir l'occasion de petits travaux numériques. Considérons ainsi le problème suivant [21] :

Les boîtes de conserve

Une conserverie alimentaire fabrique des boîtes de légumes. Afin de vérifier l'état de fonctionnement de la chaîne de remplissage, on a pesé un lot de 100 boîtes de conserves.

Masse (en g)	995	996	997	998	999	1000	1001	1002	1003	1004	1005
Nombre de boîtes	3	4	6	7	14	35	20	5	4	1	1

On considère que la chaîne est en bon état lorsque les deux conditions suivantes sont remplies :

a) l'écart entre la moyenne $\bar{x}$ de la série et la valeur 1000 est inférieur à 0,5.

b) le pourcentage de boîtes en dehors de l'intervalle [998 ; 1002[est inférieur à 20 %.

Le fonctionnement de la chaîne est-il correct ?

Remarque

On pourra simplifier le calcul de $\bar{x}$ avec les propriétés de linéarité de la moyenne.

Là encore le titre est anecdotique : il épargne aux auteurs de devoir se référer au type de situations statistiques en jeu. À strictement parler, le travail demandé à l'élève revient à la simple application d'une recette, qui elle-même est le rejeton de toute une « méthode » statistique. Pour le contraste, on s'arrêtera un instant pour décrire sommairement la manière dont la même question est abordée dans un ouvrage un peu ancien – il s'agit des *Statistiques commentées* de Georges Reeb et Aimé Fuchs publié en 1967 chez Gauthiers-Villars – , voulu par ses auteurs délibérément élémentaire, mais qui, croyons-nous, fait pénétrer authentiquement dans le travail statistique. La question est envisagée au chapitre 5 intitulé : « Étude de la valeur moyenne d'un caractère normal. Échantillons d'effectif un. Le pari. Carte de contrôle. » La situation étudiée est décrite dans les termes ci-après :

[21] Il s'agit de l'exercice 69, page 27, que les auteurs classent dans la catégorie des « problèmes de synthèse ».

L'exemple suivant souligne l'importance du problème : « étude de la valeur moyenne d'un caractère normal ». La cote X des pièces usinées par une machine outil M est distribuée selon une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$.

- L'écart type σ est une caractéristique de la machine (garantie par le vendeur de la machine) ;
- la valeur moyenne m est le résultat du réglage (à la charge du contremaître).

Les auteurs distinguent classiquement le pari et le test d'hypothèse : dans le premier cas, m et σ sont supposés connus et on cherche alors à préciser un intervalle dans lequel la cote X se trouvera avec une probabilité supérieure ou égale à une valeur donnée ; dans le second cas – celui qui nous intéresse ici –, on suppose σ connu et on suppose que le contremaître a réglé la machine sur la valeur $m = m_0$ (dans l'exercice du manuel, $m_0 = 1000$). Ce que l'on veut, c'est vérifier que ce réglage a bien été réalisé, sans erreur, et que la machine se comporte de façon idoine : on veut donc tester l'hypothèse que $m = m_0$. Les auteurs écrivent alors :

Occupons-nous plus particulièrement du problème du test d'hypothèse. Le statisticien (sollicité pour expertise) conclura sur l'examen d'un échantillon prélevé sur la population des pièces usinées. Il nous faudra quelque patience avant de comprendre la démarche du statisticien dans toute sa complexité ; ce n'est qu'en 6, 7, 8 que nous étudierons le problème posé (test de l'hypothèse $m = m_0$) et encore nous le ferons moyennant le prélèvement d'un échantillon d'effectif *un* (cette manière de procéder est didactique mais bien naïve). Ce n'est qu'en 9 que l'on entreverra la puissance de la méthode statistique.

Les chapitres de cet ouvrage sont brefs ; les chapitres 6, 7, 8 et 9 s'intitulent respectivement comme suit :

6. – Étude de la valeur moyenne d'un caractère normal X de variance connue. Échantillon d'effectif un. Test de l'hypothèse $\mathcal{H}$. Décision entre deux hypothèses.

7. – Courbe de puissance du test étudié en 6.

8. – Étude des trois problèmes précédents : étude de la valeur moyenne d'un caractère normal ; estimation à partir d'un échantillon d'effectif un ; détermination d'un intervalle de confiance sur m lorsque σ est connu.

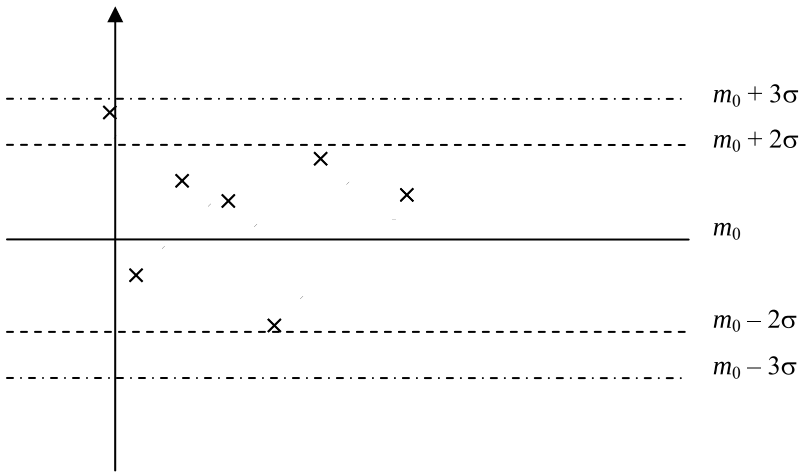
9. – Étude des trois problèmes précédents (pari, test d'hypothèse, estimation) dans le cas d'un échantillon d'effectif n.

Mais revenons au chapitre 5, qui ouvre ce parcours d'étude relativement long. Les auteurs poursuivent en introduisant la notion de *carte de contrôle*, écrivant à ce propos [22] :

[22] Rappelons que, si $X \sim \mathcal{N}(m_0, \sigma)$, alors $P(|X - m_0| \geq 2\sigma) \approx 0{,}9545$ et $P(|X - m_0| \geq 3\sigma) \approx 0{,}9973$.

L'idée de la carte de contrôle est basée sur le fait que si l'hypothèse $m = m_0$ est vraie l'événement $\{ |X - m_0| \geq 2\sigma \}$ est un événement *rare* (ce terme étant précisé par le nombre 0,05) et l'événement $\{ |X - m_0| \geq 3\sigma \}$ un événement rarissime (ce terme étant précisé par le nombre 0,003).

La carte de contrôle comporte un repère orthogonal sur lequel on porte en abscisse l'instant du prélèvement (toutes les heures par exemple) et en ordonnée la cote de la pièce prélevée. Les droites d'équation $y = m_0 \pm 2\sigma$ sont les *cotes d'alerte*, les droites d'équation $y = m_0 \pm 3\sigma$ les *cotes de danger* (voir ci-après).



Les auteurs précisent alors la recette :

Si l'hypothèse $m = m_0$ est vraie les points marqués ne doivent dépasser que rarement (une fois sur 20 en gros) les cotes d'alerte et encore plus rarement 3 fois sur 1000 en gros) les cotes de danger.
S'il n'en est pas ainsi on soupçonnera la validité de l'hypothèse $m = m_0$. Plus précisément, si les points marqués dépassent trop souvent les cotes d'alerte on se méfiera et on s'inquiètera dès qu'ils dépassent trop souvent les cotes de danger ; dans ce dernier cas on « rejettera » l'hypothèse $m = m_0$ et on procèdera à un nouveau réglage.

Après avoir remarqué que les points fluctuent sur la carte de contrôle autour de la droite d'ordonnée m_0, les auteurs termineront [23] ce chapitre par cette humble conclusion : « Voici les premiers balbutiements de la méthode statistique. » Notons en ce point quelques-unes des différences sensibles avec le choix des auteurs du manuel examiné : contrairement à eux, Reeb et Fuchs bloquent toute dérive calculatoire en s'en tenant à des échantillons d'effectif *un* ; surtout, ils mettent en avant les idées essentielles du travail statistique. En outre si, bien entendu, le rejet de l'hypothèse $m = m_0$ se fait ici de façon « pifométrique », les conséquences

[23] En fait, comme dans la plupart des chapitres de cet ouvrage, les développements examinés ici sont suivis d'une liste d'exercices.

d’une erreur de première espèce – le rejet de l’hypothèse $m = m_0$ alors qu’elle serait vraie – n’a pas en principe de conséquences en termes de vérités éternelles : elle conduit seulement à opérer un nouveau réglage de la machine, ce qui peut certes avoir un coût non négligeable mais se situe en un autre registre ! L’ensemble proposé utilise ainsi la situation du monde évoquée pour motiver de façon raisonnable les problèmes abordés et les solutions introduites [24]. La distance est grande avec la vignette que propose le manuel examiné – où, on le notera en passant, la proportion de 20 % envisagée semble un peu inusuelle [25]. Sans doute les rédacteurs du manuel ne peuvent-ils pas, en suivant le programme actuel, faire référence à l’écart type σ comme le font Reeb et Fuchs ; mais le type de situations statistiques que l’on vient de commenter peut tout de même être mis en avant et le constat numérique effectué donner lieu à une interrogation plus explicite sur les conditions sous lesquelles il permettrait de conclure au bon réglage ou non de la machine : ce serait même là une excellente occasion de mettre en évidence, dans l’abord d’un comportement marqué par la variabilité, que cette variabilité peut être plus ou moins grande, et que, ici, au-delà d’un certain ordre de grandeur, elle ne permettra guère d’espérer savoir si le réglage a été fait sur telle ou telle valeur. Si la notion d’écart type n’est pas disponible, donc, la notion – non quantifiée ou du moins faiblement quantifiée – de dispersion l’est : on peut, sans aller plus loin dans une voie qui ouvrirait sur certains des grands problèmes de la statistique, imaginer que si la dispersion était telle que 95 % des productions soient situées dans un intervalle de longueur 1 centré sur la valeur de réglage, le contrôle de ce réglage serait évidemment beaucoup plus facile.

Le manuel de la collection Déclic, lui, semble échapper en partie, mais en partie seulement, aux constats précédents. Nous suivrons à titre d’exemple l’un des *travaux dirigés* proposés, le sixième, intitulé *Normales saisonnières* [26]. L’étude vise, semble-t-il, à répondre à une question que les auteurs font figurer en tête de l’énoncé : « “4 ºC au-dessus des normales saisonnières !” Est-ce si anormal ? » Une enquête épistémologique visant à répondre à cette question doit évidemment préciser ce que sont les « normales saisonnières ». Une recherche simple sur l’Internet semble montrer que l’utilisation de cette expression est fréquente, mais que sa définition est laissée dans l’ombre par la plupart des institutions et des personnes qui

---

[24] Il en va de même dans les exercices.

[25] Si $\sigma = 1$, la proportion des masses en dehors de l’intervalle [998 ; 1002 [doit être en moyenne inférieure ou égale à 5 % = 1/20. Pour une loi normale, on a $P(|X - m| \geq k\sigma) = 20$ % si $k \approx 1{,}281567$, ce qui donnerait ici $\sigma = \frac{2}{k} \approx 1{,}56$.

[26] Le texte correspondant se trouve aux pages 180 et 181 du manuel.

en font usage, comme si l'expression faisait sens d'emblée, par elle-même. Savoir de quoi il retourne est donc une priorité dans l'enquête à mener. L'étude proposée lui consacrera la troisième question, après deux questions relatives à des tableaux de données sur lesquels nous allons revenir. La définition adoptée par les auteurs en cette troisième question est la suivante [27] :

> Dans cette question, on définit la **température « normale »** comme étant la moyenne des températures observées le 15 novembre de toutes les années de 1959 à 1999, arrondie au degré près ; c'est-à-dire 4 ºC pour la température normale minimale, et 10 ºC pour la température normale maximale.

Le « c'est-à-dire » s'explique par le travail préalable effectué sur les données proposées. Les températures minimales et maximales relevées le 15 novembre des années 1959 à 1999 à la station météorologique de Brétigny-sur-Orge dans l'Essonne, à une altitude de 78 mètres, sont rangées dans un tableau constituant le « document 2 » proposé par les auteurs. (Le « document 1 » indique les températures minimales et maximales pour chacun des 30 jours du mois de novembre 1999). La moyenne des minimums des 15 novembre considérés est trouvée égale à 3,7 ºC tandis que la moyenne des maximums vaut 9,7 ºC : d'après la définition adoptée, la température normale minimale est donc bien de 4 ºC et la température normale maximale de 10 ºC. La question 3 fait alors constater que, si l'on prend pour normale, pour chacun des jours du mois de novembre 1999, les normales pour le 15 novembre 1999, alors fort peu de jours ont des températures « normales » : le document 1, en effet, fait apparaître que la température normale minimale de 4 ºC n'est réalisée que deux fois (les 26 et 27 du mois) tandis que la température normale maximale de 10 ºC n'est réalisée qu'une fois (le 10 du mois). Le thème de la question rejoint un thème de discussion apparemment bien diffusé, y compris dans les milieux de la météorologie, celui du caractère quelque peu singulier, voire trompeur, de la notion de températures « normales » [28]. Pour avancer à partir de ce facile constat, les auteurs introduisent, dans la quatrième question, une définition complémentaire :

---

[27] Selon les règles adoptées au niveau mondial, la température minimale (respectivement, maximale) *normale* un jour donné est la moyenne arithmétique des températures minimales du jour, calculée sur une période déterminée de trente années : en 1999, il s'agissait de la période 1961-1990 ; à partir de 2001 (et jusqu'en 2010), la période de référence est 1971-2000 ; ce sera la période 1981-2010 à partir de 2011, et ainsi de suite. Notons que le calcul des normales pour 2005 (par exemple) ne tient pas compte des années 2001-2004. À la période de calcul près, la définition ci-après est donc conforme aux usages actuels.

[28] À titre d'exemple « sérieux », voici un commentaire d'un météorologiste de l'Université de l'Oklahoma, Chuck Doswell – à propos des normales climatologiques, et pas seulement des températures normales (http://www.cimms.ou.edu/~doswell/Normals/normal.html) : "… what was called 'normal' 30 years ago is not

Dans cette question, on dit qu'une température est « dans la normale » si l'écart avec la moyenne des valeurs observées le même jour de toutes les années de 1959 à 1999 n'excède pas 3 ºC.

Si l'on suit cette définition, le 15 novembre 1999, la température minimale est bien dans la normale (elle est de 2 ºC, alors que la normale est de 4 ºC), alors que la température maximale est à 4 ºC au-dessous de la normale (elle vaut 6 ºC) et se trouve donc « en dehors de la normale ». Si l'on suit la définition proposée, la non-communication des données adéquates – que les auteurs ne demandent ni au professeur, ni à l'élève ou la classe de se procurer [29] – ne permet pas en principe de préciser les jours du mois de novembre 1999 qui ont été dans la normale ou en dehors de la normale. Si, faute de mieux, on prend pour normales de chacun des jours du mois de novembre 1999 les normales du 15 de ce mois, on dénombre 9 jours dont la température minimale n'est pas dans la normale, soit 30 % des jours du mois, et 11 jours dont la température maximale n'est pas dans la normale, soit environ 37 % des jours du mois ; on peut alors conclure – en suivant l'énoncé proposé par les auteurs – qu'une température (minimale ou maximale) « en dehors de la normale » n'est nullement exceptionnelle. Mais on peut penser aussi que, vraisemblablement, le rédacteur de l'étude a commis une confusion : car les données disponibles, qui ne permettent pas à strictement parler de tirer les conclusions que l'on vient de formuler, permettent en revanche de dénombrer les 15 novembre des années 1959 à 1999 qui ont été dans la normale ou en dehors de la normale : pour ce qui est de la température minimale, le nombre de 15 novembre où elle s'est située en dehors de la normale est de 19, soit presque la moitié des quarante 15

---

what is called 'normal' today! Who decides how long an averaging period to use? Who decides which years to use? Who decides what statistical manipulations of the data to employ? For the U.S., such decisions are made by the National Weather Service and the National Climate Data Center. Presumably, if they are asked, they can provide details about how they compute what is 'normal,' but all such decisions are in some sense arbitrary. They could have done them in some other way and the result might have been somewhat different but equally justifiable. So where does this leave us? As I have shown, departures from normal are not unusual ... in fact, departures from normal are quite typical. Depending on what is being observed and how accurately it is measured, we may not even have much solid information about what really is 'normal' for some event. It is likely to be quite normal for noteworthy events (in terms of their departure from the average) to occur within a 30 year span, major (larger departures from the average) events to occur in every century, and even bigger events to happen in 1000 years. Given the fact that most people have the 'egocentric' view of climatology described in the Introduction, each important event that departs significantly from the average will seem wildly abnormal to most people, even though in a very real sense can be considered quite typical when the long view is taken."

[29] Pour chacune des 30 journées de novembre 1999, il faudrait connaître quatre données : les températures minimale et maximale du jour et les températures *normales* minimale et maximale pour le quantième du mois en question.

novembre considérés ; quant aux 15 novembre dont la température maximale s'est trouvée en dehors de la normale, ils sont au nombre de 12, ce qui représente 30 % de l'effectif. Là encore, bien entendu, on pourra conclure qu'un écart de 4 ºC à la normale n'est nullement chose exceptionnelle ! L'erreur commise par le rédacteur de l'énoncé soulève tout de même un problème : à l'issue de cette étude, nous ne savons rien de la variabilité des températures normales au cours d'un mois donné, alors même que le travail demandé explicitement (mais peut-être erronément) ne peut être accompli, ici, si l'on ne suppose pas cette variabilité très faible. L'enquête n'est donc pas terminée… Mais on peut conclure que l'épisode proposé paraît essentiellement conforme à une certaine idée de la notion d'étude statistique – même si la conclusion (qui ne vaut véritablement que pour le 15 novembre 1999 à la station météorologique de Brétigny-sur-Orge) reste limitée. Le manuel de la collection Déclic montre ainsi, indéniablement, un souci d'établir une plus grande proximité de son lecteur avec les usages sociaux d'un travail statistique non nécessairement sophistiqué.

Dans le même temps, la pression à la réduction arithmétique ou arithmético-graphique du travail statistique ne laisse pas de se faire sentir. Dans le deuxième des onze *travaux dirigés* que comporte l'ouvrage, les auteurs proposent une étude des plus pertinentes mais dont l'organisation est soumise aux impératifs – supposés sans doute ne pas pouvoir attendre – de l'arithmétique et de la graphique statistiques élémentaires. Formellement, l'énoncé démarre par la formulation de ce qui pourrait être la question génératrice de l'étude [30] : « Un constructeur automobile veut connaître la fiabilité d'une pièce mécanique importante du moteur. » Que fait-il dans ce but ? Voici la réponse :

> Pour cela, il effectue une enquête sur un échantillon de 94 automobiles choisies au hasard et note le kilométrage parcouru jusqu'à ce que la pièce tombe en panne.

Suit alors une liste de 94 nombres mesurant en milliers de kilomètres les distances parcourues relevées par le constructeur. À partir de là, la rédaction de l'étude s'effectue « à l'envers » – selon l'usage classique qui hypothèque tant d'énoncés scolaires. Une première question vise à obtenir, à l'aide d'une calculatrice, la liste des données rangées par ordre croissant et à en déduire la médiane – avant de faire calculer la moyenne. Faute d'une question génératrice plus précise, ce sont là autant de gestes quelque peu formels. Il en ira plus encore de même dans la question 2, où l'on demande de travailler sur le regroupement des 94 données en classes de même amplitude, en considérant successivement des classes dont la longueur représente une amplitude de 5 000, 10 000 et 20 000 kilomètres. Le tunnel continue :

[30] L'énoncé se trouve p. 177 de l'ouvrage examiné.

pourquoi serait-il pertinent de jouer ainsi avec l'amplitude des classes ? Toujours est-il, notons-le au passage, que c'est cette partie du travail que les auteurs font apparaître dans le titre – « Effet d'un regroupement en classes et histogramme » – de la fiche de travail dirigé. La troisième question poursuit fidèlement dans la voie ainsi annoncée : cette fois, on propose au lecteur un regroupement en classes d'amplitudes *inégales* – et cela, lui dit-on, « pour trouver un compromis » entre les histogrammes relatifs à un découpage en classes de 10 000 kilomètres et de 20 000 kilomètres respectivement. Pourquoi un compromis et quel compromis, cela n'est pas explicité. On arrive alors à la quatrième et dernière question, qui aurait pu pertinemment se trouver placé *en début* d'énoncé :

> On fait l'hypothèse que les observations faites sur cet échantillon ne sont pas très différentes de celle que l'on aurait faites sur la population complète (échantillon représentatif).
> Le constructeur veut donner aux concessionnaires une norme afin de contrôler la pièce lors des révisions, avant qu'elle ne tombe en panne.
> Quel kilométrage doit-il indiquer pour que cela soit le cas pour 90 % de l'effectif ? 80 % de l'effectif ?
> (On arrondira à la dizaine de milliers de km la plus proche.)

Le rejet de cette question en fin d'énoncé appelle deux remarques. La première, très générale, c'est que, étant donné l'habitus scolaire dominant, la formulation d'une question est supposée appeler, non une étude à développer, mais un travail *bref*, ne supposant pas un enchaînement de décisions qui ne serait pas explicité par l'énoncé. Bien entendu, les habitus ne sont pas choses intangibles ; et l'on pourrait ici envisager, comme support d'un travail sous la direction de l'enseignant, l'énoncé suivant :

> Un constructeur automobile veut connaître la fiabilité d'une pièce mécanique importante du moteur. Pour cela, il effectue une enquête sur un échantillon de 94 automobiles choisies au hasard et note le kilométrage parcourue jusqu'à ce que la pièce tombe en panne.
> La liste des résultats collectés (en milliers de kilomètres) est la suivante :
>
> 110 ; 80 ; 76 ; 116 ; 106 ; 83 ; 69 ; 83 ; 56 ; 124 ; 90 ; 85 ; 175 ; 137 ; …
>
> On fait l'hypothèse que les observations faites sur cet échantillon ne sont pas très différentes de celle que l'on aurait faites sur la population complète (échantillon représentatif).
> Le constructeur veut donner aux concessionnaires une norme afin de contrôler la pièce lors des révisions, avant qu'elle ne tombe en panne.
> Quel kilométrage doit-il indiquer pour que cela soit le cas pour 90 % de l'effectif ? 80 % de l'effectif ?

Ce scénario alternatif ouvre sur une dynamique d'étude assez différente de celle retenue, de manière artificieuse et opportuniste, par les auteurs du manuel : le premier geste à faire, ici, est sans doute de ranger les valeurs obtenues par ordre croissant ; sur les données fournies on obtient ainsi la liste suivante :

56 ; 65 ; 67 ; 69 ; 70 ; 70 ; 71 ; 72 ; 75 ; 76 ; 76 ; 77 ; 78 ; 79 ; 80 ; 82 ; 83 ; 83 ; 83 ; 83 ; 84 ; 84 ; 85 ; 86 ; …

Sur l'échantillon recueilli, si l'on avait voulu que la pièce ne tombe en panne avant révision que sur au plus 10 % des véhicules, c'est-à-dire sur au plus 9 d'entre eux, il aurait fallu fixer la révision à un kilométrage inférieur à 76 000 km. De même, si l'on avait voulu que la pièce ne tombe en panne avant révision que sur au plus 20 % des véhicules, c'est-à-dire sur au plus 18 d'entre eux, il aurait fallu fixer la révision à un kilométrage inférieur à 83 000 km. Les conclusions auxquelles on parvient ainsi ne sont évidemment valables que sur l'échantillon considéré. La question de la fluctuation d'échantillonnage se pose éminemment ! L'énoncé l'écarte par une hypothèse dont le bien-fondé n'est pas discuté ; et c'est en ce point que, de façon nécessairement naïve, on pourra faire intervenir le regroupement en classes, en faisant l'hypothèse – dont un travail ultérieur sur le phénomène de fluctuation d'échantillonnage pourra chercher à éprouver la validité – qu'un regroupement judicieux peut faire apparaître une distribution moins sensible aux particularités de l'échantillon tiré. Ici, on peut délaisser le regroupement en classes d'amplitude 5 000 km, trop fin, et s'arrêter sur un regroupement en classes d'amplitude 10 000 km, ce qui donne le tableau suivant :

Classe	Effectif
[50 ; 60[	1
[60 ; 70[	3
[70 ; 80[	10
[80 ; 90[	12
…	…

Si on la suppose davantage représentative de la population des pannes que l'échantillon brut obtenu, cette distribution peut conduire par exemple à retenir d'une façon générale la norme des 75 000 km et celle des 85 000 km, qui correspondent aux milieux des deux dernières classes ci-dessus, selon que l'on souhaite ne voir tomber en panne avant révision qu'environ 10 % des véhicules ou qu'on accepte d'aller jusqu'à environ 20 %. Appliqué à l'échantillon effectivement observé, ces normes conduiraient à 8 pannes avant la révision des 75 000 km, soit 8,5 % des véhicules, et à 22 pannes avant la révision des 85 000 km, soit environ 23,4 % des véhicules (ce qui est un peu « fort »). On voit ainsi qu'une grande partie des contenus d'activité inclus de manière artificielle dans l'énoncé proposé par les auteurs peut prendre un sens authentique – quoique conjectural et exploratoire – du point de vue du travail statistique.

En règle générale, bien que de façon plus marquée dans un manuel que dans l'autre, ce qui frappe l'œil lorsqu'on examine les travaux proposés, c'est une forme d'extériorité par rapport à la pratique et à la culture statistiques. La chose est clairement visible quand les auteurs s'emparent de situations statistiques classiques comme simples cadres d'une activité arithmétique et graphique sans lien très net avec un travail statistique qui demeure un horizon lointain du travail effectivement demandé à l'élève. Bien entendu, ce procédé favorise la *démotivation* des types de tâches que le programme enjoint à l'élève de se rendre capable d'accomplir. Mais les exemples étudiés jusqu'ici permettent en outre de souligner encore le constat de l'absence actuelle, bien entendu *non indépassable*, d'une culture statistique effective dans la culture commune des professeurs de mathématiques. Revenons pour cela à la situation du sondage relatif à la cote de popularité d'un certain homme politique. Sous l'hypothèse que dans la population des N personnes considérées 55 % lui étaient favorables, nous avions, en écho à l'exercice examiné, posé la question suivante, où ω désigne un échantillon de taille $n = 100$ extrait au hasard de la population d'effectif N : « un échantillon ω tel que $X(\omega) \geq 0{,}56$, est-ce un échantillon qui a un “grand” X ? » Commentant cette question nous avions ajouté ceci, où Ω désigne la population de tous les échantillons ω possibles : « Si par exemple on trouvait que, dans Ω, les échantillons ω tels que $X(\omega) \geq 0{,}56$ représentent 1 % de la population, on pourrait sans doute répondre par l'affirmative à la question posée. » Semblablement nous avions noté encore : « Si, par exemple, sous l'hypothèse H_0 que la proportion d'opinions favorables reste de 55 % dans la population enquêtée, la fréquence de l'événement $\{ X \geq 0{,}58 \}$, supposé effectivement observé, est trouvée, sur l'ensemble des échantillons (supposé en assez grand nombre), inférieure ou égale à 1 ‰, est-il raisonnable de continuer à croire en H_0 ? » Suivant en cela l'énoncé étudié, nous avions ensuite noté : « Et si, alors, on ne se décide pas à prendre le risque de rejeter H_0, pourra-t-on au moins rejeter l'hypothèse que la proportion, toujours supposée constante dans le temps, des opinions favorables, serait, non de 55 %, mais de 53 % ? » Or il devrait être clair que nos énoncés, qui ne font guère qu'expliciter le propos des auteurs en lui donnant plus de relief, évoque des possibilités qui n'en sont pas ! Le cardinal N de la population enquêtée étant très grand, la fréquence $f = \frac{\mathrm{Card}\ \{\ \omega \in \Omega\ /\ X(\omega) \geq 0{,}56\ \}}{\mathrm{Card}\ \Omega}$ est approximativement égale à

$\sum_{m=56}^{n} b(m; p, n)$, où n = 100 et p = 0,55. Or on a : $\sum_{m=56}^{n} b(m; p, n) = \sum_{m=56}^{100} \mathrm{C}_{100}^{m}\, 0{,}55^{m} \cdot 0{,}45^{100-m} \approx$ 0,461329 ≈ 46 %. Et de même : $\sum_{m=58}^{n} b(m; p, n) = \sum_{m=58}^{100} \mathrm{C}_{100}^{m}\, 0{,}55^{m} \cdot 0{,}45^{100-m} \approx$ 0,308651 ≈ 31 %. On touche ainsi du doigt que les possibilités évoquées plus haut *sont très éloignées* de la réalité. De fait, pour quelles aient quelque apparence de vraisemblance, il faudrait que la distribution binomiale de paramètres n et p, dont l'espérance est np = 55, ait une dispersion extrêmement faible, ce qui seul pourrait porter à penser qu'une proportion de 56 % ou plus pourrait être chose exceptionnelle. Or l'écart type de la loi binomiale de paramètres n et p vaut $\sqrt{np(1\text{-}p)}$: il est ici voisin de 5 (on a : $\sqrt{100 \times 0{,}55 \times 0{,}45}$ = 4, 974937…). Pour croire, ne fût-ce qu'un instant, qu'un échantillon de 100 réponses contenant 58 opinions favorables pourrait être exceptionnel dans le cas où p = 0,55, il faut ne pas avoir en tête, même obscurément, les propriétés qualitatives et quantitatives des distributions binomiales ! Une remarque mérite encore d'être faite à cet égard. Dans le TEL relatif à la « simulation d'un sondage », le programme de seconde précise ceci :

> On incitera les élèves à connaître l'approximation usuelle de la fourchette au niveau de confiance 0,95, issue d'un sondage sur n individus (n > 30) dans le cas où la proportion observée $\hat{p}$ est comprise entre 0,3 et 0,7, à savoir : $\left[\hat{p} - \frac{1}{\sqrt{n}}, \hat{p} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

Ici, donc, au niveau de confiance indiqué, lorsqu'on suppose que $\hat{p}$ = 0,56, la fourchette est l'intervalle [0,46 ; 0,66], qui, bien entendu, contient 0,55. Dans le cas où l'on observe $\hat{p}$ = 0,58, la fourchette est l'intervalle [0,48 ; 0,68], ce qui ne permet pas davantage de rejeter l'hypothèse p = 0,55, non plus d'ailleurs que l'hypothèse p = 0,53 envisagée aussi par l'énoncé. Sans doute ces observations sont-elles ciblées, mais il serait facile de les multiplier [31].

[31] La question évoquée mériterait sans doute de prendre une place beaucoup plus nettement dessinée dans la culture du citoyen d'aujourd'hui. Se référant à une culture statistique « spéciale », le biostatisticien Alain-Jacques Valleron (2001, p. 81) écrit au début d'un chapitre intitulé « Les tests statistiques : calcul du nombre de sujets nécessaires » : « La question la plus souvent posée au biostatisticien est "Combien faut-il de sujets dans mon étude pour répondre à ma question ?" » Une amorce d'extension – sur ce point – de la culture biomédicale à la culture générale *des citoyens* (et pas seulement des étudiants en médecine) est présente, il est vrai, dans l'actuel programme de seconde. Si, dans l'exemple de la cote de popularité, on suppose que $\hat{p}$ = 0,58, et si l'on

3. La statistique et le monde

Nous poursuivrons maintenant l'interrogation des manuels examinés en soulevant une autre question, bien évidemment solidaire de celle qui précède. Le travail statistique porte-t-il sur des situations du monde qui, correctement étudiées, témoigneraient de la capacité de la statistique à apporter une contribution *sui generis* à « l'enquête sur la nature [32] » ? L'examen du manuel de la collection Hyperbole permet de mieux apercevoir un double phénomène : d'une part, nombre de séries statistiques considérées sont présentées comme extraites d'une situation du monde qui n'est pas de pure arithmétique ; d'autre part, cette référence – cet habillage, comme on dit quelque fois – est, sauf exception, purement formelle, sans incidence fonctionnelle sur l'étude à conduire. Dans les trois pages consacrées aux activités, ainsi, on trouve successivement des séries statistiques présentées comme relatives à des températures (en ºC), des tailles (en cm) d'élèves de seconde, des longueurs (en mm) de feuilles de tilleul, des notes (sur 20) obtenues par des élèves, des salaires mensuels (en €) dans une entreprise, des hauteurs de pluie (en mm), des mesures de la masse atomique d'un corps [33], des quantités de carburant (en litres) délivrées dans une station-service. Notons bien que ces séries statistiques apparaissent dans des « activités », et non en de simples exercices, au vrai sens de ce terme. Or le travail demandé est presque toujours indépendant de l'origine des données : dans les cas des températures et des tailles d'élèves, il est demandé de calculer la médiane ; dans le cas des feuilles de tilleul où les données ont été regroupées en classe, il s'agit de déterminer la classe médiane (après avoir présenté la série des effectifs cumulés croissants). Dans d'autres cas, cependant, il peut sembler que la connaissance du contexte extra-numérique pourrait jouer un rôle. Dans le cas de la série de notes, ainsi, après avoir déterminé la moyenne (peu différente de 11), la médiane (égale à 10) et tracé un diagramme en bâtons des fréquences, les élèves doivent expliquer la différence observée entre moyenne et médiane,

---

admet la fourchette approchée $\left[\hat{p} - \frac{1}{\sqrt{n}}, \hat{p} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$, le nombre n de personnes qu'il aurait fallu interroger pour que l'on puisse rejeter l'hypothèse p = 0,55 doit vérifier l'inégalité $0{,}55 < 0{,}58 - \frac{1}{\sqrt{n}}$, soit $\sqrt{n} > \frac{100}{3}$, ou $n > \frac{10^4}{9} =$ 1111,1…, soit enfin $n > 1112$. Pour $\hat{p}$ = 0,56, il aurait fallu prendre $\sqrt{n} > \frac{100}{1}$ et donc n > 10 000. Le choix du manuel examiné (n = 100) était donc loin du compte.

[32] L'expression d'« enquête sur la nature » (*peri phuseôs historia*), que nous transposons ici, désignait, dans les premiers textes grecs, la recherche de la connaissance, qu'elle fût théorique ou empirique.

[33] L'unité, en l'espèce, n'est pas précisée.

avec cette précision toutefois que l'explication doit se faire « à l'aide du diagramme », c'est-à-dire, implicitement, sans recourir à la connaissance empirique que l'on pourrait avoir – mais l'a-t-on ? – des formes possibles ou usuelles des distributions de notes dans tel ou tel type de classes. Dans le meilleur des cas, le phénomène quantifié « explique » l'allure de la distribution. Ainsi en va-t-il dans le cas classique des salaires au sein d'une petite entreprise (où quelques salaires élevés contrastent avec un nombre sensiblement plus important de salaires de niveau moyen ou bas, en sorte que la moyenne est artificiellement augmentée et se situe en tout cas au-dessus de la médiane) ou dans le cas du niveau des précipitations relevé chaque jour de l'année (dont la distribution fait apparaître un pic pour les valeurs proches de 0 et un autre pic pour les grandes valeurs et où le niveau moyen des précipitations n'est observé qu'en très peu de jours de l'année). Ces deux exemples sont symptomatiques : en un certain nombre de cas assez stéréotypés, les élèves disposent *a priori* – parce qu'ils les trouvent dans la culture commune – de certaines connaissances dont ils constateront la plus ou moins bonne adéquation avec les résultats du travail demandé. En revanche, on ne rencontre guère dans les manuels examinés le souci inverse, qui pourrait être intégré à un enseignement citoyen de la statistique, celui d'apprendre à connaître « la variabilité du monde » en découvrant les différentes formes de distributions qui s'y rencontrent, selon les phénomènes examinés. Tout se passe comme si l'enseignement donné ne devait surtout pas perturber les connaissances acquises ou devant être acquises à travers les autres enseignements prodigués aux élèves. Pourtant un enseignement authentique de la statistique, nous semble-t-il, ne peut guère faire l'économie d'une première rencontre des élèves avec les formes de variabilité d'un certain nombre de phénomènes naturels ou sociaux. Faute de cela, en effet, l'enseignement de la statistique, de façon paradoxale, ne contribuerait que fort peu à propager de manière critique une vision « variabiliste » du monde, en même temps qu'il ne se donnerait pas les moyens de montrer l'« efficacité » de la statistique, au sens où Eugene Wigner (1902-1994), lauréat du prix Nobel de physique 1963, parlait de la « déraisonnable efficacité des mathématiques [34] ».

Ce que montrent les *activités* du manuel de la collection Hyperbole, les *exercices* dits d'application ou d'approfondissement ou encore les « problèmes de synthèse » le montrent aussi. Sont ainsi considérés successivement le nombre d'enfants par foyer dans un village, le chiffre d'affaires annuel des magasins d'une même enseigne, la répartition d'un ensemble de familles de quatre enfants selon le nombre de garçons, la longueur des noix dans un lot donné,

[34] Dans un article publié en 1960 sous le titre *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences.*

le nombre de livres lus en une année par des élèves d'une classe de seconde, les temps réalisés lors d'entraînements au 100 mètres plat, la taille d'adolescents, la hauteur de pluie par mois en divers lieux, le poids d'un produit fabriqué par une machine, ou celui de plaquettes de beurre de 250 g, le prix de fours à micro-ondes, les salaires journaliers dans une entreprise, des notes à un devoir dans une classe, des moyennes trimestrielles dans une classe, des tailles d'adolescents, la période d'un pendule simple, la distance au lieu de travail, la somme amenée par le lancer de deux dés, le nombre de fautes dans une épreuve de frappe de texte, le nombre de pantalons vendus dans un magasin en une semaine selon leur longueur, la consommation des ménages et sa distribution entre différents postes budgétaires, la longueur de plantules de poireaux, le nombre d'élèves selon les différents types d'établissement (école, collège, etc.), le nombre de pois chiches dans 100 g de pois chiches, les quantités de lait en poudre consommées par des bébés, la durée du trajet jusqu'au lieu de travail, le nombre de lancers pour obtenir pile avec une pièce de monnaie, l'ancienneté des ouvriers d'une entreprise, la taille des membres d'un groupe de personnes, les notes d'un candidat à des épreuves d'examen, le nombre de tirs tentés et le nombre de buts marqués par des équipes de football dans le cadre de la coupe du monde, le nombre d'appareils commandés à une entreprise par des détaillants, les notes trimestrielles obtenues par une élève dans différentes matières, etc. Il est vrai que, même si l'intention d'enseigner quelque chose des situations du monde évoquées est mise en retrait, cela n'interdit pas aux élèves d'apprendre un tant soit peu ; mais ce n'est pas un enjeu didactique même auxiliaire, parfois au détriment du travail statistique à accomplir (lorsque celui-ci suppose une meilleure compréhension de l'origine des données et du but de leur exploitation). Bien entendu, le critère décisif à cet égard, sur lequel nous tombons encore une fois, est celui de la présence ou de l'absence d'une *question* clairement formulée, inaugurant et relançant l'étude à mener – même quand les données idoines sont proposées par l'énoncé. À cet égard, l'ouvrage examiné fait preuve d'une extrême retenue.

Même subrepticement, l'apprentissage du monde à l'occasion de son étude statistique suppose notamment la disponibilité de données sinon toujours authentiques, réelles, du moins vraisemblables et réalistes. Une telle exigence semble avoir, dans les programmes actuels des classes du lycée, un destin singulier, qui pâtit d'une mise en jeu brutale – mais, il est vrai, traditionnelle – de la distinction entre culture statistique *générale* et cultures statistiques *spéciales*. Dans les classes de première L, le programme met l'accent sur le recueil (ou la recherche) de données, comme le montre ce commentaire :

> On étudiera des données recueillies par les élèves, tout en choisissant des situations permettant de limiter le temps de recueil de ces données.

> À cette occasion, on s'attachera à :
> – définir une problématique ou une question précise motivant un recueil de données expérimentales,
> – définir les données à recueillir, leur codage et les traitements statistiques qu'on appliquera pour avoir des éléments de réponses à la question posée,
> – élaborer un protocole de recueil et aborder les problèmes que cela pose.
> Proposition d'exemples : battements cardiaques, estimation de longueurs, durée des repas du soir, nombre et durée de conversations téléphoniques, temps de passage en caisse dans une grande surface, etc.

Soulignons une fois de plus que, ainsi qu'on le voit ici, le schéma d'étude statistique auquel nous nous référons est bien présent dans les programmes, même s'il n'est pas explicité en chacun d'eux. Le programme de la première ES est en effet, sur ce point, en retrait par rapport au programme de la première L, comme l'indique très explicitement ce commentaire où transparaît nettement la tension entre « général » et « spécial » :

> On n'abordera pas les problèmes de recueil des données qui varient considérablement d'un domaine à l'autre ; ces questions font l'objet d'enseignements spécifiques dans les études qu'un élève de ES est susceptible d'entreprendre ultérieurement (sciences humaines, économie, finances, etc.).

Pour la classe de première S, on se heurte à la même admonestation, quoiqu'en termes plus elliptiques :

> La statistique descriptive a une part modeste dans la série S ; en particulier, on n'aborde pas les problèmes de recueil des données qui varient considérablement d'un domaine à l'autre ; ces questions font l'objet d'enseignements spécifiques dans les études qu'un élève de S est susceptible d'entreprendre ultérieurement.

Pour le contraste, notons encore que, en première L, la présentation générale du programme indique ceci :

> Le but de cette année de première est de consolider les bases rendant les élèves capables, avec l'expérience :
> – de représenter, commenter et résumer des données qu'ils ont eux-mêmes recueillies ou recherchées ;
> – de critiquer de façon constructive les formulations, commentaires et interprétations de données chiffrées ou graphiques diffusés par certains médias.

On voit ici nettement l'infléchissement vers l'idée d'un enseignement de la statistique décliné en fonction de la « spécialisation » des études secondaires suivies. Cette attitude n'était peut-être pas présente au tout début de la conception de ces nouveaux programmes puisque le programme de seconde, premier à paraître, indiquait, sans distinction de cas : « en classe de première et de terminale… on amorcera une réflexion sur le problème de recueil des données. » Mais qu'en est-il alors en seconde s'agissant des données ? La mention précédente montre que la recherche de données *par les élèves* n'y est pas une exigence de base, hormis bien sûr en ce qui concerne le thème de la simulation – sur lequel nous nous arrêterons plus loin. Le problème de la disponibilité de données se déporte alors sur l'enseignant et sur le manuel utilisé : d'où viennent les données que ceux-ci proposent ? S'agissant du manuel examiné, on peut d'abord mettre de côté le cas de données purement numériques qui ne correspondent pas à un dénombrement ou à un mesurage effectifs de grandeurs : de telles données sont manifestement fabriquées par les auteurs (ou recopiées par eux dans d'autres ouvrages) et ont surtout pour but de servir les objectifs didactiques assignés au travail proposé aux élèves. On notera simplement ici que si de tels travaux – baptisés le plus souvent « exercices » – sont foncièrement légitimes, notamment pour ce moment crucial de l'étude durant lequel se « travaille » l'organisation mathématique en cours de mise en place dans la classe, leur prépondérance au détriment de travaux relatifs à des situations du monde non purement mathématiques constituerait une dérive par rapport à un enseignement *motivé* de la statistique. Tout semble indiquer cependant que cette dérive-là, toujours possible, est relativement bien maîtrisée dans le manuel auquel nous nous référons ici. Cela précisé, lorsque les travaux proposés font référence à des situations du monde non purement mathématiques, le problème se pose de savoir s'il s'agit de données réelles, ou du moins réalistes, et comment elles ont été « construites » – avec l'idée que viendra un moment dans la formation statistique du citoyen où il lui sera fait dévolution de cette construction, du moins en un certain nombre de cas. À cet égard, le manuel de la collection Hyperbole laisse le lecteur sur sa faim. C'est ainsi que l'indication d'une source des données n'apparaît qu'*une* fois [35]. En bien des cas, sans doute, les données proposées sont tirées de documents en principe fiables : ainsi par exemple de la répartition des élèves entre école, collège, lycée et lycée professionnel durant l'année scolaire 1998-1999 [36]. Là comme ailleurs, l'absence d'indication de la source a sans doute, pour les auteurs, un mérite des plus utiles : elle permet d'arranger quelque peu – à des fins didactiques – les données proposées aux élèves [37].

---

[35] Il s'agit de l'exercice 42 page 22 : les auteurs précisent que la source est en ce cas l'INSEE.

[36] Il s'agit de l'exercice 45 page 23.

[37] Une note d'information du ministère de l'Éducation nationale intitulée *Les élèves du second degré dans les établissements publics et privés à la rentrée 1998* (ftp://trf.education.gouv.fr/pub/edutel/dpd/ni9915.pdf) indique ainsi que l'effectif des élèves est, au collège, de 3 168 757, au lycée général et technologique de 1 477 252, au lycée professionnel de 708 263. Le fait qu'il s'agisse des chiffres pour la France *métropolitaine* explique peut-être en partie, mais en partie seulement, le désaccord avec les données proposées par les auteurs du manuel

Comment se comporte le manuel Déclic fasse aux obstacles identifiés jusqu'ici ? Un premier trait formel se remarque immédiatement : les données proposées sont plus souvent « sourcées ». C'est ainsi qu'à propos d'un tableau donnant le nombre d'enfants par ménage (et non par famille : le changement de vocabulaire est significatif), les auteurs indiquent : « *Source* : INED – *Recensement de 1990.* Sondage au 1/20. » D'une façon générale, la principale source explicite des auteurs est l'INSEE, dont l'adresse du site Internet est fournie au lecteur dès la première page du chapitre de statistique et dont les auteurs utilisent notamment le cédérom *TEF* (*Tableaux de l'économie française*). À cela s'ajoutent d'autres sources dont quelques-unes sont précisées (il peut s'agir par exemple de la DPD, la Direction de la prospective et du développement du ministère de l'Éducation nationale) mais dont beaucoup, dont on peut supputer l'existence (telle la source dont ont été tirées les altitudes des principaux sommets de l'Himalaya), ne le sont pas. La référence à la DPD concerne des données relatives au bac professionnel, de 1989 à 1999. Les auteurs indiquent ici aux élèves – sans qu'il s'agisse d'une injonction essentielle dans le travail demandé – de « rechercher au CDI les derniers chiffres connus ». C'est là, sauf erreur, l'unique invitation à rechercher des données *par soi-même* – si l'on excepte le cas plus particulier d'une fiche de travaux dirigés relative à la fluctuation d'échantillonnage et portant sur la fréquence des lettres en français. En ce dernier cas, l'énoncé fait certes obligation à l'élève de se procurer des données, mais la manière de le faire est assez strictement encadrée, comme le précise la fiche :

> Chaque élève choisit comme échantillon les dix premières lignes d'une page du livre étudié actuellement en français, dans les pages 100 à 299.

À la fin de la fiche, dans une rubrique intitulée *Pour aller plus loin*, les auteurs proposeront une autre excursion hors de l'univers immédiat des élèves en complétant ainsi la consigne précédente :

> Au CDI ou sur Internet, rechercher la distribution des fréquences de chaque lettre en français. Comparer à chacun des échantillons ci-dessus. Rechercher une raison à la distribution des lettres dans le jeu de Scrabble®.

S'il y a donc ainsi une claire référence au monde extramathématique, en beaucoup de cas cette référence s'allège : si on laisse de côté, à nouveau, les exercices – qui représentent environ 6 % du total des exercices proposés – dans lesquels les séries statistiques sont

---

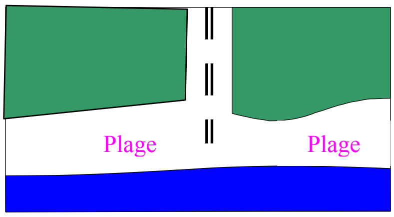
examiné, à savoir 3 357 000, 1 529 000, 806 000 : on peut en effet rejeter à coup sûr la conclusion qu'il y aurait près de 100 000 élèves dans les lycées professionnels des DOM-TOM ! (Sur ce point, voir par exemple ftp://trf.education.gouv.fr/pub/edutel/dpd/rers01/chap11.pdf.)

purement numériques, près de 75 % des exercices ne comportent pas de sources explicites, même si, il est vrai, on imagine aisément que, dans un certain nombre de cas (mariage et divorces en France entre 1980 et 1997, effectif dans l'enseignement supérieur de 1960 à 1997, etc.), il s'agit de données authentiques, parfois toilettées peut-être, mais sans doute prises aux meilleures sources. Cela noté, le manuel examiné inscrit les travaux qu'il propose dans des champs extramathématiques relativement diversifiés : notes obtenues en classe ou dans un concours sportif (patinage artistique, lancer de poids), chiffres d'affaires d'entreprises, prix de produits, parts de marché en matière de grande distribution, données macroéconomiques, sociologiques, démographiques, biométriques, géographiques, physiques, etc. Dans cette traversée de divers paysages extramathématiques voire extrascolaires, l'élève peut-il apprendre quelque chose du monde ? Rappelons d'abord que, si un tel apprentissage advient, il ne procède que bien rarement de la dévolution aux élèves d'une question sur le monde à laquelle le travail proposé permettrait de répondre. Car semblable question, on l'a montré plus haut, n'existe pas de manière régulière : les quelques cas que l'on peut recenser (est-il vrai que dans tel concours les garçons ont eu de meilleurs résultats que les filles ? Est-il anormal que la température se situe 4 °C au-dessus des normales saisonnières ? Le nombre π est-il un nombre « normal » ? Est-il exact que les naissances ne sont pas régulièrement réparties au cours des mois de l'année ? L'être humain est-il un bon simulateur de hasard ?) semblent devoir leur explicitation formelle au fait d'apparaître saillants en quelque façon dans la culture commune ou dans la culture mathématique (ou dans leur rencontre). Dans d'autres cas, on peut trouver en tête de l'énoncé ce qui apparaît moins comme une question que comme les circonstances du travail proposé, lequel n'est pas ordonné à la production d'une réponse à une question qui, en fait, n'est pas posée, même si une telle réponse peut en apparaître comme un sous-produit. Ainsi en va-t-il par exemple dans l'exorde de cet exercice proposé sous la rubrique *Les indicateurs* [38] :

> Un fabricant de chaussures pour hommes s'interroge sur l'organisation de la chaîne de fabrication. Il veut à la fois éviter d'être en rupture de stock sur une pointure qui se vend fréquemment, et ne pas investir sur la fabrication de pointures trop rares.

[38] Il s'agit de l'exercice 10, page 189.

Dans d'autres cas, les circonstances explicitées en tête d'énoncé apparaissent plus allusives



encore. Ainsi d'un exercice relatif à une plage de sable au bord de la mer où les baigneurs s'installent et à laquelle donne accès un chemin perpendiculaire à la mer – situation à propos de laquelle sont fournies des données numériques introduites par le chapeau suivant [39] :

> On a compté le nombre de personnes installées sur cette plage suivant la distance les séparant de l'axe de chemin d'accès (de 5 mètres en 5 mètres).

Comme on le voit, rien n'est explicité de ce qui motive ce recueil de données. Il semble que, moins on procède à des recueils effectifs de données, plus il est facile d'imaginer que *d'autres* recueillent des données sans avoir de motif avoué de le faire [40] ! Plus encore peut-être que le manuel de la collection Hyperbole, celui de la collection Déclic propose à ses utilisateurs des situations d'*ébauche* d'inférence statistique. Ces situations appellent évidemment, en principe, la formulation préalable d'une question – en principe seulement, car, à propos des poireaux avec engrais et sans engrais, on a pu constater l'absence formelle de question et, selon une rhétorique qu'on vient de souligner, la simple mention corrélative des circonstances où prend place le recueil des données sur lesquelles l'élève aura à travailler sans en connaître mieux la raison d'être. À cet égard, le manuel Déclic ose aller un peu plus loin, en faisant des situations évoquées davantage qu'un décorum d'un travail de description statistique. Dans l'un des exercices, il est question de tester la qualité d'un nouveau modèle de fauteuil du point de vue de sa durée de vie : on apprend à la quatrième question seulement que le but de la société qui le fabrique est de s'assurer ainsi que la moitié au moins des fauteuils dépassent 200 heures de vie [41]. Tous les ingrédients pour cela sont certes présents, à l'exception bien sûr des outils formels d'inférence statistique ; en sorte que l'échantillon étudié satisfaisant à la condition requise, l'énoncé se termine par cette interrogation : « Peut-on, avec certitude, conclure de la même façon avec l'ensemble de la production ? » D'une manière générale l'organisation des énoncés proposés suit un modèle désormais bien connu. Une autre petite étude commence ainsi [42] :

[39] Il s'agit de l'exercice 33, page 193.

[40] On peut se demander si les données proposées sont le fruit d'une collecte réelle ou procèdent d'un recopiage ou même d'une pure invention.

[41] Il s'agit de l'exercice 12, page 190.

[42] Il s'agit de l'exercice 13, page 190.

Dans une usine de conserves on remplit les boîtes à l'aide d'un système automatisé. Pour en vérifier le réglage, on prélève au hasard 80 boîtes et on pèse leur contenu (masse nette).

Ce n'est qu'à la dernière question que l'on apprendra ce qu'est l'interrogation qui a motivé cette manœuvre. La chose est formulée ainsi :

Quelle masse, à 5 g près, doit-on indiquer sur les étiquettes pour que 95 % des boîtes contiennent plus que ce qui est indiqué ?

La relation entre le travail demandé aux élèves et les problèmes du monde est ainsi plus ou moins occultée, en sorte qu'on doit se demander ce qu'un tel enseignement de la statistique enseigne sur la place de la statistique parmi les savoirs, autrement dit si, en permettant, même de façon subreptice, fragmentaire, erratique, d'acquérir des connaissances sur le monde, il permet aussi d'acquérir des connaissances *sur* la statistique.

L'exemple des fréquences des lettres dans la langue française et du jeu de Scrabble® peut à cet égard nous éclairer [43]. Si rien jusque-là n'a mis l'élève en contact avec les connaissances apportées par les résultats établis par la statistique linguistique [44], ce qui est hautement probable, le travail proposé par le manuel Déclic – qui comporte notamment un extrait de l'ouvrage de Georges Perec, *La disparition* [45] – peut l'amener à découvrir le phénomène d'inégales fréquences des voyelles dans la langue française ou dans telle autre langue [46]. De manière certes plus anecdotique mais peut-être plus proche de son expérience personnelle, le travail proposé l'amènera alors *in fine* à comprendre un fait que sa familiarité éventuelle avec le jeu de scrabble a pu le conduire à observer sans même peut-être qu'il s'interroge sur sa raison d'être : l'inégale quantité de jetons disponibles portant une lettre donnée [47]. Sans doute un tel événement – la rencontre avec un phénomène à la fois proche et jusque-là non

---

[43] Il s'agit du TD 7, intitulé *Fluctuation d'échantillonnage*, page 182.

[44] Voir, par exemple, Muller (1973).

[45] L'ouvrage publié en 1969 aux éditions Denoël a cette particularité que l'auteur n'y emploie pas la voyelle *e*. C'est ainsi que, reprenant l'histoire de Moby Dick et du capitaine Achab, Perec écrit par exemple : « Alors, apparaissait Achab. Un sillon profond, d'un blanc blafard, traçait son cours parmi son poil gris, striait son front, zigzaguait, disparaissait sous son col. Bancal, il s'appuyait sur un pilon ivoirin, moignon royal qu'on façonna jadis dans l'os palatin d'un grand rorqual. » Notons que la traduction en anglais due à Gilbert Adair sous le titre *A Void* réussit à satisfaire la même contrainte que l'original en français.

[46] En français comme en anglais, la lettre *e* est la plus fréquemment employée. Mais, bien entendu l'anglais et le français n'ont pas la même distribution des fréquences d'emploi des lettres de l'alphabet.

[47] Cette interrogation pourra être le point de départ d'une petite étude sur les fréquences d'emploi des lettres en français et en anglais (par exemple), ainsi, alors, que sur la distribution des effectifs de jetons marqués des différentes lettres dans le scrabble anglophone et dans le scrabble francophone.

questionné – ne semble-t-il rare que du fait d'une conception naturaliste de la langue (et, de manière plus paradoxale encore, de la langue *écrite*). En réalité, bien d'autres exercices sont susceptibles d'apporter aux élèves (et, bien souvent, aux professeurs eux-mêmes) des connaissances parfois éclairantes sur les types de situations du monde auxquels ils se rapportent. Ainsi, l'élève pourra-t-il découvrir [48] que, d'après des données de l'INSEE datant de mars 1996, plus de 20 % de la population active aurait le niveau bac + 2, et que cette proportion atteindrait presque 40 % si l'on se restreint aux « professions intermédiaires [49] ». Mais la situation n'est pas toujours aussi simple : d'une part, comme on l'a vu, les données proposées ne sont pas parfaitement fiables et peuvent donc conduire à des conclusions erronées ; d'autre part, même lorsque les données (éventuellement un peu « stylisées ») sont fidèles, leur interprétation suppose une attention spécifique, faute de laquelle on se méprendra aisément. Ainsi pourrait-on se laisser surprendre par le tableau suivant, déjà évoqué :

nombre d'enfants par ménage	Nombre de ménages
0	6 473 980
1	3 667 420
2	3 345 680
3	1 350 940
4 et plus	548 920

[48] En travaillant sur l'exercice 1, p. 188 du manuel de la collection Déclic.

[49] La nomenclature 2003 des professions et catégories socioprofessionnelles des emplois salariés d'entreprise (PCS-ESE) comporte, au niveau 1, les 6 postes suivant : 1 Agriculteurs ; 2 Artisans, commerçants et chefs d'entreprises ; 3 Cadres et professions intellectuelles supérieures ; 4 Professions intermédiaires ; 5 Employés ; 6 Ouvriers. Au niveau 2 de description, elle comporte 29 postes, dont, pour les professions intermédiaires, les suivants : 42 Professeurs des écoles, instituteurs et professions assimilées ; 43 Professions intermédiaires de la santé et du travail social ; 44 Clergé, religieux ; 45 Professions intermédiaires administratives de la fonction publique ; 46 Professions intermédiaires administratives et commerciales des entreprises ; 47 Techniciens (sauf techniciens tertiaires) ; 48 Contremaîtres, agents de maîtrise (maîtrise administrative exclue). Au niveau 3, elle se déploie en 412 postes, dont les suivants (par exemple) : 421a Instituteurs ; 421b Professeurs des écoles ; 422a Professeurs d'enseignement général des collèges ; 422b Professeurs de lycée professionnel ; 422c Maîtres auxiliaires et professeurs contractuels de l'enseignement secondaire ; 422d Conseillers principaux d'éducation ; 422e Surveillants et aides-éducateurs des établissements d'enseignement. Notons que l'énoncé de l'exercice proposé, qui n'entre pas dans ce détail, se contente d'indiquer entre parenthèses : « Voir la définition des "CSP" dans un livre de SES ou en documentation au CDI. » L'étude de la classification socioprofessionnelle est au programme de l'enseignement – optionnel – des SES en seconde.

Une interprétation erronée mais sans doute assez spontanée chez certains lecteurs – élèves ou autres – pourra conduire à s'étonner du grand nombre de ménages *sans enfants*. En réalité, il semble qu'il faille d'abord lire ici « nombre d'enfants par *famille* » (et non pas par *ménage*), et savoir en outre qu'un couple peut avoir eu de nombreux enfants et constituer pourtant une famille sans enfant – et cela, pour l'INSEE, même si vit sous son toit, et fait donc parti du ménage, un de ses enfants dès lors que celui-ci est marié et vit avec son conjoint, etc. [50].

Les « découvertes » précédentes ont un caractère généralement erratique. Un cas toutefois s'impose à l'observateur par sa singularité, celui d'un type de phénomènes dont les auteurs de manuels et, à leur suite, nombre de professeurs, semble-t-il, ont découvert l'exploitation possible en seconde à l'occasion du changement de programme : le phénomène dit des *effets de structure*, notion qui, sauf erreur, est apparue dans la culture mathématique du lycée par l'entremise du programme de 1re ES entré en vigueur en 1993. Dans la culture des statisticiens, la notion est, bien sûr, classique, dans la mesure où elle éclaire nombre de résultats à première vue paradoxaux pour le profane (c'est-à-dire, en ce domaine, pour à peu près tout le monde). Dans son petit ouvrage intitulé *Comprendre les statistiques* et paru en 1979, Michel Louis Lévy lui consacre ainsi d'assez longs développements qui, significativement, prennent place dans un chapitre intitulé *Les pièges des moyennes*. C'est à

[50] On trouve sur le site Internet de l'INSEE (http://www.insee.fr/fr/ffc/circo_leg/menages.htm) les précisions suivantes : « La définition du ménage correspond au concept de "ménage-logement" (…). La famille s'entend comme un cadre susceptible d'accueillir un ou des enfants. Elle est constituée d'au moins deux personnes, dont au moins un adulte. Toute personne qui ne fait partie d'aucune famille est appelée "personne isolée". Un ménage peut comprendre zéro, une ou deux familles. Le cas où un logement comporte trois familles est extrêmement rare, on considère alors les membres de la troisième famille comme des "isolés' ou "hors famille". Dans chaque ménage, il est désigné une unique personne de référence du ménage grâce à une règle basée sur la prédominance donnée aux familles, aux pères, à l'activité et à l'âge. Il est ainsi nécessaire de déterminer au préalable les familles. » S'agissant de la famille et des enfants, le même document indique ceci : « Chaque personne d'un ménage ne peut appartenir, tout au plus, qu'à une seule famille. Une famille comprend soit un couple (marié ou non) et, le cas échéant, ses enfants, soit une personne sans conjoint et ses enfants (famille monoparentale). L'enfant de la famille est compté comme tel quel que soit son âge, s'il n'a pas de conjoint ou d'enfant vivant dans le ménage avec lesquels il constituerait alors une famille en tant qu'adulte. Ce peut être l'enfant des deux parents, de l'un ou de l'autre, enfant adopté, enfant en tutelle de l'un ou l'autre parent. Aucune limite d'âge n'est fixée pour être enfant de la famille. Un petit-fils ou une petite-fille n'est pas considéré comme "enfant de la famille". On définit alors les familles comprenant un couple – les couples étant des couples de fait (mariés ou non) – et les familles monoparentales. On appelle familles monoparentales les familles composées d'un père ou d'une mère de famille sans conjoint avec un ou plusieurs enfants. » Comme la question des CSP, la question de la famille (et la notion de ménage) figure au programme de SES de la classe de seconde.

ce titre – par leur relation à la notion de moyenne – que, semble-t-il, les effets de structure entrent dans les manuels de seconde préparés pour la rentrée 2000. Plusieurs manuels proposent en effet des exercices qui permettent de toucher du doigt ce type de paradoxes. Certains le font sans introduire l'expression d'effet de structure, avec, apparemment, pour souci principal d'enrichir leur corpus d'exercices en situations « intéressantes ». Dans d'autres manuels, on peut observer la trace de l'entrée récente de cette notion dans le corpus des mathématiques enseignées au lycée. C'est ainsi que dans la section 4, intitulée *Réfléchir sur l'information chiffrée*, du chapitre consacré à la statistique, les auteurs du manuel de la collection *Pyramide* ont, chose rare, éprouvé le besoin de mentionner l'origine du matériel qu'ils proposent, comme s'il n'était pas encore tombé dans le domaine public : en l'espèce, ils disent l'emprunter à un livre de Jean-Louis Boursin intitulé *La statistique du quotidien* (paru chez Vuibert en 1992), en notant dans la marge cette glose :

> *L'explication du paradoxe* : c'est la *différence de structure* des deux entreprises qui explique tout (24 ingénieurs, 1 ouvrier dans *A*, 1 ingénieur, 24 ouvriers dans *B*).

À l'instar de ces auteurs [51], nombre d'auteurs peu familiers avec ce type de phénomènes ont dû le découvrir comme un fait autour duquel pouvait se nouer un intérêt partagé des professeurs et des élèves. Avant d'aller plus loin, on en donne ici, pour mémoire, une présentation concise.

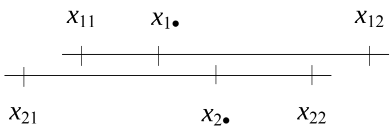
> Soit une population E sur laquelle on considère deux partitions distinctes, constituées l'une et l'autre de deux classes seulement : $E = A_1 \cup A_2 = B_1 \cup B_2$ (avec $A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 = \varnothing$). On peut dresser le tableau suivant

E	B_1	B_2
A_1	e_{11}	e_{12}
A_2	e_{21}	e_{22}

> où $e_{ij} = \text{Card}\, A_i \cap B_j$. On a : $\text{Card}\, A_1 = e_{11} + e_{12}$, $\text{Card}\, B_1 = e_{11} + e_{21}$, etc. Soit alors un caractère numérique X défini sur E ; on note x_{ij} la moyenne de X sur $A_i \cap B_j$. Le phénomène « paradoxal » est le suivant : il se peut que l'on ait $x_{1j} > x_{2j}$ pour $j = 1, 2$, et pourtant que la moyenne de X sur A_1, $x_{1\bullet}$, soit inférieure à la moyenne $x_{2\bullet}$ de X sur A_2 : $x_{1\bullet} < x_{2\bullet}$. Pour le dire autrement, il se peut par exemple que, dans une entreprise, les A_1 qui sont B_1 soient mieux payés, en moyenne, que les A_2 qui sont B_1, et que, de même, les A_1 qui sont B_2 soient mieux payés, en moyenne, que les A_2 qui sont B_2, mais que, pourtant, les A_1 soient, en moyenne, moins bien payés que les A_2 ! Comment expliquer cela ? Avec des

[51] Il s'agit, en l'espèce, d'une équipe dirigée par Pierre-Henri Terracher.

notations évidentes, on a : $x_{1\bullet} = \frac{e_{11}}{e_{1\bullet}} x_{11} + \frac{e_{12}}{e_{1\bullet}} x_{12}$ et $x_{2\bullet} = \frac{e_{21}}{e_{2\bullet}} x_{21} + \frac{e_{22}}{e_{2\bullet}} x_{22}$. Le schéma suivant, interprété en termes de barycentres, achève alors l'explication :



Dans une entreprise qui salarie des employés (B_1) et des cadres (B_2), il se peut ainsi que les hommes employés ($A_1 \cap B_1$) soient mieux payés, en moyenne, que les femmes employés ($A_2 \cap B_1$), que les hommes cadres ($A_1 \cap B_2$) soient mieux payés, en moyenne, que les femmes cadres ($A_2 \cap B_2$), et pourtant que le salaire moyen des salariés hommes (A_1) soit inférieur au salaire moyen des salariés femmes (A_2). Le « paradoxe » n'est, bien sûr, pas forcément aussi frappant : il se peut par exemple que x_{11} soit supérieur à x_{21} de 15 %, que x_{12} soit supérieur à x_{22} de 20 % et que $x_{1\bullet}$ ne soit supérieur à $x_{2\bullet}$ *que* de, disons, 4 %, etc.

Dans plusieurs manuels, le phénomène est présenté dans le cadre d'exercices (ou d'activités) et le nom – effet de structure – est introduit (en même temps que, selon l'usage dominant par ailleurs, on n'indique pas la source éventuelle du matériel proposé). Ainsi en va-t-il dans les deux manuels que nous avons suivis jusqu'ici. Dans le manuel de la collection Déclic, la rubrique des exercices comporte une sous-rubrique intitulée *Moyennes partielles* ; son dernier exercice est précisément intitulé *Effet de structure* – il est au reste fort simple. En réalité, ce type de phénomènes est mis en avant – sans le nom – dès la fiche de travaux dirigés n° 5 déjà évoquée à propos de la question « Est-il vrai que dans tel concours les garçons ont eu de meilleurs résultats que les filles ? » Le titre de la fiche en explicite le motif : *Moyenne à partir de moyennes partielles*. On retrouve ce fait que les auteurs ont sans doute pensé enrichir par là ce qu'ils proposaient sur la question des « moyennes partielles ». Le manuel Hyperbole, semblablement, propose deux exercices dont le premier est intitulé *Effet de structure* (il a trait à deux entreprises, des ouvriers et des cadres et des salaires moyens) tandis que le second se rapporte à des taux de réussite au baccalauréat et possède la même structure exactement que l'exercice intitulé *Effet de structure* dans le manuel Déclic. Notons que l'introduction de la question des effets de structure, même sous la forme d'un matériel permettant de faire travailler une organisation mathématique et la maîtrise qu'on en a, résulte ici d'une méprise dans l'interprétation du programme de seconde. Celui-ci, en effet, ne parle, à titre de capacité attendue, que de « calculer la moyenne d'une série à partir de moyennes de sous-groupes », manœuvre calculatoire fort opportune que le programme oppose explicitement à l'impossibilité d'opérer de manière analogue avec la médiane. La meilleure preuve en est que, en première ES, le programme entré en vigueur en 2001 comporte explicitement la notion d'effet de structure – comme notion à étudier, et pas seulement comme occasion de manipulation de moyennes [52].

Il semble que le succès rencontré par le phénomène des effets de structure constitue, par rapport à certaines contraintes didactiques, un optimum rare. Tout d'abord, sur un sujet que les professeurs regardent sans doute comme terne, il s'agit là d'un motif qui apporte un peu de brillant, par le fait même que son contenu apparaît paradoxal, contraire à une « évidence » de sens commun sur laquelle chacun, dans la classe et ailleurs, peut spontanément s'accorder. En cela, il commence par instaurer une distance indéniable entre le professeur et les élèves. Mais la distance ainsi créée est vite gommée par un travail arithmétique tout simple, complètement maîtrisable. L'étonnement d'abord provoqué – réellement ou hypothétiquement – cède ainsi rapidement à l'efficace des calculs. Bien entendu, au-delà de cette minuscule aventure vécue en classe, une compréhension véritable du ressort des effets de structure – dont l'étude se borne ici à un constat plutôt qu'elle n'en élucide l'origine – risque de faire durablement défaut, la question étant ensuite abandonnée à nouveau aux paralogismes du sens commun. C'est donc à bon droit, à cet égard, que les auteurs de la collection *Pyramide* font précéder les deux situations où l'on touche du doigt un effet de structure d'une formulation en demi-teinte de l'objectif assigné aux deux petites études correspondantes : « Réfléchir sur quelques situations plus délicates (même pour le statisticien)… » De fait, le commentaire rapporté plus haut – « c'est la différence de structure […] qui explique tout » – a toutes chances de demeurer une boîte noire, qui contient certes la clé de l'énigme, mais dont on n'ira pas explorer plus avant le contenu. D'une manière beaucoup plus générale, on voit ainsi que l'étude de la statistique est l'occasion de brèves rencontres quelque peu… aléatoires avec des connaissances sur le monde qui, si elles peuvent être le point de départ ou un point d'appui d'une étude plus approfondie, n'en donnent au mieux, ordinairement, qu'un avant-goût.

4. Fluctuation d'échantillonnage et simulation

Les concepteurs du programme de seconde font, en théorie, du phénomène de fluctuation d'échantillonnage un élément cardinal de la formation à la statistique en seconde, puisqu'ils n'hésitent pas à écrire : « L'esprit statistique naît lorsqu'on prend conscience de l'existence de

[52] C'est ainsi que le document d'accompagnement du programme de première ES, qui explicite un exemple d'effet de structure, précise qu'il convient de veiller « à ce que les questions et exemples traités mènent à une réflexion conceptuelle ».

fluctuations d'échantillonnage. » La prise de conscience de ces phénomènes est en effet essentielle à plusieurs titres. Si l'on définit la statistique comme la science de la variabilité, la première découverte dans le cadre de la construction d'une *statistique expérimentale*, qui fonde celle-ci comme projet scientifique, est celle de la fluctuation des valeurs recueillies lorsqu'on observe un caractère X : tel est le point de départ absolu. Les rédacteurs du programme le rappellent : « au collège, les élèves se sont familiarisés avec les phénomènes variables ». En principe, donc, cette première découverte a été faite, même si l'on n'est pas assuré qu'elle ait été bien faite. Cela noté, l'observation d'une valeur d'une variable X correspond à l'extraction d'un échantillon de taille $n = 1$: la notion d'échantillon vient ainsi généraliser le cadre du travail statistique ouvert aux élèves [53]. Or la découverte qu'il s'agit de thématiser en seconde, c'est bien que la variabilité des valeurs observées s'étend aux échantillons eux-mêmes, quelle que soit leur taille : deux échantillons de taille 20, par exemple, ne comporteront en général pas les mêmes valeurs (du moins dans le cas où l'ensemble des valeurs possibles est suffisamment grand) et, en tout cas, ne présenteront pas les mêmes distributions d'effectifs des valeurs de la variable, sauf exception empiriquement rarissime. Telle est la grande découverte à laquelle les programmes en vigueur assignent pour lieu la classe de seconde, ce que le document d'accompagnement rappelle sobrement :

> Les distributions des fréquences varient d'un échantillon à l'autre d'une même expérience : c'est ce qu'on appellera en classe de seconde la fluctuation d'échantillonnage.

Cette découverte définit le cadre dans lequel deux autres découvertes seront réalisées : tout d'abord, la moyenne de l'échantillon, sa médiane également, fluctuent avec l'échantillon ; ensuite, les fluctuations d'échantillonnage tendent à diminuer lorsque la taille de l'échantillon augmente. Ce que le document d'accompagnement explicite dans les termes suivants :

> … en seconde, l'élève constatera expérimentalement qu'entre deux échantillons, de même taille ou non, les distributions des fréquences fluctuent ; la moyenne étant la moyenne pondérée des composantes de la distribution des fréquences est, elle aussi, soumise à fluctuation d'échantillonnage ; il en est de même de la médiane. On observera aussi que l'ampleur des fluctuations des distributions de fréquences calculées sur des échantillons de taille n diminue lorsque n augmente.

Il s'agit bien ici d'une étude *expérimentale*, qui, littéralement, précède la théorie proprement dite, qui sera fondée sur le calcul des probabilités. Là encore le document d'accompagnement se veut des plus clairs :

[53] Nous avons vu plus haut des auteurs – Georges Reeb et Aimé Fuchs – articuler leur exposé autour du passage de $n = 1$ à n quelconque.

Le choix pédagogique est ici d'aller de l'observation vers la conceptualisation et non d'introduire d'abord le langage probabiliste pour constater ensuite que tout se passe comme le prévoit cette théorie.

Mais c'est alors que surgit le grand problème de l'expérimentation, sur lequel nous nous arrêterons un instant.

Une question posée par une élève professeure de deuxième année [54] traduit bien ce fait et fourni un écho naïf mais, nous semble-t-il, fidèle, d'une partie au moins des contraintes sous lesquelles le professeur devra travailler :

Quels sont les éléments technologiques ou théoriques qui sous-tendent les fluctuations d'échantillonnage ? S'agit-il uniquement de probabilités ? Certains de ces éléments sont-ils accessibles à un élève de 2de ? Ou doit-on se contenter de faire expérimenter aux élèves les fluctuations d'échantillonnage dans le cadre d'une AER ?

La question témoigne sans doute du fait que l'examen des manuels, auquel cette professeure stagiaire a pu procéder, ne lui a apporté qu'un très pauvre trésor d'éléments technologico-théoriques concernant la fluctuation d'échantillonnage ! Mais elle montre également, derrière un souci louable et didactiquement sain, la pression tout à la fois d'une théorie toute faite (aujourd'hui), la théorie probabiliste des phénomènes de variabilité, et de la minoration, voire de la péjoration des pratiques expérimentales dans la classe de mathématiques. Il s'agit là en effet d'une contrainte essentielle, qu'il faut situer au niveau de la discipline enseignée – les mathématiques, dans leur forme scolaire au long des deux derniers siècles au moins. En principe, l'enseignement scolaire des mathématiques devrait pouvoir être regardé à bon escient comme le lieu par excellence où l'étude des phénomènes de spatialité, de « numérosité » et de variabilité se concrétise d'abord en une géométrie *expérimentale*, une arithmétique *expérimentale*, une statistique *expérimentale*, sur lesquelles se construira dialectiquement, quoique avec un certain décalage dans le temps de l'étude, ce qui fait le propre des mathématiques : une géométrie *théorique*, une arithmétique *théorique*, une statistique *théorique*, c'est-à-dire une géométrie, une arithmétique, une statistique *hypothético-déductives* [55]. Or les contraintes propres à la discipline enseignée, telle que l'histoire l'a constituée, apparaissent tenacement hostiles à la pratique de l'expérimentation, dans la mesure où on lui refuse une dignité épistémologique égale à celle accordée au travail

[54] À l'occasion du séminaire du mardi matin, longuement évoqué dans le chapitre 5.

[55] Selon l'expression due au géomètre italien Mario Pieri (1899).

théorique. L'obstacle ainsi opposé à l'évolution de l'enseignement des mathématiques vers une plus grande authenticité épistémologique reste aujourd'hui à peu près inentamé [56].

Le problème de l'expérimentation comporte toutefois, s'agissant des phénomènes de variabilité, des contraintes supplémentaires, propres au *domaine* de la statistique. D'une manière générale, se procurer un échantillon n'est pas chose simple. Ce que nous avons vu plus haut à propos du recueil des données ne montre pas seulement que cette pratique est étrangère à la culture des mathématiques enseignées, mais aussi, indubitablement, qu'il s'agit là d'une opération intrinsèquement délicate et coûteuse. La chose est si connue que, dans un ouvrage intitulé *Principles of Statistics* (1971), l'auteur, Victor E. McGee, fait figurer à côté des notions d'échantillon aléatoire, d'échantillon représentatif et d'échantillon biaisé, la notion d'échantillon *disponible*, à propos de laquelle il peut écrire [57] :

> Beaucoup de recherches sont fondées sur des échantillons disponibles. En fait, aux États-Unis, la recherche effectuée dans le domaine psychologique sur des êtres humains a été caractérisée par l'étude des étudiants de deuxième année, et il est fréquent pour les étudiants suivant des cours d'introduction en psychologie d'être récompensés (par une note meilleure) pour avoir participé à des expériences psychologiques. Dans beaucoup de cas il n'y a rien à redire à cette procédure.

Le choix va alors se porter vers un type d'expérimentation le moins coûteux possible, et donc portant sur des phénomènes variables que l'on peut, en quelque sorte, produire et reproduire à volonté et à faible coût. On cherchera donc moins à recueillir un échantillon de tailles ou de poids par exemple (car s'il est vrai qu'obtenir un tel échantillon est déjà difficile, en obtenir deux ou plus l'est bien davantage) qu'à produire des échantillons de lancers de dés, de pièces, etc. Au croisement des deux, il serait bien sûr possible, à l'aide de chiffres au hasard, de tirer des échantillons aléatoires d'une population vaste sur laquelle on se serait procuré les valeurs de différents caractères. Tel est par exemple le parti pris de certains enseignements. Ainsi en allait-il, avant l'ère des ordinateurs bon marché, dans un livre intitulé *StatLab* dont les auteurs

[56] Les types de « manipulations » que l'on peut voir vivre dans les classes de collège ne doivent pas, sur ce point, faire illusion. Sauf exception, leur présence se justifie, dans les théories indigènes de l'enseignement des mathématiques, non par le fait qu'elles seraient consubstantielles à la création de mathématiques, mais parce qu'elles apparaissent comme une aide à la compréhension – comme un artifice didactique, donc – dès lors qu'on aurait affaire à de jeunes élèves. Leur raison d'être est ainsi « psychologique », et non épistémologique. Leur présence vise une efficacité didactique supposée et ne cherche pas à restituer une plus grande authenticité au travail mathématique.

[57] Nous citons ici la traduction française de cet ouvrage : McGee (1975), p. 30. L'ouvrage est sous-titré significativement : *Introduction empirique à la statistique*. Le « il n'y a rien à redire à cette procédure » doit être entendu, nous semble-t-il, du point de vue de la « qualité » de l'échantillon, non du point de vue éthique.

proposaient au lecteur un fichier relatif à 1296 familles, pour lesquelles les valeurs de 32 variables avaient été recueillies [58]. Mais le programme de seconde ne prend pas ce parti et pousse en avant le simple recours à des expériences « familières », en arguant des leçons de l'histoire, comme le souligne ce passage du document d'accompagnement :

> Aborder la notion de fluctuation d'échantillonnage se fera en premier lieu dans des cas simples (lancers de dés, de pièces), où la notion d'expériences identiques et indépendantes est intuitive et ne pose pas de problème ; l'élève reprendra ainsi contact avec des expériences aléatoires familières (lancer de dés équilibrés) et les enrichira. Historiquement, l'honnête homme du XVII^e siècle s'est familiarisé à l'aléatoire en pratiquant les jeux de hasard ; maintenant, les calculatrices et les ordinateurs permettent la production aisée de listes de chiffres au hasard ; la production de telles listes fera partie, à coté des lancers de dés ou de pièces équilibrés, à côté de tirage de boules dans des urnes, du bagage d'expériences de référence de l'élève. L'étude de ces expériences de référence sera ainsi à la base de la formation sur l'aléatoire des élèves.

Ce parti pris ne saurait être sans conséquences. Rappelons, ici, un fait essentiel. Quand on parle de description statistique, l'idée que l'on a en tête, de façon fréquemment floue, il est vrai, c'est que l'on veut décrire une certaine *population* – elle-même souvent définie au départ de manière implicite et pour cela imprécise. L'objectif est donc bien de décrire une population, et non des *échantillons* de cette population. La description d'*échantillons* n'est qu'un moyen au service d'une fin. Les difficultés de description de la population sont alors fondamentalement liées au phénomène de fluctuation d'échantillonnage, qui constitue le principal obstacle au passage de la description d'échantillons à la description de la population tout entière. Or, dans une certaine tradition d'enseignement qui a en quelque sorte hypostasié la description d'échantillons, le lien entre fin et moyens se trouve rompu ou, du moins, fortement affaibli. À cet égard, le programme de seconde en vigueur n'innove pas : « statistique descriptive », c'est-à-dire statistique descriptive *d'échantillons*, et ébauche de « statistique inférentielle » y constituent toujours deux mondes séparés, dans la tradition d'une transposition didactique malheureuse de la problématique et de la science statistiques [59]. En conséquence, le phénomène des fluctuations d'échantillonnage ne peut guère être abordé que de façon formelle, dès lors qu'il n'apparaît plus comme l'obstacle entre la description

[58] Voir Hodges, Krech & Crutchfield (1979).

[59] Cette transposition didactique opportuniste – s'agissant en particulier des institutions où les mathématiques de l'inférence statistique apparaissent peu abordables – est peut-être en même temps le rejeton du long conflit historique entre tenants des recensements exhaustifs et partisans des sondages : voir par exemple Droesbeke & Tassi (1990), chapitre IV.

d'échantillons et la description de la population dont on les a extraits. Il est à cet égard éclairant de considérer la possibilité évoquée un peu plus haut (que les concepteurs du programme ont, semble-t-il, écartée) : l'extraction d'échantillons d'un fichier de données relatives à une population nombreuse (pouvant dépasser sans grand dommage, aujourd'hui, la taille de la population des familles évoquée dans ce qui précède : 1296), en vue de parvenir à une bonne description de ladite population. Plusieurs contraintes ont certainement joué pour disqualifier une solution pourtant proche de la problématique statistique la plus authentique : toutes nous semblent relever de la discipline enseignée – les mathématiques, par opposition à d'autres disciplines. Le foyer de la difficulté tient toujours, peut-on penser, à l'extrême réticence manifestée dans la noosphère de l'enseignement des mathématiques – et chez les professeurs eux-mêmes – à voir la classe de mathématiques mise en relation plus ou moins organique, voire vitale, avec des mondes non mathématiques. Cette culture de l'autarcie « ontologique » peut expliquer, ainsi, que l'on n'ait pas envisagé comme à peu près obligatoire de mettre à la disposition des enseignants, à titre de document d'accompagnement du programme, un ou plusieurs équivalents du fichier des 1296 familles et des 32 variables du manuel *Statlab*. L'argument éventuel qui mettrait en avant la difficulté pratique à rendre disponible aux professeurs de mathématiques de tels outils de travail apparaît bien peu crédible devant la simple observation que, en physique-chimie, le document d'accompagnement actuel de la physique occupe 192 pages (et 20 Mo) tandis que celui de la chimie, occupe 193 pages (mais « seulement » 2 Mo). En réalité, c'est moins la contrainte liée au contenant éventuel qui a joué que la contrainte touchant au contenu même. À l'étude d'une ou plusieurs grandes populations (finies, mais nombreuses), authentiquement décrites par un nombre substantiel de caractères, la tradition de confinement de la classe de mathématiques conduit à préférer des données fabriquées *in situ* à l'aide d'un matériel restreint, discret – parce qu'« abstrait » – de dés et de pièces, et à préférer davantage encore, parce que relevant d'un niveau supérieur d'abstraction, les données simulées à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur. Ce choix, habile en ce qu'il contourne – sans les déplacer ! – certaines contraintes traditionnelles de l'enseignement des mathématiques au secondaire, paraît pourtant générateur de troubles dans la concrétisation du projet d'enseigner la statistique.

Pour mieux éclairer notre analyse, nous évoquerons rapidement une organisation alternative, qui vaudra ici surtout par le contraste qu'elle propose. Au lieu de lier la simulation à la fluctuation d'échantillonnage, le choix aurait pu être fait d'en différer l'introduction pour l'articuler à l'effort de théorisation probabiliste des phénomènes de variabilité engagé, aujourd'hui, à partir de la classe de première seulement – choix qui, notons-le en passant, aurait annulé les critiques les plus acerbes élevées contre le programme de seconde actuel, au motif que les modèles probabilistes autorisant en principe les simulations demandées en sont bannis tout en y étant nécessairement présents *in absentia*. En lieu et place de la simulation – bon outil expérimental dans le travail de modélisation probabiliste –, on aurait alors pu introduire de façon franche la problématique de la description de *populations* et le grand problème qui lui est intrinsèquement associé : le passage de l'étude d'échantillons à la connaissance de la population. À titre d'illustration d'un tel parcours d'étude et de recherche, nous citerons un peu longuement le début de la 13e des 25 « unités » (c'est-à-dire chapitres) dont se compose le manuel *Statlab* déjà mentionné, unité intitulée *Théorème central limite, erreurs types et intervalles de confiance*, où l'on voit s'affirmer nettement la dialectique de l'expérimentation et de la théorisation [60] :

> L'idée vous est maintenant devenue familière selon laquelle on peut utiliser une statistique d'échantillon pour estimer le paramètre correspondant de la population. Par exemple le revenu médian de votre échantillon de 40 familles permet d'estimer le revenu médian des 1296 familles STATLAB ; de même le score Peabody moyen de votre échantillon permet d'estimer la moyenne de tous les scores Peabody obtenus par les enfants STATLAB. De plus, d'après la loi des grands nombres, de telles estimations seront vraisemblablement exactes si l'échantillon est assez grand. Mais quelle est la précision de vos estimations compte tenu de la taille de l'échantillon que vous avez utilisé ? En fait, quel critère permettrait-il d'apprécier la précision d'une estimation lorsque la vraie valeur du paramètre estimé de la population peut n'être jamais connue avec certitude ?
>
> Nous verrons dans cette unité que l'on dispose d'un théorème mathématique clé grâce auquel la voie est ouverte pour obtenir des réponses concrètes et *numériques* à ces questions fondamentales. À l'aide des données et des statistiques que vous-même et vos camarades avez collectées et calculées, vous aurez non seulement la possibilité de voir comment ce théorème répond à ces questions, mais vous aurez aussi l'occasion de tester de façon empirique la validité de ce théorème, c'est-à-dire de constater dans quelle mesure se vérifient dans la pratique les résultats qu'implique le raisonnement mathématique contenu dans ce théorème. Ensuite, par application des résultats de ce théorème à l'analyse statistique du STATLAB que vous menez de façon continue, vous pourrez effectuer de nouvelles estimations de certaines caractéristiques physiques, économiques et intellectuelles de la population STATLAB, mais en les assortissant maintenant d'un *degré de confiance spécifié*.

[60] *Op. cit.*, p. 110. Le « score Peabody » évoqué est le score obtenu par l'enfant au *Peabody Picture Vocabulary Test* (PPVT), dont la première édition date de 1959. Ce test, utilisable avec des enfants à partir de deux ans et demi, vise d'une part à déterminer le niveau lexical réceptif d'un sujet (le vocabulaire qu'il comprend) et, d'autre part, à dépister les difficultés d'apprentissage chez des enfants d'âge scolaire.

Une telle problématique conduirait concrètement à restructurer le programme de statistique en y découpant deux grands secteurs. Le premier secteur, consacré à la *description statistique* (de populations) comporterait trois thèmes : celui de la description d'échantillons, celui de la fluctuation d'échantillonnage et enfin le thème de l'estimation « naïve » [61]. Le second secteur serait consacré aux prémisses de la *modélisation probabiliste* des phénomènes statistiques, et inclurait à ce titre la partie du programme actuel consacré à la simulation : il constituerait ainsi une première étape dans une étude développée plus largement dans les classes suivantes.

Le parti adopté par le programme actuel, dont nous avons dit qu'il permet de contourner certaines contraintes, ne saurait pour autant éliminer dans le travail du professeur toute difficulté spécifique. À titre d'illustration, voici une question posée par un professeur stagiaire, bien révélatrice de certaines difficultés soulevées par l'enseignement d'un thème, la simulation, dont les professeurs sont encore loin d'avoir identifié tous les pièges didactiques :

> J'ai fait récemment le thème « Simulation et fluctuation d'échantillonnage » et j'ai proposé une AER sur le lièvre et la tortue proposée par le document d'accompagnement, où cette fois-ci, la tortue avait quatre cases à franchir. Après avoir étudié un échantillon de taille 10, j'ai suggéré aux élèves de simuler à la calculatrice chez eux un échantillon de 100 parties. Une élève m'a remis des résultats du type suivant :
>
> 1, 6, 6, 5, 4, 3 le lièvre gagne
>
> 1, 5, 5, 3, 6, 2 le lièvre gagne
>
> 6, 1, 4, 3, 1, 5 le lièvre gagne
>
> …
>
> Cette élève trouve des résultats complètement aberrants. Je n'ai pas su vraiment l'expliquer. À quoi est due cette aberration ?

Le changement de la règle du jeu semble avoir induit ici une grande confusion : tout se passe comme si une partie était définie par 6 lancers successifs d'un dé, quels que soient les résultats amenés par ces lancers. En ce cas, la conclusion relative à la deuxième partie (1, 5, 5, 3, 6, 2) serait erronée, puisque le 6 n'est pas sorti au cours des 4 premiers lancers, ce qui assure la victoire de la tortue. Or si cette lecture était correcte, on aurait là une simple erreur d'élève, qui ne devrait pas émouvoir plus que de raison un professeur même débutant. De fait, ce que ce professeur semble dire implicitement, c'est que, dans l'échantillon des 100 parties simulées par l'élève, un trop grand nombre des parties auraient été gagnées par le lièvre. La clé de cette aberration tient sans doute dans une lecture erronée (du type précédent) des résultats des 100 séries de 6 lancers successifs ; mais le fait que le professeur semble perdu

[61] Ce thème incorporerait notamment le contenu du programme actuel relatif au TEL des sondages.

porte à penser que, n'ayant pas identifié cette source d'erreurs, il est décontenancé par le fait que, sur l'échantillon extrait par l'élève, la fréquence des parties gagnées par le lièvre est très supérieure à, disons, la probabilité que le lièvre gagne, soit $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4$, c'est-à-dire moins de 52 %. Si, comme la formulation de la question ne l'indique pas (mais semble le suggérer), l'élève a trouvé 100 fois le lièvre gagnant, c'est-à-dire a vu se réaliser un événement dont la probabilité est de l'ordre de $2{,}58 \times 10^{-29}$, on comprend le trouble du professeur.

Tout cela pourtant ne relève que d'un type de difficultés lié à la *nouveauté* du thème à enseigner. Pour une exploration plus étendue, nous nous tournerons maintenant derechef vers les deux manuels étudiés jusqu'ici. Dans le manuel de la collection Hyperbole, le sujet de la fluctuation d'échantillonnage occupe seulement deux pages, l'une sous la rubrique « Cours », l'autre sous la rubrique « Activités ». Par contraste, le sujet de la simulation fait l'objet d'une page de cours mais de *dix* pages d'activités (comprenant huit activités différentes). L'inégalité de traitement, que l'on pouvait prévoir, se réalise donc. Il en va de même s'agissant des exercices, au nombre de 24. Deux exercices – l'exercice 1 page 43 et l'exercice 15 page 44 – ont trait de manière spécifique à la fluctuation d'échantillonnage ; tous les autres concernent, d'une manière ou d'une autre, la simulation. L'exercice 1 est construit autour du phénomène de fluctuation d'échantillonnage, mais il porte sur une population d'effectif 5, dont on extrait des échantillons de taille 3. L'exercice 15 s'appuie sur l'exercice 14, lequel a trait à la simulation de 20 séries de lancers d'une pièce de monnaie équilibrée, chaque série s'interrompant dès lors qu'apparaît le motif PFPF où P désigne la sortie du côté pile et F la sortie du côté face ; l'exercice fait alors travailler sur ce que les auteurs décrivent comme « la fluctuation du nombre moyen de jets nécessaires à l'obtention du mot PFPF ». On notera ici la rapidité du parcours : à peine a-t-on observé la fluctuation de la distribution des fréquences qu'on porte l'attention sur la variabilité de la *moyenne* de ces échantillons. Bien que le contenu travaillé réponde au programme, son traitement ne donne peut-être pas le relief souhaitable au phénomène de fluctuation d'échantillonnage : ici, par exemple, étant donné le travail supposé réalisé par la classe dans l'exercice 14, l'occasion s'offrait d'observer, non seulement la fluctuation de la moyenne, mais aussi celle de la médiane [62], ou encore, par exemple, celle de la 3^{e} valeur quand on classe les échantillons de taille 20 par ordre croissant (avec ex æquo), etc. ; et, tant qu'à faire, il n'eût pas été dénué de pertinence d'observer que la distribution des moyennes (ou des médianes) montre une dispersion plus réduite que celle des

[62] La partie *cours* du manuel, de même, mentionne la fluctuation de la moyenne mais ignore la fluctuation de la médiane.

échantillons eux-mêmes. Par ailleurs, l'unique activité proposée dans ce manuel à propos de fluctuations d'échantillonnage est d'abord l'occasion d'utiliser la calculatrice pour produire des nombres au hasard (alors que le « cours » faisait encore utiliser réellement des dés – à la maison, avant l'étude en classe des résultats ainsi obtenus). À peine est-il besoin de remarquer que le phénomène de fluctuation n'est évoqué, ici, qu'à propos de l'échantillonnage de « populations » engendrées virtuellement par un générateur aléatoire simple, matériel ou « immatériel ». Surtout, il est clair que l'observation de ces phénomènes est, ici, dénuée de tout enjeu de connaissance ou d'action : la classe, à ce moment-là, cultive l'art pour l'art.

L'examen du traitement du sujet de la simulation va toutefois révéler une ligne de force dont nous venons de voir le point de départ : ce qui va être mis en avant n'est pas tant la fluctuation d'échantillonnage que – au contraire, si l'on peut dire – la *stabilisation des fréquences* lorsque la taille des échantillons croît – processus qui, dans la pratique statistique ordinaire, est une vue de l'esprit – des plus utiles au plan théorique, certes – plus qu'un réalité quotidienne. Là encore, on voit que l'abord de la fluctuation d'échantillonnage à propos de populations que, non seulement on peut dire « potentielles » ou « virtuelles [63] », mais qui en outre sont engendrées par un générateur aléatoire que l'on peut actionner à volonté (lancer de dés, jets de pièces, etc.), porte à oublier le problème de la fluctuation d'échantillonnage, précisément parce que, dans un tel cas, ignorer les fluctuations liées aux petites tailles pour rechercher la stabilisation associée aux grandes et très grandes tailles, et cela d'autant plus que l'on passe de générateurs aléatoires matériels (dés, pièces, etc.), à des générateurs aléatoires « mathématiques » (programmes de simulation sur calculatrice ou ordinateur). La chose est évidemment d'autant plus prégnante chez les auteurs de manuels que le compagnonnage relativement ancien de la profession avec la théorie probabiliste et le manque de familiarité avec la statistique les induisent à passer très vite à la limite, comme si la considération d'échantillons de taille limitée n'était qu'une étape artificiellement imposée par le programme. C'est ainsi que dans six des huit activités proposées en matière de simulation, le manuel examiné demande à l'élève de comparer les fréquences empiriques observées avec des « fréquences théoriques » fournies par l'énoncé, et cela non seulement dans des cas

[63] Comme le fait l'auteur d'un récent ouvrage de statistique (Lejeune, 2004) qui écrit à ce sujet (p. 68) : « … il n'existe pas nécessairement une population réelle (quelle est la population des appels à un standard, des produits manufacturés par une entreprise ?). Toutefois il nous arrivera de recourir à ce terme comme s'il existait une sorte de *population virtuelle* dont les observations seraient issues comme par un tirage au hasard. » Ces populations sont à distinguer des populations « actuelles » ou « réelles » (l'ensemble des élèves de seconde de telle académie à la rentrée de telle année scolaire, par exemple).

simples et culturellement « bien connus » avant toute étude des probabilités (jet d'un dé ou d'une pièce supposés équilibrés), mais aussi dans des cas où le recours aux rudiments du calcul des probabilités s'avère indispensable. Dans l'activité 2, par exemple, le travail porte sur le jeu de loto ; on veut, par simulation, étudier les chances qu'aurait une personne ayant joué les numéros 5, 17, 22, 35, 36, 44 d'avoir trois bons numéros. La probabilité d'un tel événement est $\frac{C_6^3 \times C_{43}^3}{C_{49}^6} = \frac{8\,815}{499\,422} = 0{,}01765040386\ldots$ La dernière question de l'activité est alors ainsi formulée :

> Comparer le dernier résultat avec la fréquence « théorique » (arrondie au millionième) de cet événement : 0,017 650.

Les guillemets mis ici à *théorique* montrent peut-être un embarras que les auteurs n'éprouvaient sans doute pas en rédigeant, dans l'activité 1, la question relative à la comparaison avec la distribution *théorique* – sans guillemets – correspondant au jet d'un dé équilibré. Cet embarras semble bien, pourtant, n'être que rhétorique : la suite des activités proposées à l'enseigne de la simulation montre en effet une reprise *ne varietur* de quelques « standards » de l'initiation à la méthode de Monte-Carlo, telle par exemple que pouvait l'exposer Arthur Engel dans son livre classique publié en traduction française en 1975 sous le titre *L'enseignement des probabilités et de la statistique* [64]. C'est ainsi que l'activité 3, intitulée dans le manuel examiné, *Simulation et pâtisserie*, reprend l'« exemple 2 » d'Engel concernant la méthode de Monte-Carlo, intitulé *Le problème des raisins secs*, que cet auteur formulait ainsi [65] :

> Un boulanger vend des pains aux raisins. Dans la pâte, pour 100 pains, il met 100 raisins secs et mélange soigneusement. Puis il coupe la pâte en 100 morceaux de même volume. Ces morceaux de pâte se transformeront en pains.
> *Combien de pains contiendront 0, 1, 2, 3, ou plus de 3 raisins secs ?*

Quant à l'exemple 1 du même auteur, celui de *La chasse aux canards*, il fournit – de manière directe ou indirecte [66] – la matière de l'exercice 21 du manuel Hyperbole sous le titre de

---

[64] Le titre original allemand était simplement *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*, « Calcul des probabilités et statistique ».

[65] *Op. cit.*, p. 180.

[66] Les auteurs ne mentionnent pas l'ouvrage d'Engel. Mais, à propos de l'activité 7 (sur la somme amenée par le lancer de deux ou trois dés), ils disent leur dette à l'égard du livre de Maurice Glaymann et Tamás Varga, *Les probabilités à l'école* (Cédic, Lyon, 1975).

Chasse écologique ; et d'autres exemples pourraient encore être cités [67]. On ne saurait mieux illustrer le déroutement – sans doute tout à fait involontaire – qui conduit ainsi ce manuel à délaisser les problèmes de la construction d'une statistique expérimentale et à céder à l'attraction, dominante aujourd'hui dans la culture des professeurs de mathématiques, d'une théorie probabiliste dont le fondement fréquentiste ne doit pas cacher qu'elle ne donne pas par génération spontanée une théorie des faits de variabilité statistique. Une fois oublié l'engagement dans la construction d'une statistique expérimentale, le champ est libre pour s'adonner à des simulations vues désormais comme une propédeutique à une théorie des probabilités encore à naître. Ainsi la simulation est-elle employée par deux fois, dans le manuel Hyperbole, pour estimer la fréquence théorique – c'est-à-dire la probabilité – d'un événement. Dans quatre exercices, elle permet d'examiner – par estimation naïve – si un jeu simple est équitable ou non. Dans dix exercices, surtout, elle permet d'estimer une moyenne (comme il en va dans l'exercice 14 mentionné plus haut). Plus classiquement, elle permet de tester de façon naïve le caractère aléatoire d'une suite de nombres, etc. Tout cela se fait en référence à diverses situations du monde : on a parlé du loto, des raisins secs et de la chasse aux canards ; on peut encore mentionner, au-delà des situations de lancers de dés ou de pièces de monnaie, la simulation du choix d'un jour dans l'année – en relation avec un autre grand classique de la théorie élémentaire des probabilités, le problème des anniversaires [68]. Bien qu'il s'agisse parfois d'un réel d'opérette, on a là un matériel propre à rendre sensible l'opérativité de la simulation comme outil expérimental dans la construction d'une théorie élémentaire des probabilités [69]. Mais, soulignons-le encore, ce n'est pas là le problème essentiel qu'il s'agit d'affronter, même si c'est bien à ce problème que l'on devra ensuite s'attaquer afin de construire une statistique théorique conforme aux résultats du travail expérimental.

À l'instar du manuel de la collection Hyperbole, le manuel de la collection Déclic consacre sensiblement plus de surface imprimée à la simulation qu'à l'étude de la fluctuation

---

[67] Nous n'en retiendrons qu'un parmi plusieurs autres. L'exercice 16 de la page 44 du manuel Hyperbole porte sur un jeu que les auteurs nous présentent en ces termes : « Michel dit à Claire : “Nous allons jouer à pile (1) ou face (0) jusqu'à ce que les suites 111 ou 101 apparaissent. Si c'est 111, c'est toi qui gagnes, si c'est 101, c'est moi”. » L'exercice 15 page 143 du livre de Engel commence ainsi : « Abel et Caïn décident de jouer de la façon suivante : ils jouent à pile ou face jusqu'à obtenir dans la suite des issues la tranche 111 ou la tranche 101. Dans le premier cas, c'est Caïn qui gagne, dans le second c'est Abel qui gagne. »

[68] Voir par exemple Engel, *op. cit.*, p. 140.

[69] Pour un point de vue apparenté, voir Markovitch (2002).

d'échantillonnage. Sur les onze activités proposées, seule la 7e, intitulée simplement *Fluctuation d'échantillonnage*, concerne principalement ce sujet d'étude, tandis que les activités 8, 9, 10 et 11 ont trait à la simulation. L'activité 7 est constituée d'une étude déjà mentionnée relative à la fréquence d'apparition des voyelles dans les textes en langue française. On notera ici que, si on ne se trouve certes pas devant une population « réelle » à propos de laquelle on se poserait des problèmes d'échantillonnage, on ne se trouve pas non plus devant une population virtuelle engendrée par un dispositif actionnable à volonté, qu'il s'agisse de lancer des dés, des pièces ou d'utiliser la touche *random* d'une calculatrice : la situation est, en fait, intermédiaire [70]. Mais la rubrique des exercices réserve une petite surprise. La sous-rubrique intitulée « problèmes » contient trois sections : la première est intitulée *Indicateurs* (elle contient notamment le problème sur le chemin d'accès à une plage mentionné plus haut) ; la troisième a pour titre *Études statistiques à réaliser* (nous en avons assez longuement parlé dans la section 2 de ce chapitre) ; la deuxième, enfin, a pour titre

[70] L'utilisation de textes comme dans l'activité 7, toutefois, se rapproche aujourd'hui de celle d'un « dispositif actionnable à volonté » dès lors qu'on dispose d'une version électronique du texte soumis à l'étude statistique. Il est facile en effet de se procurer une telle version pour nombre de textes littéraires ou autres. À titre d'exemple, voici un passage célèbre de *L'Argent* de Charles Péguy (1913) : « Nos jeunes maîtres étaient beaux comme des hussards noirs. Sveltes ; sévères, ; sanglés. Sérieux, et un peu tremblants de leur précoce, de leur soudaine omnipotence. Un long pantalon noir, mais, je pense, avec un liseré violet. Le violet n'est pas seulement la couleur des évêques, il est aussi la couleur de l'enseignement primaire. Un gilet noir. Une longue redingote noire, bien droite, bien tombante, mais deux croisements de palmes violettes au-dessus du front. Cet uniforme civil était une sorte d'uniforme militaire encore plus sévère, encore plus militaire, étant un uniforme civique. Quelque chose, je pense, comme le fameux cadre noir de Saumur. Rien n'est beau comme un bel uniforme noir parmi les uniformes militaires. C'est la ligne elle-même. Et la sévérité. Porté par ces gamins qui étaient vraiment les enfants de la République. Par ces jeunes hussards de la République. Par ces nourrissons de la République. Par ces hussards noirs de la sévérité. Je crois avoir dit qu'ils étaient très vieux. Ils avaient au moins quinze ans. Toutes les semaines il en remontait un de l'École Normale vers l'École Annexe ; et c'était toujours un nouveau ; et ainsi cette École Normale semblait un régiment inépuisable. Elle était comme un immense dépôt, gouvernemental, de jeunesse et de civisme. Le gouvernement de la République était chargé de nous fournir tant de sérieux. Cette École Normale faisait un réservoir inépuisable. C'était une grande question, parmi les bonnes femmes du faubourg, de savoir si c'était bon pour les enfants, de changer comme ça de maître tous les lundis matins. Mais les partisans répondaient qu'on avait toujours le même maître, qui était le directeur de l'École Annexe, qui lui ne changeait pas, et que cette maison-là, puisque c'était l'École Normale, était certainement ce qu'il y avait de plus savant dans le département du Loiret et par suite, sans doute, en France. Et dans tous les autres départements. » En utilisant la commande « Rechercher et remplacer » du traitement de texte utilisé ici, on apprend au prix d'un clic, en demandant de remplacer *o* par *o* dans tout le texte, que celui-ci contient 80 fois la lettre *o* ; et de même que la lettre *l* y apparaît 85 fois, *m*, 63 fois, *x*, 8 fois, etc.

Fluctuations d'échantillonnage. Elle comporte cinq exercices [71], dont l'examen montre qu'ils sont le lieu d'un glissement – déjà décrit dans son principe – du souci de la fluctuation d'échantillonnage au projet de simulation, qui gomme les fluctuations [72]. Dans le premier problème, l'élève est amené à utiliser un programme tout préparé pour extraire 30 nombres parmi 99 donnés, ce qu'il doit faire 10 fois en tout ; chaque fois, il note la moyenne de l'échantillon de taille 30 ; il doit alors examiner la série des 10 moyennes ainsi obtenues, du point de vue de la dispersion notamment (au moyen de l'étendue) et déterminer également la moyenne M de la série des moyennes pour la comparer à la moyenne m de la population des 99 nombres dont il a extrait des échantillons de taille 30 ; enfin, il va comparer l'écart de M et m et dénombrer les moyennes (dans la série des 10 moyennes) dont l'écart à la moyenne m de la population est inférieur à un pourcentage donné de cette moyenne – étude qu'on lui demande de reprendre entièrement avec, cette fois, des échantillons de taille 60 de la population d'effectif 99. Mais les choses changent dès le deuxième exercice, où l'observation de la fluctuation d'échantillonnage n'est qu'un préliminaire rapide avant un travail de simulation de l'expérience aléatoire consistant à lancer deux pièces de monnaie supposées équilibrées et à observer les résultats (2 fois pile, 2 fois face, une fois pile et une fois face). Ici, les auteurs évitent d'aller vers l'évocation d'une fréquence théorique en ne demandant à aucun moment d'utiliser le procédé de simulation pour obtenir des fréquences (empiriques) : l'exercice consiste d'abord uniquement à écrire un programme qui dispense l'élève de lancer effectivement deux pièces (comme il avait dû le faire dans une première partie de l'étude). Mais la problématique probabiliste n'est tout de même pas loin : la troisième partie de l'étude, où l'on suppose qu'une pièce est rouge et l'autre verte, ce qui change l'ensemble des événements élémentaires, se termine significativement par cette question (où « daltonien » signifie « personne qui ne peut reconnaître les couleurs ») : « Le fait d'être daltonien change-t-il les chances d'obtenir PILE et FACE ? Conclure. » Le troisième problème consiste à faire simuler un jeu de devinette – dans quelle main ai-je l'objet ? – par une calculatrice, afin de voir si sur des échantillons de 50 essais, il est rare, en devinant au hasard, qu'on devine

[71] Il s'agit des exercices 34 à 38, pp. 194-195.

[72] Dans un ouvrage déjà mentionné (Markovitch, 2002), présentant le principe des générateurs de nombres aléatoires (ou plus exactement pseudo-aléatoires), l'auteur souligne que le générateur qu'il a utilisé et qu'il recommande à son lecteur est d'une grande qualité, notant à ce propos : « La précision des résultats obtenus par simulation, lorsqu'il est possible de les comparer aux résultats théoriques, nous étonne toujours. » C'est ainsi que, simulant un jeu simple – du type roulette russe –, il obtient en 10^7 simulations les trois premières décimales de toutes les probabilités qu'il est souhaitable de connaître (*op. cit.* pp. 24-25).

correctement plus de la moitié des fois. Cinquante essais constituent sans doute un trop grand nombre d'essais pour que la situation étudiée relève de la vie sociale réelle ; et l'on serait plus près de telles activités de loisir avec la consigne suivante : « J'ai deviné juste 4 fois sur 5. Ai-je eu un gros coup de chance ? Y a-t-il beaucoup de séries de 5 essais où, par exemple, on devine juste plus de 3 fois sur 5 ? » Malgré cela, on est là plus près de l'étude des fluctuations d'échantillonnage. Mais l'énoncé de l'étude à conduire ne fait apparaître aucune tentative de penser les faits observés en termes de fluctuations d'échantillonnage. À nouveau, donc, la bille redescend au fond du bol, l'attracteur probabiliste paraît surpuissant.

Des deux autres problèmes, le premier conduit à écrire un tableau de chiffres au hasard et à considérer comme individu chacune des lignes de ce tableau en associant à chaque ligne le rang de la première occurrence de 0 dans la ligne : on examine alors la distribution de ces rangs et on observe quelle modification se produit si au lieu de considérer le rang à partir du début de la ligne on déplace l'origine des rangs dans la ligne. La situation est obscure à souhait et par là bien propre à se réduire à une suite de manipulations sans prise de conscience de ce que l'on fait, et en particulier sans analyse en termes de fluctuation d'échantillonnage. Quant au dernier exercice, nous l'avons évoqué plus haut : il se propose de contribuer à l'étude de la question « L'être humain est-il un bon simulateur de tirage aléatoire ? » Comme dans le manuel de la collection Hyperbole, mais peut-être plus subrepticement, c'est la simulation qui se taille ici la part du lion. Les travaux que nous venons d'évoquer sont en effet préparés, on l'a dit, par quatre activités. L'activité 8 a pour objet de familiariser l'élève avec l'utilisation de la commande *random* à propos de la simulation d'un jeu de pile ou face ; les auteurs n'y résistent pas à la tentation d'introduire la fréquence théorique : l'attraction des situations limites, plutôt que des fluctuations liées à de petits échantillons, est ubiquitaire. L'activité 9 fait simuler le lancer d'un dé à six faces. Ici, la situation s'inverse quelque peu : pour ne pas en rester à la simple exécution d'un programme qui, là encore, est fourni par le manuel, on demande à l'élève de faire tourner le programme pour produire des séries de 30 lancers d'un dé puis de s'intéresser à la fréquence d'apparition du 3. Répétant 10 fois 30 lancers successifs, on calcule chaque fois la fréquence d'apparition de 3 et on la regarde fluctuer sur les 10 réalisations de 30 lancers, avant de reprendre le tout mais à propos, cette fois, de séries de 100 lancers d'abord, de 500 lancers ensuite. Chaque fois, on établit un graphique des fréquences d'apparition de 3 et il est demandé enfin de comparer ces trois graphiques (avec un renvoi au problème 35, déjà commenté, concernant le lancer de deux pièces de monnaie, suivi de leur coloration en rouge et vert). L'activité 10 se propose « de regarder comment évolue la fréquence d'apparition de PILE au fur et à mesure des lancers d’une pièce de monnaie ». Une première étape fait opérer avec des pièces réelles, tandis qu’une seconde étape procède par simulation sur calculatrice. Dans une première partie de cette seconde étape, on simule 300 lancers d’une pièce et on fait calculer les fréquences successivement obtenues et comparer la fréquence finale à 0,5, manœuvre que l’on recommence pour 500 lancers. On ne saurait être plus proche, bien entendu, de l’amorce d’une théorie des probabilités à base fréquentiste. La 11e et dernière activité a été également évoquée pour son titre : « π est-il un nombre “normal” ? » On y évoque Émile Borel et la notion de nombre *normal*, dont le contenu est allusivement évoqué, puis on introduit un travail sur les décimales de π (dont un tableau fournit les 2400 premières). Selon une technique qui sera mise en œuvre dans le problème 37 commenté plus haut, on fait suivre une première étape de travail sur les décimales de π (calcul de la fréquence d’apparition de 0, 1, 2, etc.) par un travail sur des suites de chiffres au hasard – tout en veillant à ne pas assimiler sans plus d’examen la suite des décimales de π aux suites de chiffres au hasard fournis par la calculatrice. Il y a là une ligne de travail significative tant pour l’exercice de simulation demandé que pour la référence à des travaux difficiles dont Émile Borel avait autrefois posé les fondements [73]. Mais le travail porte ici davantage sur les principes de base de la simulation ; et on pourrait d’ailleurs, même si la chose n’est pas envisagée, se poser la question de l’utilisation de la suite des décimales de π pour obtenir des chiffres au hasard par exemple [74]. Dans tous les cas, la simulation est utilisée ici moins pour faire fluctuer que pour faire converger.

Les situations que nous avons décrites montrent clairement, croyons-nous, le jeu de certaines contraintes, et tout d’abord la présence dans la culture mathématique des professeurs et de la noosphère de l’enseignement des mathématiques d’une organisation de savoir au pouvoir attractif violent : la théorie (fréquentiste) des probabilités. Sous son influence, nous avons vu ainsi la simulation se mettre au service de l’abord expérimental des probabilités, et,

---

[73] Sur la question des nombres normaux, voir par exemple Borel (1961), Deheuvels (1990), Delahaye (1997), Allouche & Mendès France (2005).

[74] Delahaye (1997, p. 183) écrit ainsi : « Notons au passage que lorsqu’on programme des méthodes de Monte-Carlo, on est moins exigeant qu’en cryptographie sur la “qualité” du hasard et que les décimales de π peuvent encore être utiles pour la programmation de tels algorithmes… » Il est néanmoins vrai que les générateurs pseudo-aléatoires des ordinateurs ou des calculatrices rendent aujourd’hui un recours éventuel aux décimales de π peu utile : aux 2400 décimales fournies par les auteurs du manuel Déclic, on pourra opposer le générateur pseudo-aléatoire commercial utilisé par Markovitch (2002), dont la période est tout de même égale à 16 777 216 (*op. cit.*, p. 24).

corrélativement, les phénomènes de fluctuation, si importants pour une appréhension statistiquement plus juste des phénomènes de la vie quotidienne, se trouver en quelque sorte oblitérés par l'accent mis sur l'atténuation et la disparition de ces fluctuations lorsque, au lieu de travailler sur des échantillons disponibles, on *imagine* que l'on pourrait travailler sur de grands échantillons de la population étudiée. Mais la plus forte présence de la théorie des probabilités dans la culture mathématique de l'enseignement secondaire n'est pas la seule contrainte qu'il faut invoquer s'agissant du tableau que nous venons de brosser à travers les deux manuels examinés. Car à cette présence relativement prégnante fait pendant, surtout, une absence dont les effets rendent possibles les glissements que nous avons soulignés : l'absence d'une culture statistique qui donne une présence forte au problème du passage de l'étude d'un échantillon disponible à la connaissance de la population parente. Il conviendrait, ici, d'évoquer la situation où se trouvent – à l'instar des professeurs – les auteurs de manuels. L'utilisation de la simulation au service de l'étude de la statistique reste aujourd'hui à construire : les fiches proposées par le groupe des experts de mathématiques sont elles-mêmes, à cet égard, assez loin du compte, parce qu'elles se placent toujours sous la domination du point de vue selon lequel les méthodes de Monte-Carlo sont surtout un substitut au calcul des probabilités quand celui-ci n'est pas praticable ou n'est pas disponible. La situation constatée à propos du manuel de la collection Hyperbole constitue, de ce point de vue, un symptôme clair de la carence évoquée : loin d'entamer une réflexion – qui, au vrai, ne saurait incomber ni à chaque professeur, ni même à chaque équipe d'auteurs de manuels – sur ce que serait un usage pertinent de la simulation dans l'étude des phénomènes statistiques, et d'abord du phénomène de fluctuation d'échantillonnage, ces auteurs reprennent une élaboration intermédiaire proposée dans un ouvrage publié un quart de siècle plus tôt [75], selon une problématique démarquant elle-même l'usage des méthodes de Monte-Carlo dans la sphère savante, où, à propos de problèmes d'analyse notamment, on construit des modèles probabilistes que l'on simule alors pour obtenir des résultats approchés [76]. Il y a donc tout un

[75] On a noté plus haut le changement de titre entre la version originale allemande et la traduction française du livre d'Engel, changement significatif d'un besoin noosphérien que l'édition en français rend ainsi plus explicite.

[76] Dès les années 1930, le physicien italo-américain Enrico Fermi (1901-1954) avait utilisé une méthode aléatoire pour calculer les propriétés du neutron (dont l'existence venait d'être mise en évidence). Mais de telles méthodes eurent surtout une importance décisive dans le projet Manhattan qui visait à mettre au point les premières armes nucléaires. Bien que demeurées secrètes jusqu'à la fin de la Seconde Guerre mondiale, les « méthodes de Monte-Carlo » furent nommées ainsi et développées à Los Alamos par John von Neumann (1903-1957), Stanisław Ulam (1909-1984) et Nicholas Metropolis (1915-1999) notamment, pour résoudre des

travail transpositif, qui incombe à la noosphère de l'enseignement des mathématiques au plus large, et qui est ici en souffrance au point de constituer une menace sérieuse sur la diffusion scolaire de la culture statistique.

problèmes de calcul d'intégrales définies dans des cas où les méthodes déterministes connues (Simpson, etc.) deviennent tout à fait impraticables (voir par exemple Hayoun, 2002).

Chapitre 7

En classe, et après : le travail sur les contraintes

1. Une enquête à chaud

Le programme de seconde rénové entre en vigueur à la rentrée 2000. La Société Française de Statistique (SFdS) suit l'affaire. Elle demande à la Faculté des Sciences Économiques et de Gestion de l'Université Lumière-Lyon 2 de réaliser une enquête auprès des professeurs ayant enseigné les mathématiques en seconde durant l'année 2000-2001. L'enquête est confiée au département *Informatique et Statistique* de cette faculté ; elle sera réalisée concrètement par six étudiants du DESS SISE (« Statistique et Informatique Socio-Économiques »), à l'aide d'un financement conjoint de la SFdS, de l'IREM de Rennes et de la faculté. Le compte rendu de l'enquête en précise ainsi l'objet [1] :

> Nous voulions étudier :
> – les réactions des professeurs (et des élèves) à l'introduction de la statistique dans le programme de mathématiques de la classe de seconde,
> – les succès et les difficultés liés à ce nouveau programme et aux instructions du Ministère,
> – les formations à la statistique suivies par les professeurs,
> – les parties de cours traitées,
> – les outils utilisés pour l'enseignement de la statistique.

Un questionnaire est diffusé auprès des professeurs de mathématiques ayant enseigné en classe de seconde durant l'année 2000-2001. Les enquêteurs recueilleront 191 questionnaires remplis. Le compte rendu prend soin de signaler – la chose n'est pas si fréquente – que, si l'échantillon recueilli était véritablement aléatoire, « les intervalles de confiances seraient de ± 7 % pour des proportions autour de 50 % (50 % doit se lire : entre 43 et 57 %), et de ± 5 % autour de 15 % (15 % doit se lire entre 10 et 20 %) ». Sur les 191 professeurs enquêtés, 10 ont

[1] Ce compte rendu est actuellement consultable sur le site Internet de l'académie de Lyon : http://www2.ac-lyon.fr/enseigne/math/indexact.html.

répondu qu'ils n'avaient pas enseigné la statistique en 2000-2001 : dans trois de ces cas, la raison alléguée était un congé de maternité, pour les sept autres le manque de temps. Les enquêteurs précisent cependant qu'« aucun de ces 10 enseignants n'a eu de formation à la statistique, qu'elle soit initiale ou continue ». Bien entendu, le manque de temps, quelle qu'en soit l'origine, explique seulement que quelque chose dans le programme n'ait pas été traité, nullement qu'il s'agisse de la statistique ; mais nous retrouverons plus loin cette fragilité de l'enseignement de la statistique. En réalité, la situation des dix qui n'ont pas abordé la statistique avec leur classe ne doit sans doute pas être considérée à part : comme nous le verrons à d'autres propos, il s'agit là d'un cas extrême, sans doute, dans un ensemble d'enseignements observés montrant *une grande variabilité* tant dans les contenus travaillés que dans le travail réalisé. Le compte rendu résumé que nous suivons, qui seul a été rendu public, est évidemment plus disert s'agissant des 181 professeurs ayant peu ou prou enseigné la statistique au cours de l'année 2000-2001. Ce compte rendu avance un certain nombre d'observations que nous parcourrons rapidement.

À l'instar des responsables de l'APMEP, le grief le plus vif à l'encontre du nouveau programme que formulent les professeurs interrogés est que trop peu a été fait pour leur donner une formation idoine en matière de statistique. La rencontre avec la statistique à l'université n'est pas rare : quatre professeurs sur dix disent avoir suivi des cours de statistique en formation initiale ; mais cette dernière leur apparaît, rétrospectivement, tout à fait inadaptée par rapport à la tâche qu'ils ont eu à accomplir en seconde. Des stages de formation continue ont concerné trois professeurs sur dix : l'organisme dispensateur a été le Rectorat dans un cas sur deux, les fabricants de calculatrices (Texas Instruments ou Casio) dans 32 % des cas, le CEPEC (enseignement catholique) dans 12 %, suivis de l'APMEP (10 %) et de l'IREM (5 %), pourcentages que nous ne commenterons pas davantage ici [2]. La formation donnée dans ce cadre a paru généralement mieux adaptée, mais tardive et insuffisante en volume. Les professeurs interrogés ont enseigné la statistique plutôt au deuxième ou même au troisième trimestre de l'année : moins de 10 % d'entre eux lui accordent un traitement réparti sur plusieurs trimestres. Quatre professeurs sur dix ont pu terminer le programme de mathématiques, proportion voisine de celle des années précédentes – « avant l'introduction de la statistique », précisent les auteurs du compte rendu. Quel temps d'horloge les professeurs consacrent-ils à la statistique dans le travail en classe ? La moyenne de l'échantillon est de 11 h 30 min environ, mais la variabilité est importante : 15 % y ont

[2] Notons simplement, en passant, que l'IUFM n'apparaît pas parmi les institutions mentionnées.

consacré moins de 7 h, 50 % lui ont donné entre 7 h et 13 h, enfin 35 % lui ont consacré plus de 13 h. Notons que le programme prescrit d'allouer à l'étude de la statistique environ un huitième du temps travaillé : à raison de 4 heures par semaine, dont une heure en demi-classe [3], et en ne comptant que 32 semaines dans l'année, la statistique aurait donc dû faire l'objet, pour chaque élève, de quelque 16 heures de travail en classe dans l'année [4]. On voit que l'on en est loin, et encore n'a t-on pas compté les dix professeurs qui n'ont pas consacré une minute à cet enseignement. Formulons ici une conjecture : au-delà de toute autre contrainte, la relative asthénie qui semble frapper cet enseignement procède – nous étaierons cette hypothèse un peu plus loin – de l'*apparent* déficit de matière à travailler avec les élèves, du moins, *tel que les professeurs le voient*. Comment, pourrait dire sans doute plus d'un d'entre eux, comment pourrais-je consacrer 16 heures et plus à un matériau finalement si pauvre ? Dans la faiblesse de l'horaire accordé à la statistique, on retrouve aussi, sans doute, l'effet de l'absence d'une culture statistique de *la profession*, qui permettrait de faire lever les germes de savoir, souvent invisibles aux yeux des professeurs, déposés dans les programmes : le problème est bien celui de la germination qui semble ne pas prendre. À cet égard, le palmarès des « parties » du programme déclarées traitées par les professeurs enquêtés apparaît significatif. Autorisons-nous un instant à proposer normativement un ordre logique (et chronologique) de traitement des parties distinguées par le compte rendu que nous suivons, ordre auquel l'ensemble des chapitres précédents de notre travail devrait donner une signification suffisante :

1. Distribution des fréquences d'une série ;
2. Médiane, classe modale, étendue ;
3. Moyenne et moyenne élaguée ;
4. Fluctuation d'échantillonnage ;
5. Simulation.

Les informations recueillies auprès des professeurs conduisent à un tout autre palmarès, qui n'a, au vrai, rien de surprenant, et que l'on reproduit ci-après :

- Moyenne (enseigné par 98 % des professeurs),
- Médiane (97 %),
- Étendue (92 %),

[3] On ignore ici l'heure d'aide individualisée qui, en principe, ne concerne chaque semaine qu'au plus huit élèves de la classe.

[4] Sur la base de 34 semaines (soit les 36 semaines de l'année « officielle », moins 2 semaines dévolues au travail sur les TEL), on arrive à 17 heures de statistique dans l'année, hors TEL.

- Classe modale (86 %),
- Simulation d'échantillonnage (81 %),
- Distribution des fréquences d'une série (79 %),
- Fluctuation d'échantillonnage (65 %),
- Moyenne élaguée (49 %).

La critique principale élevée par ces professeurs à l'encontre des notions à enseigner tient à ce qu'ils regardent comme une absence de définition précise de certaines d'entre elles. Le compte rendu cite à cet égard la notion de moyenne *élaguée*, et aussi la notion de *quartile* (qui n'est pourtant pas au programme de la classe de seconde). C'est là, notent les auteurs du compte rendu, un type de situations qui apparaît « déstabilisant » pour les professeurs. Sans doute doit-on, ici, invoquer une idiosyncrasie de la culture des professeurs de mathématiques (et peut-être, dans des modalités appropriées, de toute culture professorale) : toute incertitude « ontologique » qui pourrait manifester un défaut de maîtrise est vécu comme rédhibitoire et suscite frustration et irritation. En l'espèce, toutefois, on peut dire – sans grand risque d'être démenti par les faits – que la raison spécifique pour laquelle l'absence d'une définition « algorithmique » de la moyenne élaguée fait problème, c'est que l'abord qu'on envisage d'en faire est *formel* et non pas *fonctionnel*. Lorsque, en revanche, on regarde la moyenne comme une manière – à certains égards plus agréables – d'approcher la médiane, ainsi qu'on l'a rappelé, ce qui devient « évident » est le *geste* d'élagage, auquel fait d'ailleurs référence, sans formalité ni formalisme, un texte officiel déjà cité, qui parle de calculer « la moyenne élaguée d'une ou plusieurs valeurs extrêmes », et cela pour apprécier « l'influence d'éventuelles valeurs aberrantes ». En ce cas, l'élagage se fait, si l'on peut dire, à la main [5]. Bien entendu, des logiciels courants proposent le calcul de moyennes élaguées correspondant à des élagages standards, comme le fait d'enlever *n* % des valeurs aux deux extrémités de la série statistique examinée. Mais on saisit en ce cas sans grande difficulté qu'il y a eu, par nécessité, formalisation du fonctionnel, et on doit comprendre qu'il ne convient pas de sacraliser outre mesure la définition formelle adoptée. Des remarques analogues pourraient être faites – elles l'ont été dans un chapitre précédent [6] – à propos de la notion de quartile, même si, dans ce dernier cas, le passage du fonctionnel au formel suppose un travail mathématique un peu plus

[5] Rappelons (voir notre chapitre 2) que, en classe de troisième, l'élagage d'une série statistique a été (en principe) pratiqué, si l'on en croit du moins ce commentaire du programme de la classe : « On introduira l'étendue de la série ou de la partie de la série obtenue après élimination de valeurs extrêmes. » Mais il ne concerne que le calcul de l'étendue, et non celui de la moyenne.

[6] Voir notre chapitre 5.

délicat. Plus généralement, la levée de la contrainte que l'on examine ici suppose, de façon coordonnée et concomitante, l'assomption d'une contrainte très large : celle imposant un enseignement *fonctionnel* et mettant corrélativement hors jeu tout enseignement *formel* qui ne serait que cela. Mais cette contrainte ne saurait être assumée individuellement par le professeur : elle est l'affaire de la profession, dans sa capacité à négocier avec elle-même et avec la société, de la même manière que la contrainte de précision formelle par le biais de définitions algorithmiques apparaît comme le fruit d'une négociation ancienne, de longue durée, dont on a pu penser un temps que son résultat suffisait à prévenir durablement les allégations qui mettraient en cause la qualité de l'enseignement prodigué.

Ajoutons une remarque : 41 % des professeurs interrogés ont proposé à leur classe l'un des TEL relevant de la statistique, ce qui fait apparaître un peu plus basse encore la moyenne du temps consacré, hors TEL, à la statistique. Une chose en tout cas est sûre : le programme de statistique n'est pas couvert, même (et surtout) quand on s'autorise à faire des extra sous la forme de TEL de statistique [7]. Pour concevoir et donner leur enseignement, les professeurs interrogés ont utilisé les manuels disponibles, dont un professeur sur deux se dit satisfait (pour ce qui est de la statistique), « notamment pour la variété des exercices et la clarté du cours » ; à quoi ils ont ajouté les documents publiés par le ministère (à 55 %), par l'IREM (24 %) ou provenant d'autres sources (19 %). Du côté des élèves, trois professeurs sur dix seulement ont mis en place, conformément aux vœux du programme, un cahier de statistique. Beaucoup de ceux qui se sont abstenus disent avoir jugé ce dispositif « inutile ». La contrainte d'évaluation, constitutive du métier, a été, en revanche, globalement respectée – 86 % des professeurs interrogés y ont souscrit –, alors même que l'évaluation d'un domaine nouveau ou, comme ici, en partie renouvelé, ne va jamais de soi. De fait, on peut penser que le réglage technique de l'évaluation – notamment dans son contenu – pèse peu face à l'obligation de sanctionner l'enseignement qu'on a donné et la réception qu'il a eu chez les élèves, presque indépendamment de toute autre fonction didactique (régulation, etc.). Au reste, tous les professeurs interrogés ayant enseigné la statistique au premier ou au deuxième trimestre ont procédé à une évaluation ; tous ceux qui ne l'ont pas fait avaient enseigné la statistique au

[7] À propos du thème de la simulation, le document d'accompagnement du programme précise qu'il s'agit de « simuler des situations très simples, reposant le plus souvent sur la simulation d'expériences de référence ». Or la totalité des TEL de statistique ont trait à la simulation et, pour plusieurs d'entre eux même, à des expériences de référence. En proposant la simulation d'un jeu de pile ou face ou du lancer de deux dés (éventuellement pour étudier leur somme), par exemple, le professeur s'acquitte des obligations du programme tant en matière de thèmes d'études « imposés » que pour ce qui est des TEL, réduisant ainsi le temps utilisé pour la statistique.

troisième trimestre et ont allégué le manque de temps – ce qui, on l'a dit, n'est guère pour surprendre [8]. De la même façon qu'on voit ici une contrainte consubstantielle au métier opérer de façon quasi implacable, de même on entend, venant des élèves, cette fois, l'écho d'une posture spécifique, avec en arrière-plan une certaine demande sociale, qui rappelle aux professeurs que l'École n'est pas tout. La moitié des élèves environ, selon leurs professeurs trouveraient en effet la statistique « facile », « intéressante » et (surtout) « utile » ; ils ne sont que 7 % à la juger « inutile », « inintéressante » et « difficile ». Un professeur sur cinq signale en outre que les élèves ayant « un moins bon niveau » en mathématiques tendent à s'intéresser davantage à la statistique, car celle-ci « diffère des autres chapitres de mathématiques [9] ». Les élèves – tels que les voient leurs professeurs – ne sont tout de même pas entièrement libres de leurs sentiments : les auteurs du compte rendu observent ainsi « une forte corrélation entre la satisfaction du professeur et la réaction positive qu'il perçoit de ses élèves », ce qui ne saurait être entièrement subjectif. Ces professeurs, cependant, ont des avis très contrastés : un seul se déclare « très satisfait » par l'enseignement qu'il a eu à donner ; la moitié d'entre eux sont simplement « satisfaits », trois sur dix « plutôt pas satisfaits » et un sur dix « pas du tout satisfait », tandis que 14 % sont sans opinion.

Le questionnaire demandait encore aux enseignants de motiver leur avis sur la statistique. Les arguments positifs énoncent tous, semble-t-il, un même ordre de raison, décliné de manière variée : la statistique et les statistiques sont ubiquitaires dans nos sociétés et en tous cas très présentes dans certaines disciplines comme l'économie, l'histoire-géographie, la biologie ; du point de vue plus restreint de la classe de mathématiques, l'étude de la statistique fournirait un matériau plus concret, avec lequel les élèves les plus faibles se sentiraient davantage en affinité, en même temps qu'ils apprendraient à faire preuve d'esprit critique et de rigueur dans un domaine ayant un écho large hors de la classe de mathématiques, alors même qu'ils se montrent moins capables de profiter de cette éducation à la rigueur en d'autres parties du programme. Il ne semble pas que les professeurs enquêtés aient mis en avant, parmi d'autres choses, le fait que l'étude de la statistique donnerait l'occasion de s'affronter à des

[8] Près de 4 sur 10 des professeurs ayant repoussé l'enseignement de la statistique au troisième trimestre n'ont pas évalué leurs élèves sur ce chapitre.

[9] On retrouve ici des considérations rencontrées déjà chez les professeurs MOAistes dont nous avons parlé dans notre chapitre 3 : la statistique apparaît comme un domaine mathématiquement plus « facile ». Cette constance dans le jugement peut surprendre le statisticien s'il ne sait pas que, en réalité, comme on le verra plus loin, nombre de professeurs enseignent moins la statistique que la réduction arithmétique qu'ils en font, laquelle est alors, de fait, sans grande difficulté pour les élèves.

problèmes de mathématiques, et cela de façon fructueuse pour la formation mathématique (et pas seulement statistique) d'élèves de seconde [10]. Les arguments négatifs sont, eux, plus divers. Une première raison invoquée n'étonne guère si on la prend à sa valeur faciale : « Je connais mal, je ne domine pas, donc je suis mal à l'aise (je crois cependant avoir suivi les indications du programme). » Dans d'autres cas, la minoration de la place donnée à la statistique est fondée sur une hiérarchie des parties du programme dans laquelle la statistique n'occupe pas la meilleure place. Un professeur déclare ainsi : « On voit l'intérêt et l'importance d'une vraie formation aux techniques statistiques, mais le programme de seconde est tellement divers que je ne vois pas comment y consacrer le temps nécessaire. » Un autre, plus péremptoire, n'a pas, semble-t-il, la même hiérarchie de valeurs que les auteurs du programme : « Cet enseignement, dit-il, passe après l'apprentissage du calcul formel et de la géométrie. » Un autre encore, qui voudrait refaire le programme à sa fantaisie, avance : « Le programme est si chargé que j'aurais préféré utiliser le temps à faire découvrir la logique mathématique nécessaire à la poursuite d'études scientifiques [11]. » Et puis il y a les arguments de ceux qui, ne se contentant pas de donner à la statistique, relativement aux autres parties du programme, une place minorée, la déprécient absolument ; dans ce registre, le compte rendu d'enquête offre le joyeux pot-pourri ci-après :

> Ce ne sont pas des maths, pas rigoureuse, pas de démonstration, l'enseignement des mathématiques passe par la construction d'un raisonnement et non par l'application de formules, de ce fait les

[10] L'étude des propriétés de linéarité de la moyenne conduit notamment à des problèmes instructifs, pour la résolution desquels on peut éventuellement « commencer à utiliser le symbole $\sum$ », ainsi que le précise le programme. Et, en relation avec le thème de l'«ordre des nombres » (qui relève proprement du domaine d'études que le programme intitule *Calcul et fonctions*), il n'est pas interdit d'explorer davantage les ressemblances et dissemblances entre médiane et moyenne, par exemple en se proposant d'examiner si la médiane possèderait elle aussi les propriétés de linéarité dont jouit la moyenne ; et, dans le cas où il en serait bien ainsi, si ces propriétés pourraient être utiles pour déterminer une médiane dans au moins certains cas qu'il resterait alors à préciser, par exemple en relation avec ce discret commentaire formulé dans le programme : « Le calcul de la médiane nécessite de trier les données, ce qui pose des problèmes de nature algorithmique. »

[11] En ce cas comme dans de nombreux autres, on entend dans les propos du professeur enquêté l'écho de la vieille conception libérale du métier d'enseignant (qui conduit classiquement à une attitude réservée, voire hostile à l'endroit des programmes). On notera que, toutefois, ce libéralisme autoproclamé a ses limites : les auteurs du document que nous suivons ici indiquent par exemple que si la statistique « était évaluée au bac », alors « un tiers des insatisfaits "prépareraient les élèves aux types d'exercices qu'on peut leur proposer à l'examen", en se basant sur les annales et sur le programme qui, selon eux, "serait plus précis" ». Libéralisme tempéré, donc !

statistiques n'apprennent pas l'apprentissage de la rigueur. C'est plus du bon sens, voire des recettes, que des maths.

Malgré cela, trois sur quatre des professeurs interrogés « pensent que l'enseignement de la statistique leur revient » ! En particulier, on avance que la « partie théorique », que d'aucuns déclarent par ailleurs introuvable, « doit absolument être traitée par les professeurs de mathématiques ». Une autre position, très minoritaire il est vrai, apparaît aussi : on évoque l'idée de professeurs spécialisés enseignant l'informatique (dont les éléments utiles de « bureautique »), la statistique et les techniques mathématiques, ou encore de professeurs d'informatique travaillant en liaison avec le professeur de mathématiques. Quelques enquêtés – le compte rendu n'en donne pas la proportion – se déclarent enfin partisans de voir la statistique enseignée par d'autres professeurs qu'eux-mêmes : la plupart d'entre eux désignent le professeur d'économie ou le professeur d'histoire-géographie.

À l'évidence, l'enquête conduit à conclure que, si la statistique doit être enseignée par les professeurs de mathématiques, alors certaines décisions doivent être prises et mises en œuvre pour faciliter et renforcer le processus amorcé. Deux ordres de considérations sont faites à cet égard dans le compte rendu de l'enquête. Tout d'abord, y lit-on, les professeurs de lycée connaissent mal la statistique, ce qui fait qu'ils « n'en voient pas toujours l'intérêt pour les élèves ». Il faut donc accroître beaucoup leur formation, en donnant en amont de l'exercice du métier, ainsi que dans le cadre de la formation continue, une plus grande place aux *applications* de la statistique, « contrôle de qualité industrielle, risques en assurance ou en écologie, tests de nouveaux traitements médicaux ou de toute hypothèse scientifique, etc. ». Conclusion : « Des cessions de formation animées par des statisticiens appliqués sont nécessaires. » Les statisticiens qui ont organisé l'enquête, au reste, pourraient apporter leur concours à un effort qu'ils jugent indispensable : « Pour sa part, lit-on ainsi, la Faculté des Sciences Economiques et de Gestion de l'Université Lyon-2 est prête à y participer. » On retrouve ici – d'une façon à vrai dire assez prévisible sur la base des analyses des chapitres précédents – les tensions mais aussi les coopérations qui ont fait l'histoire même de la statistique depuis deux siècles. La proposition faite rappelle encore, en passant, que l'École n'est pas l'affaire que des gens d'école. Mais, les rapporteurs ne l'oublient pas, elle est *aussi* l'affaire des gens d'école. Leur seconde proposition a donc trait à ces notions qui semblent avoir « des définitions instables » : médiane, quartiles, moyenne élaguée. Les auteurs notent fort bien que cette situation irrite « les mathématiciens [12] et focalise l'attention sur des détails,

[12] C'est-à-dire, ici, les professeurs de mathématiques.

peu importants pour des variables continues étudiées sur de grands ensembles de données (revenu, chiffre d'affaires, tension artérielle…), mais déterminants sur les petits ensembles manipulés en classe. » Conclusion : « Le programme officiel doit préciser les définitions à employer. » Cette suggestion n'appelle guère de réfutation : même s'il est vrai que les textes publiés par le groupe des experts de mathématiques explicitent la définition de la médiane que les professeurs se voient enjoints d'adopter avec leur classe, il est vrai *aussi* qu'une telle définition ne figure pas expressément dans le texte du programme (au motif certainement que celui-ci doit être relativement concis). À tout le moins, il y a dans la réception (ou la non-réception) des textes rendus publics par le ministère des malentendus qu'il convient de lever clairement [13]. Le point de vue lucide et empathique des enquêteurs pâti toutefois d'une analyse didactique qui, selon la conceptualisation commune, ne recherche les conditions et contraintes de l'activité professorale que dans les objets les plus immédiatement en rapport avec cette activité (formation initiale et continue, programme). Or on a déjà vu par exemple combien l'exigence d'univocité des définitions, si légitime soit-elle d'apparence, était didactiquement ambiguë. On soulignera donc ici, simplement, avant d'aller plus loin dans l'analyse, qu'on ne saurait espérer impulser, encourager et réguler un enseignement de la statistique au lycée en ne manipulant que les quelques contraintes que, traditionnellement, on s'autorise à considérer dans l'abord classique des faits didactiques.

2. En classe

En chaque niveau de détermination didactique [14] se rajoutent des contraintes qui renforcent d'autres contraintes pourtant hétérogènes, ou au contraire entrent en conflit avec elles, à

[13] Dans une « annexe commune aux classes de première des séries L, ES et S » intitulée *Boîtes et quantiles* (déjà mentionnée dans notre chapitre 2), à la suite de la définition générale de la fonction quantile Q, on lit ceci (c'est nous qui soulignons) : « On définit assez souvent la médiane m par $m = Q(0,5)$: la médiane est alors le second quartile, le cinquième décile, le cinquantième centile, etc. Mais de nombreux statisticiens, de nombreux logiciels (de qualité) et de nombreux médias utilisent la définition suivante de la médiane d'une série : on ordonne la série des observations par ordre croissant ; si la série est de taille $2n + 1$, la médiane est la valeur du terme de rang $n + 1$ dans cette série ordonnée ; si la série est de taille $2n$, la médiane est la demi-somme des valeurs des termes de rang n et $n + 1$ dans cette série ordonnée. *C'est la définition adoptée dans le programme de seconde*. Les deux définitions, $Q(0,5)$ et celle-ci, donnent en pratique, pour des séries à valeurs continues de grande taille, des résultats le plus souvent très proches. » À strictement parler, *c'est ici seulement* qu'on apprend ce qu'est « la définition adoptée dans le programme de seconde ». Bien entendu, il faut lire : « la définition *implicitement* adoptée dans le programme de seconde. »

[14] Sur la notion de niveau de détermination, voir notre chapitre 4.

moins que les unes et les autres n'apparaissent simplement non incompatibles entre elles. La classe est un lieu – un habitat – où nombre de contraintes virtuelles s'actualisent à l'abri des regards extérieurs. Dans ce qui suit, nous irons voir pourtant la geste du professeur et des élèves dans l'intimité de classes de seconde, en ce moment plus spécifique où ils ont commerce avec la statistique. Le mode d'observation adopté est cependant indirect : nous ne rendrons pas compte d'observations *in situ*, mais de l'observation des traces écrites de cette activité, telle donc qu'on peut la saisir à travers des cahiers d'élèves, ou plutôt de l'ensemble des documents écrits restant en possession des élèves – y compris, bien sûr, leurs propres notes manuscrites – à l'issue du travail de la classe. Cette technique de prise d'information, mise au point à l'IUFM d'Aix Marseille [15], possède, outre ses mérites ordinaires, l'avantage d'être applicable ici à l'ensemble complet du travail d'étude de la statistique au cours d'une année scolaire, sans pour autant que le corpus des traces écrites recueilli ait un volume excessif. Nous avons retenu pour l'examen auquel nous procéderons ci-après quatre corpus provenant de quatre classes de seconde dont deux appartiennent à un lycée du centre-ville de Marseille et deux à un lycée du centre-ville de Lyon, l'un et l'autre scolarisant une population d'élèves issus des classes moyennes, et cela uniquement dans les séries générales L, ES et S [16]. Les corpus ont été recueillis auprès d'élèves qui, au moment du recueil, étaient tous quatre en classe de première S (et étaient capables de fournir les éléments d'information demandés) [17]. En dépit du relatif contrôle sur les quelques variables évoquées jusqu'ici, un

---

[15] Pour analyser et évaluer le travail des professeurs stagiaires de mathématiques dans la classe dont ils ont la responsabilité, plusieurs prises d'information y sont réalisées : deux sous la forme d'observations *in situ*, et une prise d'information qui suit la deuxième de ces visites en classe et prend la forme matérielle d'un corpus documentaire, dit *corpus B*, comportant l'ensemble des documents écrits (activités, synthèses, exercices, devoirs en classe, devoirs à la maison, etc.) témoignant de l'activité de la classe (observée à travers deux élèves judicieusement choisis par le professeur stagiaire) sur le thème d'études principal travaillé lors de la deuxième visite, et cela au long d'une séquence comportant de cinq à sept séances réparties autour de la séance observée *in situ*.

[16] En 2004, les résultats aux différents baccalauréats préparés sont très proches dans les deux lycées : les taux de réussite y sont respectivement de 89 % et 92 % pour la série L, de 92 % et 91 % pour la série ES, enfin de 86 % et 87 % pour la série S.

[17] La collecte a été réalisée en 2004-2005 et porte donc sur des enseignements donnés en classe de seconde durant l'année 2003-2004. Le recueil auprès d'élèves de première S a été motivé essentiellement par le souci d'accéder à des corpus les plus complets possibles, tant en ce qui concerne la constitution des traces écrites en classe de seconde qu'en ce qui touche à leur archivage par l'élève, l'idée étant que, en règle générale, l'intention d'aller vers une filière scientifique se traduit plus fréquemment par une meilleure qualité du travail de constitution des traces écrites et de leur conservation ultérieure. Soulignons en revanche que le travail propre de

premier point doit être mentionné : le volume (compté en nombre de pages écrites ou imprimées) des corpus recueillis varie sensiblement d'une classe à l'autre, les quatre corpus comptant respectivement 6, 21, 22 et 23 pages. La différence de volume entre trois des quatre corpus et le quatrième est une première illustration de la diversité des *tactiques* mises en œuvre par les professeurs sous les contraintes où ils doivent opérer. Nous regarderons ici ces tactiques, non comme le résultat d'un choix passif, en quelque sorte dicté presque mécaniquement par les contraintes éprouvées, mais comme le fruit d'un *travail sur ces contraintes*, consistant à faire jouer certaines d'entre elles, à en ignorer d'autres, à exploiter ce qu'on croit être des conditions disponibles ou, au contraire, à contourner telle contrainte, etc. [18] Pour le professeur, sans doute, la première contrainte est, ici, d'avoir à enseigner la statistique selon un programme rénové, dont certaines parties lui sont encore plus ou moins fortement étrangères. Comment, par exemple, a fait ce professeur pour donner un enseignement de la statistique qui se résume, dans les documents écrits des élèves, en tout et pour tout à six pages ? Ainsi que nous l'avons souligné plus haut, il ne faut pas oublier qu'un certain nombre de professeurs – quelque 5 % dans l'échantillon de l'enquête conduite dans l'académie du Rhône – ont adopté pour tactique, sous des contraintes ordinaires ou extraordinaires, de *ne pas* enseigner la statistique [19]. Il y a là une variable manipulable par le

---

l'élève n'est pas ce qui est visé ici. L'observation porte sur *le travail de la classe* (saisi à travers les documents des élèves) en tant qu'entité collective au sein de laquelle nous observons plus particulièrement le travail du professeur. Par ailleurs nous avons voulu éviter les classes de seconde regardées comme fortes pourvoyeuses d'élèves de première ES, ce qui pourrait influer sur l'enseignement à observer, parce que le professeur peut être tenté alors de regarder la statistique comme un savoir plus spécialement pertinent pour une majorité d'élèves.

[18] Pour éclairer rapidement cette problématique, donnons un exemple simple. Je sors de chez moi pour aller en quelque endroit de la ville ; je suis soumise aux contraintes dessinées par le réseau des rues et voies de communication : je dois par exemple contourner tel immeuble, parce que son concepteur n'a pas prévu que les piétons puissent le traverser (contrairement à ce qui est le cas pour certaines créations de l'architecte Le Corbusier, par exemple) ; mais dans cet espace contraint, qui offre un ensemble de possibles que je ne suis jamais sûre d'avoir totalement exploré, je peux dessiner des itinéraires divers, qui satisferont *en outre* à des contraintes hétérogènes : ne pas passer dans telle ruelle parce que le bruit y est – à mes oreilles – assourdissant, emprunter telle avenue parce que cela me permet de passer devant tel kiosque à journaux, etc. Le « travail sur les contraintes » peut évidemment assumer la forme de *tactiques individuelles*, comme ici, mais il peut également se hausser au niveau de *stratégies collectives* : une association d'usagers peut, par exemple, chercher à obtenir que tel passage privé soit rendu public, etc.

[19] L'un des classeurs d'élève que nous avions recueillis ne comportait ainsi aucune trace d'un travail sur la statistique. Une enquête auprès du professeur nous a permis de savoir que, ayant été malade au cours de l'année

professeur, même si toutes les valeurs de cette variable ne sont pas également compatibles avec certaines contraintes essentielles du métier : en seconde, par exemple, il est traditionnellement mieux accepté de sacrifier la statistique (ou même la géométrie dans l'espace) que de sacrifier l'étude des fonctions (ou même celle la géométrie plane). Cela étant, le professeur qui a réduit à six pages la projection écrite du travail réalisé sur la statistique a fait un autre choix, moins radical, moins visible, sans doute, mais qui ne saurait tout à fait passer inaperçu : du programme de statistique, il n'a retenu que la description de séries statistiques et a ignoré tout un secteur d'études, celui de la fluctuation d'échantillonnage et de la simulation ! Pour décrire les tactiques professorales de cet ordre, il nous faudra en règle générale entrer dans un plus grand détail à propos de la matière mathématique traitée et du développement qui est donné à son étude ; mais l'enseignement minimaliste de ce professeur permet aussi de voir, sans aller y regarder de beaucoup plus près, une autre variable dont la manipulation participe classiquement du travail sur les contraintes que les professeurs sont amenés à faire : l'organisation *didactique* que le professeur a mise en place à propos de l'organisation de savoir à étudier. Dans la hiérarchie de l'évidement d'un enseignement à donner, au-dessus du minimum absolu correspondant au fait de *ne pas* traiter telle partie du programme, on trouve classiquement, d'abord, un niveau où le professeur envisage de « traiter » tel thème d'études dans un *« gros devoir »* à donner à faire à la maison, en particulier pendant les vacances scolaires [20]. Au-dessus de ce niveau se trouve, déjà plus réaliste sans doute, la pratique de débiter en exercices à la maison – qui devraient être tous corrigés mais qui ne le sont pas toujours, et pas toujours intégralement – l'étude d'un thème, plus rarement d'un secteur tout entier. L'organisation pédagogique de la classe de seconde offre cependant, aujourd'hui, une autre possibilité didactique, manifestement de plus haut niveau que ce qui précède du point de vue de l'engagement et de la responsabilité du professeur concerné : l'étude d'un thème ou d'un secteur peut y être conduite dans le seul cadre des *modules*, séances en demi-classe qui, contrairement à une motivation fonctionnelle non étrangère à leur création [21], devient ainsi momentanément un compartiment quasi étanche

---

2003-2004, et son remplacement ayant été tardif, ce professeur avait dû ensuite décider de sacrifier le traitement d'une partie du programme : son choix s'était arrêté sur la statistique.

[20] Il s'agit là d'une tentation tactique à laquelle on voit régulièrement soumis ces professeurs débutants que sont les professeurs stagiaires des IUFM. C'est ainsi qu'une question soulevée lors du séminaire du mardi matin demandait s'il était possible de « traiter le chapitre *Statistique* sous forme d'exercices et de DM ».

[21] Pour le dire en peu de mots, les séances de *modules* sont là pour « moduler » le travail en classe entière, que cette modulation ait trait au niveau technique, au niveau technologique, ou même au niveau théorique.

par rapport au travail en classe entière. Ajoutons que la réception professorale du dispositif modulaire tend à l'identifier à un lieu de travaux pratiques dirigés, où l'activité de *synthèse* des résultats obtenus ne saurait avoir qu'une place des plus limitées. Cela noté, c'est donc ce choix tactique, fondé sur une exploitation didactique particulière de l'organisation pédagogique, qu'a fait le professeur que nous suivons ici [22]. Les traces écrites correspondantes consistent en la résolution d'exercices empruntés au manuel de la classe, qui, en l'espèce, n'est autre que le manuel de la collection Déclic examiné au chapitre précédent. La classe n'en utilise, en tout et pour tout, que trois exercices et une fiche de travail dirigé. Le corpus de six pages s'ouvre par l'exercice – entrevu également au chapitre précédent – sur le fabricant de chaussures pour hommes. Nous en reproduisons ci-après l'énoncé *in extenso* [23] :

> Un fabricant de chaussures pour hommes s'interroge sur l'organisation de la chaîne de fabrication. Il veut à la fois éviter d'être en rupture de stock sur une pointure qui se vend fréquemment, et ne pas investir sur la fabrication de pointures trop rares.
>
> Un sondage, sur 250 hommes adultes choisis au hasard, donne la répartition des pointures suivantes :

pointure	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
nombre d'hommes	1	4	21	34	48	55	42	37	7	0	1

> 1° Déterminer l'étendue des pointures et la pointure médiane de cet échantillon.
>
> Si on ne comptabilisait pas les deux valeurs extrêmes, que deviendraient l'étendue et la médiane ?
>
> 2° Les personnes interrogées qui chaussent du 42 au 44 représentent quel pourcentage de l'échantillon ?
>
> 3° Pour des questions de coûts de fabrication, le fabricant ne veut pas investir dans la fabrication de chaussures dont la pointure ne dépasse pas 5 % de la demande.
>
> Si l'on se fie à cet échantillon, quelles pointures seront fabriquées ?
>
> Quel pourcentage de clients potentiels ne trouveront pas chaussures à leurs pieds ?

On voit alors, sous la plume de l'élève, se concrétiser le scénario que nous avions évoqué : la question génératrice du travail peut être entièrement ignorée. L'élève, au lieu d'assumer un

---

[22] Par comparaison, signalons que, concernant les thèmes d'études « Ordre des nombres » et « Valeur absolue d'un nombre » (qui relève du domaine intitulé *Calcul et fonctions*), l'enseignant que nous suivons ici a fait un autre choix tactique en proposant un ensemble de travaux qui occupent quelque 12 pages dans la rubrique « Cours & exercices » du classeur de l'élève et qui ont fait l'objet de trois séances de module, respectivement intitulées « Comparaison des nombres », « Inégalités » et « Valeur absolue ».

[23] Il s'agit de l'exercice 10, page 189. Voir notre chapitre 6, où nous n'avions reproduit que la présentation de la situation problématique étudiée.

travail de statisticien, apparaît ici comme un aide statisticien, qui ne fait pas lui-même de statistique. Demande-t-on l'étendue de l'échantillon ? Il est égal au maximum diminué du minimum, c'est-à-dire à 48 diminué de 38, soit 10. La pointure médiane ? L'échantillon est d'effectif pair : 250 ; « la médiane, écrit alors l'élève, est la moyenne entre le 125^{e} terme et le 126^{e} terme de la série *ordonnée* » (Le soulignement est de la main de l'élève.) Il faut donc calculer les effectifs cumulés : 1, 5, 26, 60, 108, 163… Dans la classe, on ne s'arrête pas là : on dresse un tableau complet comportant 11 colonnes correspondant aux pointures de 38 à 48, et 3 lignes où l'on inscrit successivement la pointure, puis les effectifs, et enfin les effectifs cumulés croissants. Le traitement de l'exercice, comme on le voit, ne s'adapte pas finement au cas particulier étudié, mais déroule un algorithme général de traitement, dont il fournit ainsi un exemple paradigmatique de mise en œuvre.

Pointure	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
effectifs	1	4	21	34	48	55	42	37	7	0	1
eff. cumulés croissants	1	5	26	60	108	163	205	242	249	249	250

La netteté des traces écrites, le caractère de « corrigé magistral » qui s'y reflète portent à penser qu'il ne s'agit en aucune façon d'une production autonome de l'élève, mais, au mieux, d'une production de la classe sur laquelle celle-ci s'est accordée sous la houlette du professeur, ou même plus vraisemblablement d'un texte finalement imposé et quasiment dicté par le professeur, où l'on trouve notamment, mentionnées soigneusement et explicitement, les définitions et « formules » utiles au travail à accomplir (expression de l'étendue, définition et détermination de la médiane). La suite de l'étude conserve à l'élève sa fonction d'aide parcellaire pour un travail d'ensemble qui ne lui est pas demandé et dont la motivation lui échappe sans doute. Au demeurant, en conformité avec l'énoncé, aucun commentaire n'est rédigé, comme si l'interprétation des gestes accomplis allait tout à fait de soi ! Suivant l'énoncé, toujours, la détermination de l'étendue et de la médiane est répétée en supposant qu'on supprime les pointures extrêmes, manœuvre qui dissimule un petit piège [24], dans lequel on n'aura pas le loisir de voir l'élève tomber puisque, manifestement, ce n'est pas l'original de son travail que nous suivons : le minimum est maintenant la pointure 39, mais le maximum

[24] Comme on l'imagine, ce piège tient à une singularité de l'échantillon observé, et non à une propriété de la population parente. Mais, dans le style de travail imposé ici, il n'y a aucune raison que la remarque en soit faite, ni à plus forte raison consignée par écrit.

n’est pas 47, mais 46, en sorte que l’étendue tombe de 10 à 7, tandis que – la conclusion est là-dessus sans problème – la médiane reste inchangée.

Le style d’intervention attendu de l’élève ne change pas avec la deuxième question ; un coup d’œil au tableau proposé par l’énoncé permet de voir que le pourcentage demandé est égal à $\frac{48 + 55 + 42}{250} = 0{,}58 = 58\ \%$ [25]. La troisième et dernière question est, en quelque sorte, la question clé qui motivait l’étude. Dans une problématique plus authentiquement vécue du travail statistique, la rédaction de la réponse pourrait assumer la forme suivante par exemple :

> Si l’on se fie à l’échantillon recueilli, c’est-à-dire si l’on suppose qu’il est à peu près représentatif de la population des clients du fabricant – ce qu’il n’est certainement pas dans le détail : voir, par exemple, l’effectif correspondant à la pointure 47 –, alors 5 % de l’effectif de l’échantillon, est égal à un effectif de 12,5 ; en conséquence les pointures d’effectif inférieur, c’est-à-dire les pointures 38 et 39 d’une part, 46, 47 et 48 d’autre part, ne seront pas fabriquées. Par suite, le pourcentage de personnes qui “ne trouveront pas chaussures à leur pied” sera égal à $\frac{1 + 4 + 7 + 0 + 1}{250} = 5{,}2\ \%$.

Or ce que montrent les traces écrites de l’élève se réduit à ceci, que nous reproduisons ci-après en respectant le plus possible la disposition dans l’espace de la feuille :

> 3) 38 ; 39 ; 46 ; 47 ; 48 → pas fabriquer
> 5,2 % des personnes ne pourront pas trouver de chaussures
> à leurs pieds.

Le contrat que conforte une telle rédaction, lors par exemple de sa relecture à l’occasion de la préparation d’un contrôle [26], énonce silencieusement que ce qui est véritablement demandé à l’élève, ce sont les calculs et leurs résultats, et non le raisonnement qui conduit à ces calculs et en permet le contrôle et l’interprétation. Au cœur de la « gangue » statistique gît une parcelle de mathématiques généralement de bas niveau, qu’il faut seulement apprendre à manipuler de façon correcte. Pourtant, le travail sur les contraintes réalisé par ce professeur mérite d’être souligné. Car si, d’une part, comme on vient de le dire, le travail statistique y fait l’objet, *in fine*, d’une réduction arithmétique des plus classiques, d’autre part, et en même temps, le choix des travaux proposés aux élèves va en sens inverse – en apparence – de cette réduction

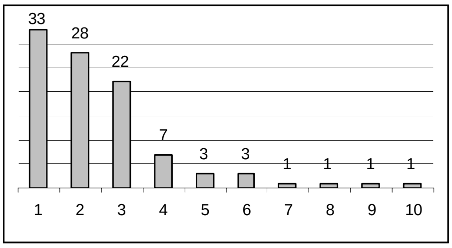
---

[25] La rédaction manuscrite de l’élève fait apparaître l’égalité fautive $\frac{48 + 55 + 42}{250} \times 100 = 58\ \%$, dont on peut supposer qu’elle n’a pas seulement l’élève pour auteur. Les pourcentages sont durablement un objet mal défini dans la culture des professeurs de mathématiques !

[26] Cette remarque ne tient pas compte du fait que, dans le cas examiné, aucun contrôle ne portera sur la matière travaillée ici…

arithmétique. Nous l’avons vu à propos du problème du fabricant de chaussures ; le deuxième exercice traité, dont nous reproduisons ci-après l’énoncé, est de même tout à fait conforme au schéma d’une étude statistique tentant de répondre à une question qui fait sens en dehors de toute donnée chiffrée préalable. Ici, il s’agit d’une question que l’on peut paraphraser ainsi : « Est-il plus opportun, lorsqu’on établit la fiche technique d’une catégorie d’ampoules électriques, d’y faire figurer la durée de vie *moyenne* ou la durée de vie *médiane* ? » Bien entendu, l’énoncé prend les choses à rebours [27] :

On a testé la durée de vie d’un échantillon d’ampoules électriques d’une même marque, dans les mêmes conditions. Les résultats sont donnés par le graphique ci-dessous : en abscisse, 1 signifie [0 ; 100[, 2 signifie [100 ; 200[, etc. (en heures). L’effectif de chaque classe est indiqué au-dessus du rectangle.



1° Calculer la durée de vie moyenne d’une ampoule. (On supposera que, dans chaque classe, les valeurs sont réparties régulièrement.)

2° Y a-t-il plus ou moins de la moitié de l’effectif dont la durée de vie est supérieure ou égale à la durée de vie moyenne ?

3° Pour qu’il y ait le moins possible de consommateurs déçus, faut-il indiquer, sur la fiche technique, la durée moyenne ou la durée médiane ?

Les traces écrites correspondant à cet exercice sont une tachygraphie qui ne laisse place, comme on l’a déjà observé, qu’à un *minimum minimorum* de rédaction. La durée de vie moyenne des ampoules est de 200 h ; sur les 100 ampoules qui constituent l’échantillon, 39 ont une durée de vie égale ou supérieure à la moyenne : la médiane est donc nécessairement plus petite que la moyenne – la durée de vie médiane est d’environ 150 heures. Dans les feuilles de l’élève, la réponse à la troisième question tient en quelques mots – « il vaut mieux indiquer la médiane », là où on aurait pu attendre un petit discours argumentatif semblable à celui-ci :

Si l’on indiquait la durée de vie moyenne, soit 200 h, les consommateurs trouveraient que, en moyenne, 6 ampoules sur 10 environ ne dépassent pas cette durée de vie-là, ce qui peut les induire à penser, soit qu’ils manquent de chance, soit, plus vraisemblablement, que le fabricant a porté sur la fiche technique une indication spécieuse ! En revanche, si l’on indique la durée médiane, cette difficulté est, par définition, supprimée : les consommateurs verront à peu près 50 % des ampoules en leur possession dépasser la durée de vie indiquée. Si le fabricant ne veut pas susciter de protestations – sans doute

[27] Il s’agit de l’exercice 16, page 191 du manuel de la collection Déclic.

infondées mais compréhensibles – de la part des consommateurs, il a donc intérêt à indiquer la durée de vie *médiane*.

La possibilité qu'un tel développement apparaisse dans les traces écrites constituées dans la classe de mathématiques paraît aujourd'hui extrêmement faible : seul un discours argumentatif très codifié auquel on accorde – parfois, à vrai dire, d'une manière très libérale – le titre de « démonstration » semble avoir « droit d'écriture » dans la classe de mathématiques contemporaine [28]. Cette contrainte pèse sur l'ensemble de l'activité mathématique [29]. Mais

---

[28] Bien entendu, un autre grand type de discours « argumentatif » très codifié y est reçu : le discours « calculatoire » (numérique, algébrique, vectoriel, etc.), discours d'où d'ailleurs les formulations d'accompagnement en langue naturelle tendent à s'effacer, ce qui ne laisse plus subsister alors que des morceaux de calcul souvent peu liés entre eux. (Une telle situation a été pointée plus haut, en passant, à propos de la manipulation erronée du signe %.)

[29] À titre de spécimen d'un autre style d'écriture mathématique, nous reproduisons ici un passage typique d'un ouvrage déjà ancien dû aux probabilistes russes B. V. Gnedenko et A. Ia. Khintchine (1969). Cet extrait a pour objet d'établir – de « démontrer » – l'inégalité de (Bienaymé-)Tchébychev. Voici ce qu'écrivent ces auteurs (*op. cit.*, pp. 117-118) : « Nous avons déjà signalé à plusieurs reprises le fait que la connaissance de l'un quelconque des écarts moyens d'une variable aléatoire (par exemple la connaissance de son écart quadratique moyen) permet de se faire une idée approximative de l'amplitude des écarts que pourront effectivement marquer les valeurs de cette variable par rapport à la moyenne. Mais cette évaluation reste dénuée de tout caractère proprement quantitatif et ne permet pas de calculer, même de façon toute approximative, les probabilités des écarts les plus accusés. Ces considérations fournissent la matière du raisonnement ci-après, dû à Tchébychev. Partons de l'expression de la dispersion d'une variable aléatoire x que nous avons formulée à la page 106 : $Q_x^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x})^2 p_i$. Soit α un nombre positif quelconque. Si, dans la somme ci-dessus, nous supprimons tous les termes où $|x_i - \overline{x}| \leq \alpha$ et ne gardons que ceux où $|x_i - \overline{x}| > \alpha$, nous ne pouvons que l'amoindrir : $Q_x^2 \geq \sum_{|x_i - \overline{x}| > \alpha} (x_i - \overline{x})^2 p_i$. Mais la réduction sera encore plus forte si, dans chacun des termes, nous substituons au facteur $(x_i - \overline{x})^2$ la variable plus petite α^2, soit $Q_x^2 \geq \alpha^2 \sum_{|x_i - \overline{x}| > \alpha} p_i$. La somme qui figure maintenant à droite est celle des probabilités de toutes les valeurs x_i de la variable aléatoire x qui s'écartent de $\overline{x}$, dans un sens ou dans l'autre, de plus de α. En vertu de la règle d'addition, nous avons là la probabilité pour que la variable x prenne l'une quelconque de ces valeurs. Autrement dit, c'est la probabilité $P(|x - \overline{x}| > \alpha)$ pour que l'écart réel soit plus grand que α. Nous obtenons ainsi la formule $P(|x - \overline{x}| > \alpha) \leq \frac{Q_x^2}{\alpha^2}$ (1) qui nous permet d'évaluer la probabilité des écarts supérieurs à un quelconque nombre donné α, alors même que nous ne connaissons que l'écart quadratique moyen Q_x. Certes, l'évaluation fournie par l'« inégalité de Tchébychev » (1) est souvent d'une approximation très grossière. Telle quelle, elle peut toutefois être utilisée à certaines fins pratiques. Mais c'est surtout sur le plan théorique qu'elle se montre d'une extrême importance. »

elle semble plus spécifiquement invalidante en statistique, où le travail sur un univers d'objets « métissés » ne saurait être ramené sans pertes à une suite plus ou moins organisée de fragments de calcul. Sans doute y avait-il un peu de cette idée-là dans la proposition, si mal reçue par les professeurs, d'instaurer un « cahier de statistique » où le régime de l'écrit soit plus ouvert, plus divers, plus accueillant à des formes discursives mal tolérées par ailleurs dans la classe de mathématiques d'aujourd'hui [30].

L'étude suivante que l'élève a consignée par écrit correspond à la fiche de travail dirigé n° 5 du manuel de la collection Déclic. Ainsi qu'on l'a indiqué au chapitre précédent, on y voit poindre l'étude des effets de structure, comme le montre l'entrée en matière reproduite ci-après, qui, une fois de plus, témoigne d'un choix professoral faisant sa part à l'authenticité statistique, alors même que les traces écrites du travail de la classe, on va le voir, s'inscrivent en faux contre cette impression première :

> Un concours est organisé dans un centre d'examens. Tous les candidats passent la même épreuve. Dans le premier centre, les garçons ont obtenu 13 de moyenne et les filles 12 de moyenne. Dans le second centre, les garçons ont obtenu 9 de moyenne et les filles 8 de moyenne. Le président du jury en déduit que les garçons ont eu de meilleurs résultats que les filles. Est-ce si sûr ?

En l'espèce, l'énoncé indique que la note moyenne de 12 est celle d'un ensemble de 104 filles, celle de 13 de 58 garçons, que la note moyenne 8 a été calculée sur un groupe de 32 filles, tandis que la note moyenne 9 est celle d'un groupe de 87 garçons. La moyenne des filles vaut donc $\frac{104 \times 12 + 32 \times 8}{104 + 32} \approx 11{,}06$, tandis que la moyenne des garçons vaut $\frac{58 \times 13 + 87 \times 9}{58 + 87} \approx 10{,}6$. La conclusion du président du jury était donc erronée ! Dans le document de l'élève, les traces écrites sont minimalistes : elles consistent en un tableau récapitulant les effectifs fournis par l'énoncé, suivi de deux lignes qui donnent, la première, ce que l'élève note, dans sa sténographie personnelle, la « my de ts les 145 garçons », la seconde fournissant, semblablement, la « my de ttes les filles ». Aucune conclusion n'est explicitement indiquée. De la fiche de travail dirigé qui avait si belle allure dans le manuel ne reste plus ici qu'un squelette qui paraît constituer un bien mauvais matériau pour un re-travail éventuel par l'élève du type de situations abordé [31]. L'avant-dernière petite étude est un exercice pris dans

[30] Le document d'accompagnement du programme de seconde indique en effet ceci : « L'élève pourra se faire un cahier de statistique où il consignera une grande partie des traitements des données et des expériences de simulation qu'il fait, des raisons qui conduisent à faire des simulations ou traiter des données, l'observation et la synthèse de ses propres expériences et de celles de sa classe. »

[31] Il est vrai que ce qui est au cœur de cette étude est hors programme !

le manuel où, contrairement aux études précédentes, on ne voit pas clairement apparaître de question génératrice [32]. On y parle d'une entreprise artisanale fabricant chaque jour 250 pièces de tissu, qui se trouvent être de longueur inégale ; c'est ce caractère – la longueur – qu'il s'agit d'étudier à propos de la population des 250 pièces produites dans une journée donnée, population dont on connaît la distribution des mesures par classes d'amplitudes inégales. Plus précisément, l'étude vise à déterminer la longueur moyenne et la longueur médiane des 250 pièces. Pour la détermination de la médiane, qui fait l'objet de la 4e question, l'exercice recourt à une technique graphique, qui, nous le savons, est en fait hors programme ; mais l'élément intéressant, ici, apparaît entre parenthèses, à propos de l'interprétation que les élèves sont invités à proposer :

> 4° a) Calculer les fréquences et les fréquences cumulées croissantes (faire un tableau numérique).
> b) Représenter le polygone des fréquences cumulées croissantes et en déduire graphiquement la médiane à 0,1 m près. En donner une interprétation (sous forme de phrases faisant intervenir la situation concrète).

Peine perdue ! Si les feuilles de l'élève font bien apparaître le polygone des fréquences cumulées croissantes – bien qu'à une échelle trop petite pour permettre une lecture agréable et précise –, les traces écrites n'enregistrent aucune « phrase » interprétative. Il ne suffit pas d'être injonctif pour changer des contraintes qui se sont aujourd'hui indurées, en mathématiques, dans la culture commune aux élèves et à leurs professeurs ! La dernière étude menée à bien nous fait retrouver un problème envisagé au chapitre précédent, relatif au chemin d'accès à une plage. L'idée laissée implicite par les rédacteurs de l'énoncé est qu'on cherche à connaître la proportion des personnes qui s'installent à moins de 10 m du chemin d'accès (afin de savoir par exemple quelle proportion d'acheteurs potentiels de produits divers vendus sur les plages se trouve « couverte » si le vendeur demeure dans une zone de 10 m de part et d'autre du chemin d'accès). La question est bonne. Mais, dès lors qu'on a procédé à un comptage sur une zone assez large (qui, ici, va de 30 m d'un côté à 30 m de l'autre), où, en l'espèce, on trouve installées 340 personnes, et qu'on a présenté les données ainsi recueillies sous forme d'un tableau (lequel fait apparaître que les personnes installées à 10 m au plus du chemin représentent une population d'effectif 273), la réponse est quasi immédiate : le pourcentage cherché vaut $\frac{273}{340}$, soit environ 80,3 %. Et c'est ce que des traces écrites fort dépouillées laissent voir – non sans répéter, à propos du pourcentage à calculer, une erreur déjà stigmatisée.

[32] Il s'agit de l'exercice 32, page 193.

Là se termine le corpus témoignant de l'étude de la statistique dans l'une des deux classes de seconde « marseillaises ». Les trois autres corpus retenus sont proches par le nombre de pages, on l'a dit : 21, 22 et 23. Pour le reste, c'est la variété du traitement, c'est-à-dire du travail sur les contraintes, qui frappe. Le second corpus issu d'une classe de seconde marseillaise, sur lequel nous nous arrêterons maintenant, est, formellement, le plus gros des trois. Il est marqué essentiellement par une forme d'hystérésis, fruit manifeste d'un travail sur les contraintes consistant à changer le moins possible ce qu'on faisait avant l'entrée en vigueur du programme nouveau [33]. Le classeur de l'élève comporte d'abord une feuille imprimée recto verso, manifestement distribuée par le professeur en début de séquence et intitulée *Lexique de statistiques* (sic) *à une variable*. Il s'agit là, manifestement, de la réutilisation d'un document ancien, sans mise à jour – on y trouve en effet mentionnées, notamment, les notions de décile, d'écart type, de quartile, de variance. On y trouve aussi deux entrées classiques – « continu » et « discret » – qui, on va le voir, ont structuré l'enseignement donné, alors qu'elles relèvent tout aussi manifestement de l'ancienne transposition didactique de la statistique, dont ce professeur est sans doute familier. Ces termes, en effet, n'apparaissent jamais dans le nouveau programme, et n'ont qu'une unique occurrence dans le document d'accompagnement – et cela encore, non pas à propos de la statistique, mais à propos de la notion de fonction [34]. Le lexique utilisé, au reste, rappelle que, dans l'ancienne transposition didactique de la statistique, l'opposition *théorique* entre variables discrètes et variables continues en était venue à désigner, par métonymie, deux traitements possibles d'une série (finie !) de données brutes, aboutissant dans un cas à fournir, pour chaque valeur observée x_i, l'effectif n_i des observations de cette valeur, dans l'autre cas à regrouper les valeurs observées dans des classes d'intervalles C_k, avant de donner l'effectif N_k des valeurs observées x_i appartenant à la classe C_k. Le lexique utilisé fait correspondre aux entrées « continu » et « discret » des énoncés qui témoignent de l'identification implicite entre les deux dichotomies évoquées :

Continu	Les valeurs d'un **caractère continu** sont regroupées en intervalles appelés classes.

[33] Rappelons, avec le *Dictionnaire historique de la langue française* (1993), que le mot *hystérésis* « se dit de la persistance d'un phénomène quand la cause qui le produit cesse ».

[34] Le document officiel indique exactement ceci : « On évitera les exercices systématiques de détermination d'ensemble de définition ; dans la plupart des cas, on le donnera. En dehors de quelques exemples où celui-ci pourra être fini (cas de fonctions du temps du type « nombre de mariages en fonction de l'année » où la variable est discrète et les graphiques correspondants parfois continus !), ce sera toujours un intervalle ou la réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$. »

…	…
…	…
Discret	À chaque valeur d'un **caractère discret** est associé un effectif.

On sait que les rédacteurs du nouveau programme n'ont pas un goût immodéré pour le regroupement en classes (dans le cas au moins où les seules données qu'on possède ne sont pas déjà organisées de cette façon). L'opposition mise en avant par le professeur n'est pas centrale dans le nouvel abord de la statistique que le programme rénové s'efforce de promouvoir. Or les traces écrites en notre possession montrent que le « cours » du professeur est divisé en quatre sections dont les deux premières sont intitulées, respectivement, *Étude d'une série statistique discrète* et *Étude d'une série statistique continue*. La première occupe quelque sept pages, la seconde environ trois pages et demie : le tribu payé au passé, dans le cours seul, occupe donc près de la moitié du corpus écrit. La première section du cours prend comme matériel de travail les 32 moyennes trimestrielles en mathématiques des élèves de la classe. Pour chacune des 19 valeurs x_i effectivement attribuées, on dispose de l'effectif n_i des élèves ayant obtenu cette moyenne. On détermine alors la moyenne des moyennes en calculant (à la main, semble-t-il) la somme $n_1x_1 + ... + n_{19}x_{19}$ (où la suite des x_i est strictement croissante). À cette occasion, quoique sans aucune fonctionnalité, se trouve introduit, avec la notation $\bar{x}$, le signe $\sum$, accompagné d'exemples illustratifs sans rapport avec le matériel numérique travaillé jusque-là. Le point est fait ensuite sur l'usage de la calculatrice et des indicateurs dont elle fournit la valeur numérique pour une série statistique donnée – en laissant toutefois de côté explicitement les indicateurs hors programme (somme des carrés des valeurs, etc.). La définition de la médiane figurant dans le lexique n'est en aucune façon motivée, que ce soit pour le cas « continu » ou pour le cas « discret » – pour lequel est donnée la définition effectivement retenue par le nouveau programme de seconde. Celle-ci est, en l'espèce, mise en œuvre sur la série des 32 notes reconstituée (composée de n_1 occurrences de la note x_1 suivies de n_2 occurrences de la note x_2, etc.). Il apparaît alors que la détermination de la médiane (qui, en vertu de la définition imposée, dépend de la parité de la taille de l'échantillon : les deux cas sont envisagés) peut être faite plus rapidement en cumulant les effectifs n_i, ce qui peut, s'assure-t-on, être fait à l'aide de la calculatrice de la classe, dont on note soigneusement que, dans certaines conditions, elle présente une anomalie de fonctionnement évitable par le recours à un programme alternatif, que les élèves consignent par écrit. On voit ici clairement qu'un répertoire anciennement constitué de gestes utiles au travail statistique concret soutient l'enseignement donné par le professeur. Un tel « acquis » constitue sans doute tout à la fois un point d'appui du travail d'enseignement à accomplir et un empêchement à y intégrer pleinement les problématiques apportées par le nouveau programme. Les notes écrites de l'élève font alors apparaître le traitement d'un exercice pris dans le manuel, qui n'est rien d'autre que l'étude relative au problème du fabricant de chaussures : les remarques déjà faites à propos du premier corpus examiné pourraient être répétées *verbatim*, ou quasiment [35].

La seconde section des notes de cours examinées prend appui sur une feuille de travail intitulée elle-même *Étude d'une série statistique continue*. Le professeur y a repris, dans une présentation adaptée, l'étude sur l'entreprise qui fabrique chaque jour 250 pièces de tissu – étude que les auteurs du manuel eux-mêmes ont intitulé *Étude d'une série continue* et dont nous donnons ici l'énoncé complet [36] :

Une entreprise artisanale fabrique chaque jour 250 pièces de tissu. Leur longueur est inégale, suivant la qualité du tissu ou l'équipe chargée de la fabrication.

La production d'une journée peut être résumée par le tableau statistique suivant :

longueur (en m)	nombre de pièces
[20 ; 24[	40
[24 ; 26[	70
[26 ; 28[	45
[28 ; 30[	45
[30 ; 36[	50

1° Quelle est la population étudiée ? la variable ?

Quelle est la nature de la variable ? son étendue ?

2° Déterminer la moyenne de cette série (à 0,1 près).

3° Dresser un histogramme de cette série sur papier millimétré en indiquant le principe de sa construction.

4° a) Calculer les fréquences et les fréquences cumulées croissantes (faire un tableau numérique).

b) Représenter le polygone des fréquences cumulées croissantes et en déduire graphiquement la médiane à 0,1 m près. En donner une interprétation (sous forme de phrases faisant intervenir la situation concrète).

---

[35] Curieusement, alors qu'on voit apparaître ici l'égalité (correcte) 5 % × 250 = 12,5, on rencontre aussi une égalité erronée d'un type déjà noté (à propos du même « exercice ») : « $\frac{1+4+7+1}{250} \times 100 = 5{,}2$ % ».

[36] Il s'agit, rappelons-le, de l'exercice 32 page 193.

L'adaptation réalisée par le professeur consiste, ici, à placer entre la colonne des différentes classes C_k et la colonne donnant les effectifs N_k une colonne précisant le centre c_k de chaque classe, et à rajouter une colonne donnant les fréquences $f_k = \frac{N_k}{250}$ – colonne que les élèves doivent seulement compléter (deux de ses cinq lignes ont en effet été remplies à l'avance par le professeur). On notera que les fréquences apparaissent ici pour la première fois dans le cours, et cela pour calculer la moyenne de ce qui, finalement, est ramenée à une série discrète, $(c_k\ ; N_k)_{1 \leq k \leq 5}$. Doit-on souligner en ce point que toutes ces notions sont inscrites au programme du cycle central du collège, ce que le programme de seconde prend bien soin de rappeler [37] ? La question relative à la médiane est elle-même loin d'être inédite, puisque l'une des compétences exigibles en classe de troisième est décrite ainsi par le programme de cette classe :

> Une série statistique étant donnée (sous forme de liste ou de tableau, ou par une représentation graphique), proposer une valeur médiane de cette série et en donner la signification.

L'exercice choisi dans le manuel par le professeur est en lui-même l'effet d'une lourde inertie (il y est question, par exemple, de déterminer graphiquement la médiane). Mais le professeur ajoute sa touche personnelle. La détermination graphique réalisée par l'élève conduit à situer la médiane ente les valeurs 26 et 27 (il s'agit de mètres de tissu). La chose faite, on voit alors, dans les notes de l'élève, plus d'une page consacrée au *calcul* de la médiane par interpolation ! Ce calcul, indiqué entre parenthèses comme étant chose « rare », conduit à établir l'équation du segment [AB] du polygone des fréquences cumulées, puis à rechercher l'abscisse du point M (x ; 0,5) de cette droite, où x est la valeur approchée de la médiane que l'on recherche. Après avoir mis en œuvre une première technique qui aboutit à écrire que $x = \frac{2,4}{0,09} \approx 26,6$, la classe se voit proposé une « procédure plus rapide », qui consiste pour l'essentiel à égaler la pente de la droite (AB) et celle de la droite (AM). Le phénomène est flagrant : non seulement la fidélité inertielle au passé reconduit des techniques officiellement écartées du nouveau curriculum, mais encore elle pousse à trouver là l'occasion de loger un travail certes pertinent dans la formation mathématique des élèves mais bien mal venu dans ce contexte. L'inertie évoquée se manifeste encore par d'autres vestiges d'un cours ancien,

[37] Les fréquences sont au programme de la classe de cinquième, les effectifs cumulés et les fréquences cumulées au programme de la quatrième, classe dans laquelle, notent encore les auteurs du programme de seconde, les élèves ont appris en principe à déterminer une « valeur approchée de la moyenne d'une série statistique regroupée en classes d'intervalles ».

répondant à un autre système de contraintes. Ayant ainsi fait calculer – comme on l'a vu – la médiane, le professeur fait déterminer, avec la même technique de calcul, le premier et le neuvième déciles ! Si on ne voit rien, dans les notes de l'élève, qui ressemble à l'« interprétation » demandée à propos de la médiane, on y trouve tout un petit discours – des « phrases », comme le dirait le manuel utilisé – qui associe d'une façon inattendue référence aux déciles et… élagage d'une série :

> Interprétation : 10 % des pièces ont une longueur < à d_1 = 22,5 m.
>
> 90 % des pièces ont une longueur < à d_9 = 33 m.
>
> Donc 80 % (90 – 10) des pièces ont une longueur comprise entre d_1 et d_9 : on dit qu'on a élagué la série de ses valeurs extrêmes.

Il semble qu'il y ait là une importation pure et simple d'une partie d'un cours donné autrefois, ou ailleurs. Le même phénomène se produit, en vérité, à propos du tracé de l'histogramme demandé par l'énoncé de l'exercice. Étonnamment, là encore, tout un discours est mis par écrit pour préciser la technique de tracé d'un histogramme, dans le cas notamment où les classes sont d'amplitudes inégales :

> L'œil est sensible à l'encombrement des rectangles utilisés pour représenter les effectifs. On convient donc de représenter au-dessus de chaque classe un rectangle d'aire proportionnelle à son effectif, de la façon suivante :
>
> • on repère les classes d'amplitude minimale ;
>
> • parmi elles, celle d'effectif minimal, et on choisit une unité d'aire.
>
> Lorsque d'une classe à l'autre l'amplitude est multipliée par 2, par 3…, les hauteurs correspondantes sont divisées par 2, par 3… pour un même effectif.

Bien entendu, l'enseignement examiné essaie de faire une place aux thèmes neufs du programme de statistique. À la suite des deux sections que nous avons parcourues, on trouve une troisième section intitulée de façon peu canonique *Propriétés d'une moyenne*. On y aborde la détermination de la moyenne d'un ensemble de valeurs quand on connaît les moyennes et les effectifs de deux sous-ensembles réalisant une partition de l'ensemble. On y examine ensuite l'effet d'un changement d'origine sur les données, sans que la chose, au reste, apparaisse motivée en aucune manière, mais non sans rédiger *in extenso* un « théorème général » gouvernant le phénomène. À cela se limitera le travail sur les propriétés de linéarité de la moyenne.

Nous avions annoncé quatre sections. Les trois premières, dont nous venons de parler, étaient numérotées I, II, III ; la quatrième se glisse presque subrepticement dans les traces écrites de l'élève. À la suite du « théorème général » qu'on vient d'évoquer apparaît un titre non numéroté [38] – *Exemple de simulation*. Les documents écrits de l'élève s'ouvrent ici sur une feuille de travail distribuée aux élèves, qui vise à illustrer la simulation d'un tirage à pile ou face sur la calculatrice utilisée dans cette classe : on y voit le graphique représentant la fréquence des piles obtenus pour *n* lancers, *n* variant, en l'espèce, de 1 à 1000. Les élèves, de leur côté, auront à simuler de tels tirages, à calculer les fréquences correspondantes et à les représenter graphiquement, lorsque *n* varie de 1 à 20. Aussi bien sur le graphique de la simulation des 1000 lancers proposé à la classe par le professeur que sur la simulation des 20 lancers réalisée par l'élève, il est visible que la stabilisation de la fréquence n'est pas chose simple et que les échantillons successifs (de taille *n*) manifestent de réelles fluctuations, y compris pour les « grandes » valeurs de *n* observables dans le cas de la série des 1000 simulations d'un lancer de pièce. Et pourtant il semble que, selon un processus déjà décrit, seul le phénomène de « convergence » ait été pointé dans la classe. Significativement, l'élève dont nous suivons les traces écrites note sur une feuille de travail préparée par le professeur (où figure la courbe des fréquences des piles correspondant aux 20 simulations qu'il a réalisées) cette remarque attendue mais non moins digne d'être discutée :

> On a effectué 20 choix aléatoires d'un nombre 0 ou 1 qui correspondent à 20 lancers de pièces. On constate que la fréquence des piles se rapproche de 50 %.

De toute façon, le contrôle qui suivra, et qui est intitulé sans ambiguïté *Contrôle de mathématiques : Les statistiques*, n'abordera pas les thèmes de la fluctuation d'échantillonnage et de la simulation. Il comporte trois exercices. Le premier a trait à une entreprise de 250 employés dont on connaît les salaires regroupés en classes d'amplitudes inégales. Suivant le schéma directeur de l'exercice qui mettait en scène une entreprise fabriquant des tissus, les élèves ont à déterminer le centre de chaque classe (ce qu'ils avaient trouvé tout fait lors du travail en classe), à calculer les effectifs cumulés croissants (les effectifs de chaque classe étant donnés), et à faire de même pour les fréquences cumulées croissantes, qu'ils doivent présenter sous la forme de pourcentages. Sur cette base, on leur demande de calculer la moyenne, de représenter l'histogramme des effectifs et de déterminer graphiquement la médiane : l'inertie curriculaire est indéniable. Le travail de l'élève dont nous examinons les traces écrites est entaché de ce qu'une annotation du professeur désigne comme des « étourderies regrettables ». S'agissant de l'histogramme, par exemple, s'il indique correctement que l'axe des abscisses est celui des salaires, en revanche il porte sur

[38] Rappelons que, selon le programme, « la notion de fluctuation d'échantillonnage et de simulation ne doit pas faire l'objet d'un cours » : ceci explique peut-être cela.

l’axe des ordonnées la mention « effectifs des salariés », ce que le professeur barre d’une croix énergique : son petit discours sur la construction des histogrammes n’a, dans le cas de cet élève et à cette heure, guère porté ! Pour le reste, il faut calculer le salaire moyen, ce que l’élève fait très correctement, tracer la courbe des fréquences cumulées croissantes et y lire le salaire médian avant de le « contrôler par le calcul ». L’élève trouve graphiquement un salaire médian de 1230 € (la moyenne était de 1320 €), mais, dans son calcul, il commet une nouvelle « étourderie » en interpolant non pas entre 1200 et 1300, comme il conviendrait, mais entre 1200 et 1400. La dernière question demande de préciser, par une lecture graphique, « le pourcentage d’employés dont le salaire est compris entre 1100 € et 2200 € », ce que notre élève réussit parfaitement. Le troisième exercice est en quelque sorte réciproque de ce premier exercice : on y donne un histogramme (représentant les adhérents, groupés par intervalles d’âge, d’une association sportive), on donne l’effectif correspondant à l’un des rectangles constituant l’histogramme, et il faut, en fin de compte, calculer l’âge moyen des adhérents. Le travail est fortement guidé puisque, notamment, la hauteur de chacun des rectangles est donnée par l’énoncé (l’élève n’a pas à la mesurer, par exemple), le tableau qui présente les données fournissant en outre à l’élève le schéma de la marche à suivre. Il n’y a donc là guère plus qu’une petite arithmétique (et accessoirement une petite géométrie), où la statistique n’apparaît qu’en toile de fond. Mais on saisit mieux alors la rémanence d’un sujet apparemment cher, sinon au professeur, du moins à la transposition didactique de la statistique dans laquelle il continue de se situer, où la question du tracé d’un histogramme à partir de données numériques et de l’utilisation inverse d’un histogramme donné pour en tirer une information chiffrée apparaît comme un élément cardinal. Le deuxième exercice représente en apparence un cas de figure diamétralement opposé : au lieu de reconduire le passé, il anticipe un futur possible ! On y demande en effet à l’élève, à propos de deux entreprises A et B en chacune desquelles on distingue ouvriers et cadres, de calculer le salaire moyen des employés de chacune des entreprises. Cela fait, l’élève se voit demandé les deux moyennes et doit commenter la conclusion à laquelle il parvient. Nous sommes là face à une étude d’effet de structure, notion qui, nous l’avons dit [39], n’est pas au programme de la classe de seconde. À l’instar de beaucoup de manuels et sans doute de nombre de ses collègues, ce professeur a adhéré d’emblée à un sujet neuf, qui, manifestement, plait. Entre l’attachement à l’ancien (la construction et la « déconstruction » d’un histogramme) et l’engouement pour le nouveau (les effets de structure), pourtant, un trait commun domine : dans les deux cas, en

[39] Voir notre chapitre 6.

effet, un petit travail mathématique, mobilisant des outils rudimentaires, permet de produire une connaissance « étonnante », soit en elle-même (effet de structure), soit du fait qu'on puisse l'obtenir à partir des données dont on dispose (la moyenne d'une distribution tirée de son histogramme). Bien entendu, dans cet arrangement, la statistique a peu de part : elle offre simplement des occasions, que saisit le professeur pour faire vivre dans sa classe une petite activité mathématique sans doute conviviale (étant donné notamment le niveau de sophistication relativement limité des outils mis en jeu) mais dont la première vertu semble être de montrer, comme en passant, la tranquille efficacité des mathématiques. On notera que la même analyse s'applique *mutatis mutandis* au calcul par interpolation de la médiane ou des déciles. Dans tous ces cas, la statistique n'est plus la chose importante : elle apparaît comme un faire-valoir qui permet de minuscules mises en valeur des mathématiques connues. La contrainte ainsi satisfaite semble, dans le cas du professeur dont nous suivons indirectement l'enseignement, assez forte pour engendrer un arrangement didactique qui s'éloigne parfois nettement de ce que le programme prévoit. C'est ainsi que, sur les effets de structure, ce professeur obtient de l'élève témoin, qui n'a reçu qu'une note de 14 sur 20 à cause de ses étourderies [40], qu'il rédige le long commentaire suivant :

> … tous les salariés confondus sont mieux payés dans l'entreprise A que dans l'entreprise B. Cependant, on remarque que dans l'entreprise B, il y a plus de cadres que dans l'entreprise A. Si le rapport $\frac{\text{cadres}}{\text{ouvriers}}$ était égal dans les deux entreprises, le salaire moyen de l'entreprise B serait encore plus faible. Le nombre de cadres a donc contribué à augmenter ce salaire moyen.

Avec cet épisode, nous sommes tout près d'une mini-création curriculaire, fruit d'un jeu avec les contraintes, dont les contraintes inertielles liées au passé de l'enseignement et du professeur.

Les deux enseignements que nous avons scrutés jusqu'ici montrent des arrangements didactiques bien différents, fruits d'une prise en compte de jeux distincts de contraintes, qui sont l'objet chaque fois d'un travail singulier de la part du concepteur et réalisateur de l'enseignement. Notons, d'ores et déjà, un phénomène clé (qui touche en amont les manuels

[40] Pour calculer le salaire moyen dans chacune des entreprises A et B, il considère un rapport dont le dénominateur, censé être l'effectif total des employés (cadres et ouvriers), est en fait la somme des salaires moyens des ouvriers et des cadres. Alors que dans l'entreprise A, le salaire moyen des ouvriers est de 1000 € et celui de cadres de 2000 €, il trouve par son étrange procédé que le salaire moyen de l'ensemble des employés est de 120 €. Le professeur porte l'annotation suivante : « Les moyennes calculées ne sont pas cohérentes avec les tableaux. » On notera qu'il évoque l'incompatibilité avec « les tableaux », et non avec la situation du monde évoquée : plus que jamais, la classe de mathématiques apparaît comme un monde clos.

eux-mêmes) : la divergence silencieuse des choix didactiques, dont l'intersection semble réduite à un peu d'arithmétique associée à un peu de graphique. Qu'en est-il maintenant des deux corpus témoignant de l'étude de la statistique dans deux classes de seconde « lyonnaises » ? Les deux classes ont en commun de se référer au même manuel, celui de la collection Hyperbole. Le premier corpus que nous examinerons – il est composé de 21 pages imprimées ou manuscrites – témoigne d'un choix bien particulier : le professeur a distribué aux élèves cinq feuilles polycopiées contenant un montage de différents extraits du manuel, de façon à constituer une espèce de condensé de cours augmenté de quelques exercices corrigés ou à chercher. Cette pratique, qui n'est certainement pas dominante chez les professeurs de mathématiques [41], procède peut-être d'une double contrainte : celle, d'abord, liée au sentiment – que peut avoir le professeur – que la matière lui est peu familière et qu'il vaut donc mieux s'appuyer fortement sur le manuel ; celle, ensuite, liée au souci de coller honnêtement à un programme que l'on connaît peut-être mal ou dont on craint de diverger trop facilement si l'occasion s'y prête [42]. Toujours est-il qu'une première conséquence quasi évidente de ce choix est que le programme de statistique se trouve *grosso modo* couvert : on ne constate pas d'oublis essentiels [43], même si, comme d'autres, ce professeur a oublié d'oublier les effets de structure. Le parti adopté semble curieusement se payer d'un relâchement, sensible au moins dans les notes de l'élève témoin [44], qui rend difficile la reconstitution de la marche de l'étude, dans la mesure où l'on ne dispose souvent que de fragments de traces écrites interrompus ou flottants sur la page. Les exercices proposés sont pris dans le manuel et la référence (page et numéro) est chaque fois précisée. À suivre les notes de l'élève, le premier exercice [45] consiste simplement à calculer la moyenne d'un ensemble divisé en trois sous-ensembles (élèves de L, ES et S) dont on connaît les moyennes

[41] Dans la hiérarchie des tactiques de désengagement didactique du professeur évoquées plus haut (à propos du corpus réduit à 6 pages), ce choix est à situer au-dessus de l'assignation de l'étude dans le cadre du seul enseignement modulaire.

[42] Bien entendu, cela suppose que le manuel soit lui-même fidèle au programme, ce qui, nous le savons, n'est pas toujours le cas. Mais le manuel est, ordinairement, le partenaire du professeur bien davantage que ne le sont le programme et les textes officiels annexes.

[43] Notons toutefois que les élèves de cette seconde n'y auront, semble-t-il, pas entendu parler de moyenne élaguée, de même qu'ils n'auront pas eu à s'interroger sur le choix d'un indicateur « pertinent » dans une situation statistique donnée.

[44] Cette élève obtient la note de 15 sur 20 et au devoir à la maison, et au devoir en classe, ce qu'on peut regarder comme le signe d'un certain sérieux scolaire.

[45] Il s'agit de l'exercice 60, page 25.

et les effectifs. Une deuxième petite étude reprend l'activité 6 du manuel, qui, à propos de nombres aléatoires, fait rechercher la fréquence des « blocs maximums », c'est-à-dire des suites de trois chiffres dans lesquelles le chiffre médian est strictement supérieur aux deux chiffres qui le bornent. On passe ensuite à l'inévitable exercice sur les effets de structure [46], dont le traitement est suivi des traces d'un travail sur l'unique activité que le manuel consacre (en principe) à la fluctuation d'échantillonnage, l'essentiel portant en réalité sur la production de chiffres au hasard à l'aide de la touche *random* de la calculatrice. Là s'arrêtent les « exercices », c'est-à-dire la part principalement dévolue à l'élève dans le travail de la classe. À ce tableau, il faut toutefois ajouter deux éléments. Tout d'abord il semble qu'une séance de module ait été consacrée au thème de la simulation et plus précisément à la question de la simulation d'un sondage (qui, dans le programme, a le statut de TEL). Selon la technique employée pour le cours, le professeur a distribué aux élèves une page comportant, de façon concise, les considérations classiques sur cette question : on y trouve notamment l'expression de la fourchette de sondage figurant dans le programme de la classe à propos du TEL considéré. Bien qu'il ne soit pas facile de le reconstituer, il semble que le travail accompli ait porté sur trois sujets. Tout d'abord, l'étude est faite, au moyen d'une simulation, d'un échantillon de cent familles où la dernière naissance a été celle du premier garçon, selon un schéma directeur que le manuel emprunte à *L'empereur et la girafe* – le livre de Claudine Robert – et que le professeur a repris du manuel dans le montage photocopié qu'il a préparé pour ses élèves. Ensuite, apparemment, a été abordée la simulation du lancer de trois dés, pour répondre à une question qui paraît être celle-ci : obtient-on plus souvent pour somme des chiffres amenés par le lancer de trois dés, l'entier 9 ou l'entier 10 ? Enfin, un sondage où mille personnes sont interrogées sur leur intention de voter ou non pour un certain parti a donné lieu au calcul de la fourchette au niveau de confiance de 95 % : cette fourchette étant ici l'intervalle [0,43 ; 0,49], l'élève note, péremptoire : « Nous sommes sûr à 95 % de chance que ce parti va perdre. »

Là encore, donc, tout se passe dans une honnête conformité apparente à ce qui est demandé par le programme [47]. Qu'en est-il des devoirs proposés aux élèves ? Un devoir à la maison comporte deux exercices dont le second met en scène une polémique liée à un effet de

[46] Il s'agit de l'exercice 59, page 25.

[47] À ceci près, tout de même, que le professeur que nous suivons ici semble avoir écarté du travail accompli avec les élèves en matière de statistique toute représentation graphique – même lorsque la classe travaille sur la diminution de la fluctuation d'échantillonnage lorsque la taille des échantillons croît. On a là un exemple notable de « bricolage » des contraintes les plus évidentes.

structure : il y est question d'un recteur menacé de sanction par le ministère pour sexisme parce que, dans son académie, le pourcentage de réussite des garçons apparaît supérieur de plus de 20 points à celui des filles. L'énoncé se termine par cette question : « Qui a tort ? » – du ministère ou du recteur. L'élève va traiter de manière grossièrement erronée les données fournies. Garçons et filles ont, dans chacune des deux séries considérées (L et S), le *même* taux de réussite, 50 % en série L et 80 % en série S. L'élève n'hésite pas à écrire alors que le taux de réussite des filles et celui des garçons ne se distinguent pas, parce qu'ils sont l'un et l'autre égaux à la moyenne arithmétique de 50 % et de 80 % ! Le professeur tire un grand trait sur la copie et note ce cri du cœur : « Jamais ça. » L'examen de la copie ne permet guère de comprendre comment l'élève a pu obtenir 15 sur 20 à ce devoir. Le devoir en classe, quant à lui, comporte quatre exercices dont seuls les deux premiers relèvent du programme de statistique. Le premier est, en principe, trivial : il s'agit de trouver la moyenne de quatre nombres entiers dont l'écriture décimale comporte d'abord les mêmes 13 chiffres (dont les 4 derniers sont des 0), suivis d'un quatorzième chiffre (celui des unités) qui vaut respectivement 1, 7, 3, 1. Le calcul se fait de tête : puisque 1 + 7 + 3 + 1 = 12, la moyenne s'écrira avec les mêmes treize premiers chiffres et, pour chiffre des unités, le chiffre 3. Le deuxième exercice est un travail de simulation dont il est inutile de dire qu'il met en avant la stabilisation des fréquences et non la fluctuation d'échantillonnage : on s'y demande si un certain jeu – consistant à gagner un euro si, en trois lancers successifs d'un dé normal, le 1 ne sort pas, et à perdre un euro s'il sort – est ou non « intéressant » pour le joueur. L'élève doit simuler un certain nombre de parties [48] ; puis, sur la base des résultats obtenus, il doit « conclure ». L'élève que nous suivons « rate » à nouveau ces deux exercices. Pour le premier, elle trouve correctement le résultat mais le professeur lui reproche « une justification insuffisante » (ce qu'on peut d'ailleurs discuter) : elle recevra un point sur les trois prévus. Pour le second exercice, elle produit une ébauche de simulation qui aboutit à un résultat grossièrement erroné. Aussi les annotations qui jonchent sa rédaction marquent un désaveu croissant : « Comment faites-vous ? » demande d'abord le professeur à propos des traces de la prétendue simulation réalisée par l'élève. « Bizarre », commente-t-il ensuite à propos de l'affirmation de l'élève selon laquelle « il vaut mieux ne pas jouer car nous allons perdre 6 € ». Désabusé, il conclura en ces termes : « Je ne suis pas sûr que vous ayez pigé. » Ce que nous retiendrons

[48] Fixé à 40 dans la version initialement rédigée de la main du professeur, ce nombre a été, semble-t-il, renégocié en cours d'épreuve et abaissé à 20. On a là un exemple d'une contrainte typiquement liée à l'enseignement d'un thème nouveau : le manque de repères pour calibrer adéquatement ce qui est demandé aux élèves.

surtout, c'est que l'échec dans le travail demandé n'aura pas d'incidence sur la réussite de l'élève : avec deux 15 sur 20, la porte de la première S lui est grande ouverte. On voit ainsi très concrètement comment la statistique, pour cette élève du moins, et sans doute, plus largement, dans cette classe, peut être neutralisée, dans le cadre même de la classe (et non à l'étape du conseil de classe ou de sa préparation) en tant que déterminant éventuel de l'orientation scolaire.

Le dernier corpus que nous présenterons est celui d'une autre classe de seconde du même lycée lyonnais. Le professeur concerné se rapproche, par certains de ses choix, du professeur précédent. C'est ainsi que les 22 pages du corpus des documents restant entre les mains de l'élève s'ouvrent par une page sur laquelle celui-ci a collé successivement deux fragments photocopiés, tous deux empruntés au manuel de seconde de la collection *Indice* chez Bordas. Le premier est intitulé *Le vocabulaire des statistiques* (sic) : il constitue le point de départ absolu du travail de la classe sur la statistique [49]. Le second extrait appelle une petite activité qui, dans le manuel où elle figure, apparaît comme faisant la transition entre la classe de troisième et la classe de seconde [50]. Un diagramme en bâtons est donné avec l'indication en abscisse des valeurs d'un caractère (des notes sur 20), en ordonnée des effectifs correspondants. On demande à l'élève de calculer successivement, pour la série ainsi représentée, l'effectif total, la moyenne, la médiane, la note la plus fréquente, enfin le pourcentage des notes inférieures à la moyenne de la classe. Ce petit travail est suivi d'un autre, qui prétend illustrer le jeu entre moyenne, médiane et mode. Ici, le professeur a fait un emprunt, non à un manuel du commerce, mais à un « cours » en ligne [51], intitulé

[49] Ce *Vocabulaire* définit ainsi la médiane : « Après avoir ordonné les valeurs de la variable étudiée, la *médiane* est la valeur obtenue (en parcourant ces valeurs dans l'ordre croissant) lorsque la fréquence cumulée atteint ou franchit 0,5. » Cette définition, on le sait, n'est pas conforme à ce que nous avons vu appelé, plus haut, « la définition adoptée dans le programme de seconde ».

[50] Le professeur a modifié l'ordre proposé dans le manuel auquel il emprunte ces matériaux. Le chapitre 7 du manuel, intitulé *Statistiques* (sic), s'ouvre en effet par une rubrique intitulée « Découvrir » constituée de deux pages d'activités. C'est la première de ces activités que choisit de reproduire le professeur : elle relève dans le manuel d'une sous-rubrique intitulée « De la 3^{e} à la 2^{de} ». Le *Vocabulaire* que le professeur a placé au point de départ de son enseignement ne vient qu'à la page 3, sous la rubrique « le cours », sous-rubrique « les notions » (l'autre sous-rubrique s'intitulant « les méthodes »). Le choix du professeur est à l'évidence anti-fonctionnel, alors que la structure du manuel qu'il exploite s'efforce de sauver les apparences.

[51] Ce « cours » est en réalité fait d'une multitude de petites études sur des sujets divers du curriculum mathématique du secondaire belge.

Mathématique du secondaire, dû à Xavier Hubaut, professeur émérite de l'Université libre de Bruxelles (ULB), en adaptant l'énoncé suivant [52] :

Comment présenter mon 8⁄20 ?

- L'interrogation de statistique n'a pas été terrible : 8⁄20.

Comment annoncer cela à mes parents ?

Dans l'ensemble il faut dire que ce n'était pas fameux. Nous sommes 10 en classe et les résultats sont catastrophiques !

Pensez donc. Le petit génie a bien sûr fait 19, mais à part cela il y avait un 10, quatre 9 et trois 2.

D'accord, le mode est 9⁄20 et la médiane est également 9⁄20. Mais si je calcule la moyenne, je trouve 7,9⁄20.

Je dirai donc à Papa que j'ai au-dessus de la moyenne.

- Encore un 8. Mais cette fois les notes sont : 2, 3, 4, 5, 7, 8 (moi), 9, 9, 18 et 19 (le génie).

J'ai calculé la moyenne, mais cette fois elle est de 8,4 ; je suis en dessous de la moyenne ; et le mode est 9. Heureusement, il n'y en a que 4 qui ont mieux réussi que moi et les 5 autres sont après.

Je dirai donc à Papa que je suis au-dessus de la médiane.

- Décidément, je n'ai pas de chance. Je suis abonné au 8⁄20. C'est sûrement la faute du prof !

Cette fois les questions étaient tellement dures qu'il y en a 3 qui ont eu 7⁄20 ! Les autres ont obtenu 19 (toujours le même), 18, 12, 11, 10 et 2 (c'est aussi toujours le même).

J'ai calculé la moyenne ; cela fait 10,1. Pas de chance, je suis en dessous. Et cette fois il y en a 5 qui ont plus que moi ! Ça ne va plus l'histoire de la médiane ! Heureusement grâce aux trois copains, le mode est 7.

Je dirai cette fois à Papa que je suis au-dessus du mode.

(J'espère qu'il ne comprend rien aux différences entre moyenne, médiane et mode !)

L'adaptation réalisée par le professeur a consisté d'abord à remplacer « Je dirai donc à papa » par « Je dirai donc chez moi » (en changeant « Je dirai cette fois à papa » en « Je dirai cette fois à la maison »), ainsi que, corrélativement, « J'espère qu'il ne comprend rien » par « J'espère qu'ils ne comprennent rien ». Si le professeur a, en revanche, négligé de corriger le belgicisme de « le petit génie a bien sûr *fait* 19 », il a surtout retravaillé le texte pour le transformer en un « texte à trous », en sorte que la première section du texte se présente ainsi dans la classe :

Comment présenter mon 8⁄20 ?

Texte à compléter :

- L'interrogation de statistique n'a pas été terrible : 8⁄20.

[52] Voir http://www.bib.ulb.ac.be/coursmath/moyen.htm.

Comment annoncer cela à mes parents ?

Dans l'ensemble il faut dire que ce n'était pas fameux. Nous sommes 10 en classe et les résultats sont catastrophiques !

Pensez donc. Le petit génie a bien sûr fait 19, mais à part cela il y avait un 10, quatre 9 et trois 2.

D'accord, le mode est …… et la médiane est également …… Mais si je calcule la moyenne, je trouve ……

Je dirai donc chez moi que j'ai au-dessus ……

Contrairement au professeur à l'origine du corpus précédemment étudié, ici le professeur peut penser avoir « traité » la question du « choix du résumé numérique » dont parle le programme de seconde. À nouveau, on saisit là très concrètement le bricolage effectué par le professeur à propos des contraintes sous lesquelles il doit opérer : le document trouvé sur le site de l'ULB lui a sans doute paru satisfaire habilement la contrainte didactique imposée par le programme à cet égard – contrainte que ce document ne respecte pourtant que de façon bien artificielle, en la réduisant à une affaire de petite arithmétique.

Les traces écrites de l'élève embrayent alors sur une « section II » intitulée *Propriétés de la moyenne*. Après le rappel d'une définition de la moyenne (formulée en termes de valeurs x_i et d'effectifs n_i), les élèves ont à affronter une activité intitulée *Pluviométrie*, empruntée, elle, à la brochure de la Régionale de l'APMEP de Grenoble que nous avons antérieurement commentée [53], et qui fait notamment travailler les élèves sur les notions de moyenne, de moyenne élaguée et de médiane. Il semble se confirmer ici que ce professeur constitue son enseignement en recherchant du matériel auprès de diverses sources : un manuel qui n'est pas celui de la classe, un site Internet, une brochure de l'APMEP. Le contraste est net avec le corpus précédent qui reproduisait *ne varietur* des passages entiers du manuel de la classe [54]. Sur le fond, l'activité réalisée n'appelle pas de nouveaux commentaires : rappelons simplement que la question génératrice n'apparaît qu'en fin de parcours, ce que nous avions déjà eu l'occasion de souligner. L'apport du professeur n'est cependant pas négligeable : en fournissant aux élèves, ainsi qu'il le fait, un tableau préparé par ses soins, il neutralise tout un travail fastidieux et chronophage – qu'un simple clic de souris suffirait, il est vrai, à réaliser si les données figuraient sur un tableur – consistant à ranger par ordre croissant les séries de

[53] Il s'agit de la brochure intitulée *Statistique de seconde « clés en main » pour la rentrée 2000*. Voir notre chapitre 3.

[54] Le recours à des documents qui ne soient pas extraits du manuel de la classe permet sans doute plus facilement de les *adapter*, comme on voit le professeur le faire ici, puisque, en principe, la chose reste invisible des élèves et ne prête donc pas à interprétation de leur part.

données considérées. La suite des traces écrites examinées fait alors apparaître tout un développement autour des propriétés de la moyenne, énoncées ici sous la forme de trois théorèmes successifs. Le schéma général adopté consiste, semble-t-il, à examiner le phénomène mathématique objet du théorème sur un exemple numérique avant d'énoncer le théorème et de le démontrer à l'aide d'un formalisme adéquat. Ainsi en va-t-il par exemple avec le fait que, si on ajoute un nombre b aux valeurs d'un caractère, le caractère ainsi obtenu voit sa moyenne s'accroître de b. L'ordre est un peu modifié dans le cas du théorème relatif à la multiplication des valeurs du caractère par a : cette fois, la démonstration générale *précède* l'énoncé du théorème [55]. Le troisième théorème énonce le résultat classique sur la moyenne d'un ensemble dont on connaît la moyenne et les effectifs de deux sous-ensembles qui en réalisent une partition [56]. Ce théorème, qui ne fait pas l'objet d'une démonstration en bonne et due forme, est amené par un exercice curieux, inversé en quelque sorte, dans lequel connaissant, pour une certaine classe, la moyenne des élèves (13,36), la moyenne des filles (12,8) et la moyenne des garçons (13,88), on cherche le nombre des élèves. Par rapport à l'ensemble des documents que nous avons examinés, il s'agit-là d'une singularité rare, et même d'un cas unique. Là encore, le bricolage des contraintes pousse en avant, contre les problématiques essentielles de la statistique élémentaire, un apparent enrichissement mathématique du texte du savoir professé, avec, à nouveau, production d'une connaissance un peu inattendue pour le profane – ici, le nombre d'élèves de la classe [57].

La section suivante, numérotée III, est intitulée *Fréquences* : y sont consignées des connaissances de base déjà étudiées au collège. Là se termine ce qui, rétrospectivement, apparaît comme une première leçon, qui occupe moins de huit pages du corpus des traces écrites relatives à la statistique. Une seconde leçon commence alors par une première section intitulée *Pile ou face*. Il semble que les traces écrites rendent compte d'une activité de lancers

[55] Elle est précédée elle-même d'un exemple numérique : si, à un devoir commun la moyenne est de 16 sur 40, sur 20 la moyenne sera de 8. Mais, étant donné la culture scolaire en matière d'arithmétique des notes, cet exemple a été jugé sans doute trop évident pour être éclairant.

[56] Son énoncé est le suivant : « Une série d'effectif total N et de moyenne m est partagée en deux groupes disjoints, un groupe d'effectif p et de moyenne m_1, un groupe d'effectif q et de moyenne m_2 (avec $N = p + q$). Alors : $m = \frac{p \times m_1 + q \times m_2}{N}$. »

[57] On le détermine en considérant – la chose est laissée implicite dans les traces écrites de l'élève – que cette classe compte, disons, moins de 40 élèves. Si g et f sont le nombre de garçons et le nombre de filles de la classe, on a ici : $13,88 \times g + 12,8 \times f = 13,36 \times (f + g)$. On tire de là que $\frac{g}{f} = \frac{14}{13}$ et « donc » que $g = 14$ et $f = 13$, etc.

de pièces où 16 binômes d'élèves fournissent d'abord, chacun, le nombre de piles qu'ils ont observés lors de 100 lancers d'une pièce. Les fréquences correspondantes sont calculées, puis on réunit les 16 séries de 100 lancers en 8 séries de 200 lancers, ensuite en 4 séries de 400 lancers, enfin en une seule série de 1600 lancers, avec, chaque fois, calcul des fréquences. Un commentaire note les variations de fréquences – « ce qu'on appelle les fluctuations d'échantillonnage » –, qui sautent aux yeux lorsqu'on regarde, notamment, les 16 fréquences correspondant à des séries de 100 lancers. Lorsqu'on examine ensuite les séries de fréquences (de taille 16, 8, 4 et 1), on voit alors les fluctuations s'atténuer et la fréquence se rapprocher de ce qui est appelé ici la *valeur théorique*, à savoir [58] « 0,5 ou 50 % ou 1 chance sur 2 ». La deuxième section de cette seconde leçon est intitulée maladroitement par l'élève *Lancé de dés*. On y découvre d'abord certaines possibilités pertinentes de la calculatrice. Puis les élèves reçoivent une feuille de travail intitulée *Expériences de lancers de dés*. À nouveau, il s'agit d'une activité empruntée et adaptée : elle provient toujours de la brochure *Statistique de seconde « clés en main » pour la rentrée 2000*. L'architecture générale de l'activité originale a été conservée : les élèves sont groupés en binômes qui, chacun, simulent 100 lancers de dés. Mais certaines consignes sont retouchées : d'une part, alors que la brochure prévoit de passer à des séries de 300 résultats de lancers de dés – obtenus à partir des résultats de trois binômes d'élèves –, le professeur regroupe les résultats de deux binômes seulement, ce qui fournit des séries de 200 lancers [59] ; d'autre part, il supprime totalement la considération de la série totale des 1600 lancers réalisés par la classe : sans doute cet allègement tient-il compte de la lourdeur relative du travail supposé, dès lors surtout que ce travail doit être accompli en classe. Dans les notes de l'élève, on voit, sur un même graphique, trois courbes de fréquences : les fréquences relatives à 200 lancers se situent entre les fréquences correspondant aux deux séries de 50 lancers, sauf pour l'une des valeurs, où les fréquences calculées sur les deux séries de 50 lancers sont l'une et l'autre élevées ; en tout état de cause, la diminution de la fluctuation est visible à l'œil nu. Ultérieurement, le professeur distribuera aux élèves une fiche faisant apparaître, sur fond de tableaux consignant les résultats obtenus à des séries de 20 lancers, puis de 200 lancers de dés, les courbes de fréquences correspondantes : l'atténuation des fluctuations est, là encore, très sensible. La troisième section de cette deuxième leçon est intitulée *Un jeu de pile ou face*. Le propos, tel que le

[58] Valeur théorique *de quoi ?* On note l'embarras que l'absence obsédante de la notion de probabilité paraît provoquer.

[59] Idéalement, la proposition de la brochure utilisée suppose que l'effectif de la classe soit divisible par 6. Or, on l'a suggéré, il semble que la classe concernée ait 32 élèves, qu'on peut réunir en 8 groupes de 4.

consigne l'élève, est d'étudier « le nombre moyen de coups consécutifs égaux », sous-entendu – on peut le supposer – sur une longue série de lancers de pièce. Le tableau dressé par l'élève fait apparaître qu'il a été obtenu 215 successions de sorties de même nature (pile ou face), dont 107 de longueur 1, 54 de longueur 2, 27 de longueur 3, etc., ce qui représente en tout, en l'espèce, 425 lancers ; la longueur moyenne des suites observées est donc égale à $\frac{425}{215} \approx 1{,}98$. On notera, une fois de plus, que le travail proposé n'est en aucune façon motivé. Il semble que sa seule raison d'être, ici, soit liée à son statut de TEL de statistique [60]. Il en va de même avec la quatrième section, à laquelle les traces écrites de l'élève donne le titre de *Lancé de dés à jouer* [61]. Les traces écrites de l'élève demandent à être déchiffrées, ce que l'on parvient à faire de manière raisonnable. Mais, cela fait, elles traduisent alors une étude apparemment très incomplète : l'élève a fait figurer un tableau représentant, pour ce qui devait être une série de 40 lancers de deux dés mais qui, par une anomalie d'origine inconnue, s'est muée en une série de 47 lancers, le nombre de sorties de toutes les sommes possibles, de 2 à 12, ainsi que les fréquences correspondantes. Figure à la suite de ces résultats un tableau symétrique, intitulé « Réponse théorique », qui est une simple table d'addition des entiers de 1 à 6 (si un premier dé donne 2 et si le deuxième donne 4, on obtient 6, qui peut aussi s'obtenir comme 1 et 5, 3 et 3, 4 et 2, par 5 et 1, etc.). On ne sait rien, faute de traces écrites qui en témoignent clairement, de ce qui a pu être fait par la classe au-delà de ce simple constat.

Le corpus examiné jusqu'ici est complété par trois tables de chiffres au hasard : la première simule le jet d'un dé et porte donc sur les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6 ; la seconde, dont l'origine n'est pas précisée, concerne les chiffres de 0 à 9 ; la troisième ne porte que sur les chiffres 0 et 1. Le corpus comporte enfin deux devoirs, l'un à la maison, l'autre en classe. Le devoir à la maison a pour sujet la course du lièvre et de la tortue, qui, nous le savons [62], constitue l'une des activités proposées par le GTD de mathématiques. Mais la version adoptée

[60] Le programme de seconde est, à ce propos, libellé ainsi : « Simulations de jeux de pile ou face : distribution de fréquences du nombre maximum de coups consécutifs égaux dans une simulation de 100 ou 200 lancers de pièce équilibrée ; distribution de fréquences du gain sur un jeu d'au plus dix parties où on joue en doublant la mise (ou en la triplant) tant qu'on n'a pas gagné. On pourra aussi faire directement l'expérience avec des pièces pour bien faire sentir la notion de simulation. »

[61] Le titre réel donné en classe était en fait *Lancer de deux dés à jouer*, comme l'atteste d'autres corpus issus de la même classe. Le libellé officiel du TEL correspondant est le suivant : « Simulations du lancer de deux dés identiques et distribution de la somme des faces. On pourra aussi faire directement l'expérience avec des dés pour bien faire sentir la notion de simulation... »

[62] Voir notre chapitre 2.

par le professeur est à nouveau empruntée à la brochure de la régionale de Grenoble de l'APMEP, qui, au vrai, propose explicitement ce sujet à titre de devoir à la maison. À nouveau, le professeur a retouché la consigne, quoique d'une manière inessentielle, pour tenir compte du travail fait jusque-là avec sa classe. Pour ce qui est du travail propre de l'élève, nous ne pouvons en dire que peu de choses car son corpus est, sur ce point, lacunaire : au dos de la feuille fournissant l'énoncé du devoir se trouve, sans aucun commentaire, une succession de 100 séries de chiffres simulant vraisemblablement 100 parties du jeu du lièvre et de la tortue, suivie du dénombrement (au demeurant erroné) du nombre de parties gagnées respectivement par le lièvre et par la tortue. Il contient encore, toutefois, l'énoncé ainsi que le corrigé d'un devoir surveillé composé de trois exercices, dont le deuxième relève de la statistique, et plus exactement de la simulation. On y étudie la somme amenée par le lancer simultané de deux pièces, lorsqu'on attribue au côté pile le nombre 1 et au côté face le nombre 0. La teneur du corrigé est frappante : alors que, pour l'exercice I, relatif à la résolution de systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues, comme pour l'exercice III, relatif à divers types de tâches de géométrie analytique élémentaire (calcul de distances, détermination de l'équation réduite d'une droite, etc.), le texte du corrigé fait usage du langage naturel, notamment pour formuler remarques ou commentaires, le corrigé de l'exercice II est formé uniquement de tableaux numériques, et cela alors même que la première question de l'exercice a le libellé suivant :

> On lance deux pièces et on s'intéresse à la somme des points correspondants aux deux faces.
>
> a) On peut donc obtenir 0, 1 ou 2 : expliquer comment en une phrase !

Le contraste est frappant avec, par exemple, l'effusion verbale que suscite, dans le corrigé, le second des deux systèmes que les élèves avaient à résoudre :

> b) Le système $\begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ 2{,}4x - 4y = 1{,}6 \end{cases}$ a pour déterminant D' = 3 × (–4) – 2,4 × (–5) = –12 + 12 = 0.
>
> Ce système a donc zéro solution ou une infinité de solutions !
>
> Mais, en multipliant, par exemple, la première ligne par 2,4 et la deuxième ligne par 3 on obtient la *même équation* : $7{,}2x - 12y = 4{,}8$. Ceci prouve que le système a une infinité de solutions.
>
> (On peut aussi trouver $12x - 20y = 8$ ou bien sûr $3x - 5y = 2$.)
>
> Des solutions possibles sont (1 ; 0,2), (4 ; 2), (0 ; –0,4), (2,3 ; 0), (–1 ; –1), (2 ; 0,8), (7,3 ; 1), (3 ; 1,4)…

Il y a ainsi deux poids et deux mesures, voire plusieurs poids et plusieurs mesures ! Cela noté, l'énoncé de l'exercice II fournit une table donnant une suite supposée aléatoire de 0 et de 1 et demande alors de simuler, à l'aide de cette table, 40 lancers simultanés de deux pièces, avant de calculer les fréquences d'apparition des sommes 0, 1 et 2. Aucun commentaire n'est demandé : l'absence de modèle probabiliste par rapport auquel situer les résultats obtenus ou même la non-disponibilité des fréquences observées pour un nombre très supérieur de lancers laissent la classe au milieu du gué.

3. De l'individu au collectif

Ainsi qu'on l'a vu, les enquêteurs du département *Informatique et Statistique* de la Faculté des Sciences Économiques et de Gestion de l'Université Lumière-Lyon 2 concluaient leur compte rendu en affirmant – sans, bien sûr, dire les choses ainsi – la nécessité de reprendre très largement la transposition didactique qui, à partir de la statistique « savante » et par des processus complexes et souvent opaques, détermine la niche praxéologique au sein de laquelle les professeurs s'efforcent d'enseigner « la statistique ». Ce qui frappe dans les propositions faites, à cet égard, est le sentiment que la reprise du travail transpositif doit se faire dans un cadre *élargi*, en incluant des collectifs plus vastes, plus divers, dont, au reste, les auteurs de ces propositions se pensent eux-mêmes partie prenante. Pour le dire autrement, le travail sur les contraintes que nous avons vu des professeurs assumer à proportion de la liberté mais aussi de la puissance d'action qui sont aujourd'hui les leurs, ce travail, donc, devrait, semble-t-il, à la fois porter sur davantage de contraintes et associer des collectifs plus vastes coordonnant des forces sociales plurielles. Ces conditions générales qui émergent de manière un peu voilée dans les analyses et les propositions de l'enquête dont nous avons étudié le compte rendu se retrouvent chez d'autres analystes et proposants intervenant dans la noosphère de l'enseignement de la statistique. À titre d'exemple nous nous référerons ici à une proposition de module de formation continue en statistique conçue pour les professeurs de mathématiques du secondaire, proposition dont l'un des cosignataires est, au reste, intervenu comme conseiller auprès de l'équipe qui a réalisé l'enquête dont nous nous sommes fait l'écho dans la première section de ce chapitre [63]. La problématique du module le fait apparaître proche de travaux qui, écrivent les auteurs, « optent pour le fait de multiplier les occasions de stimuler la réflexion des enseignants à propos des heuristiques statistiques, des caractéristiques des différents outils statistiques, et, par là même, à propos de l'objet, de l'utilité et de l'utilisation de la statistique dans différents domaines d'application ». D'une façon plus concrète, la problématique de formation adoptée est, soulignent-ils, axée sur un questionnement qui peut être décliné ainsi :

- Qu'est-ce que la statistique ? Quel est son objet ?

[63] Il s'agit de Jean-Claude Régnier, enseignant à l'Université Lumière-Lyon 2. Voir Rouan & Régnier (2004).

- Sous quelle forme la pensée statistique est-elle apparue ?
- Quelle est la différence entre « statistiques » et « statistique » ?
- Quels types de problèmes la statistique essaie-t-elle de résoudre ?
- Quelles sont les différentes branches de la statistique ?
- Quelles sont les différentes heuristiques ?
- Quelles sont les caractéristiques des différents outils statistiques ?
- Quelles sont les différentes applications que la statistique peut avoir ?

Le type d'approche au sein duquel on peut réunir les propositions issues de l'enquête auprès des professeurs de mathématiques de l'académie du Rhône aussi bien que la proposition de module de formation d'Omar Rouan et Jean-Claude Régnier repose sur deux postulats relatifs aux moyens de modifier le système des conditions et contraintes sous lesquelles l'enseignement de la statistique pourrait fleurir au secondaire. Le premier postulat est que les changements recherchés passent pas la *formation des professeurs* (et accessoirement par l'amélioration des programmes en tant qu'outil au service des professeurs) ; le second postulat énonce que le travail sur la statistique que réalisent les professeurs doit – notamment dans le cadre des actions de formation envisagées – porter sur un ensemble de questions *très large* par rapport au point de vue qu'ils semblent adopter spontanément devant le projet d'enseigner la statistique au collège et au lycée. Que le premier postulat soit satisfait par les projets évoqués nous paraît évident. Le second postulat est bien illustré par la liste des questions que Rouan et Régnier mettent au cœur du module de formation qu'ils envisagent. D'une manière plus implicite, mais illustrée notamment par la place que ses auteurs souhaitent pour les applications de la statistique dans la formation des professeurs, il nous semble également intégré dans le projet de l'équipe de l'Université Lumière-Lyon 2. La conjonction de ces deux postulats, toutefois, engendre un problème d'une difficulté extrême. Nous avons vu des professeurs à l'œuvre ; nous savons qu'ils ne s'épargnent pas le travail sur les contraintes sous lesquelles ils exercent leur mission. Mais nous savons aussi que ce travail sur les contraintes est extrêmement sélectif quant aux contraintes réellement prises en compte et dûment travaillées, du moins dans le cadre traditionnel imposé, où le professeur est tenu à un fonctionnement solitaire plutôt que solidaire. Dans ce cadre-là, a-t-on pu dire [64], le professeur ne porte guère sa réflexion au-delà du niveau des *thèmes* d'études. Pour le professionnel de l'enseignement des mathématiques, une interrogation qui s'élèverait jusqu'aux *secteurs* d'études (« Qu'est-ce que la simulation ? Quel est son objet ? »), et plus

[64] Voir par exemple Chevallard (2002a).

encore jusqu'aux *domaines* d'études (« Qu'est ce que la statistique ? Quel est son objet ? ») paraît peu ou prou incompatible avec l'écologie des conditions et des contraintes qui prévaut encore sur l'exercice réel de la profession. De telles interrogations, en effet, ne font pas partie, aujourd'hui, du métier qu'il exerce ; en particulier, elles ne sont associées, dans le curriculum mathématique, à aucun thème d'études sur lequel le professeur aurait, en tant que tel, à engager sa responsabilité vis-à-vis de sa hiérarchie, de ses élèves, des parents, de la société. Le commerce qu'il peut avoir avec de semblables questions reste donc oblique, marginal, périphérique. Le secret espoir des proposants est évidemment que, sinon le professeur enseignant, du moins le professeur *en formation* puisse participer d'une écologie des conditions et des contraintes moins tyrannique, qui lui permette de s'assujettir au moins momentanément à des points de vue qui lui apparaissent de prime abord dénués de pertinence à l'endroit de l'enseignement qu'il devra donner.

Cette problématique de l'action visant à provoquer une évolution jugée bénéfique dans l'enseignement de la statistique nous paraît insuffisante pour plusieurs raisons. L'interpellation individualiste des professeurs dans le cadre d'actions de formation ne tend que trop à reconduire, dans un contexte institutionnel certes différent, les conditions qui, dans l'exercice quotidien de leur métier, limitent leur champ de conscience, d'intérêt, de réflexion et d'action. Nous poserons, selon une hypothèse formulée par Yves Chevallard [65], que, si l'on doit ne considérer qu'une seule variable de commande pour modifier l'enseignement des mathématiques, ce n'est pas *d'abord* la formation des professeurs qu'il faut retenir, mais cette variable aujourd'hui encore mal dégagée en tant que réalité et force sociales qu'est la *profession de professeur*, et, plus précisément, en ce qui nous concerne, la profession de professeur de mathématiques au secondaire [66]. C'est la variable « profession », en particulier,

---

[65] Il s'agit là du socle principiel sur lequel repose le séminaire qu'il assume depuis plusieurs années à l'IUFM de l'académie d'Aix-Marseille, à l'intention des élèves professeurs de mathématiques de deuxième année. On se reportera, à cet égard, à la thèse en cours de Gisèle Cirade.

[66] Si on le compare avec les *professions* d'avocat, de médecin ou d'ingénieur, on peut regarder l'état historique actuel du métier de professeur de l'enseignement scolaire comme caractéristique des *semi-professions* – expression popularisée par le sociologue Amitai Etzioni à propos des enseignants, des infirmières et des travailleurs sociaux (*The Semi-professions and their Organization: Teachers, Nurses and Social Workers*, Free Press, New York, 1969). Une semi-profession est marquée notamment par le fait que la formation au métier ne repose pas sur un corpus de connaissances théoriques fermes, que la période d'apprentissage reste relativement courte, que l'activité des gens du métier se réalise en général au sein d'organisations dotées de règles prescrites par une administration et une hiérarchie. Malgré cela, le métier d'un semi-professionnel reste en général

et la notion corrélative de « problème professionnel », qu'il faut contribuer à façonner et à faire émerger, et cela notamment dans le cadre des stages de formation continue, où il convient d'interpeller non le professeur individuel, mais la profession elle-même à travers celles et ceux qui, pour autant, ne la reconnaissent pas toujours pleinement et ne se regardent pas eux-mêmes comme en étant les membres solidaires. Pour illustrer plus concrètement le changement de point de vue qui correspond à un tel changement de problématique, nous nous appuierons sur les réponses faites par des professeurs de mathématiques de l'académie d'Aix-Marseille lors de plusieurs enquêtes que nous avons conduites à propos de l'enseignement de la statistique. Sans prétendre faire de ces éléments une présentation complète, nous essaierons d'entendre, dans la réception des questions par les enquêtés (telle qu'elle s'exprime dans leurs réponses ou leurs non-réponses), la problématique de l'interpellation de la profession – que nous saisirons à travers les réponses individuelles, vécues par eux, peut-être, comme singulières, de quelques-uns de ses membres. Notre attention se portera sur trois aspects fondamentaux. Tout d'abord, nous essaierons de voir en quoi la polyphonie des réponses individuelles peut être regardée comme un germe de réponse de *la profession*, réponse bien entendue plurielle, parfois peu cohérente, voire contradictoire. Ensuite, nous examinerons en quoi cette montée vers le collectif dessine les voies par lesquelles la profession pourrait s'affranchir de l'*idionomie* qui est aujourd'hui consubstantielle au régime de semi-professionnalité où elle s'attarde, qui apparaît si souvent comme de l'*anomie* à qui se risque à scruter les pratiques des professeurs à la manière dont nous l'avons fait dans la section précédente, pour converger historiquement, non sans fluctuations, vers une authentique *synnomie* professionnelle, c'est-à-dire vers une loi élaborée et mise en œuvre ensemble au sein de la profession [67]. Enfin, nous examinerons ce que ce collectif porte en lui, en puissance, de travail sur les contraintes de l'enseignement des mathématiques, et de quelles conditions d'enseignement ce travail pourrait être la promesse.

Nous prendrons d'abord trois questions, que nous groupons ici volontairement :

1. Pour préparer vos cours de statistique, quels types de documents avez-vous utilisés (manuels, etc.) ?

---

artisanal, solitaire : dans son activité quotidienne, il se pense comme « seul maître à bord », à l'abri des regards extérieurs.

[67] Les mots « idionomie », « anomie », « synnomie » sont formés à partir du grec *nomos*, qui désigne la loi créée par les hommes (par opposition aux lois de la nature). La notion d'*anomie* (l'absence de lois, de règles) a été popularisée par Émile Durkheim. L'idionomie est, ici, la loi faite par un seul pour lui-même, sans considération de la loi des autres ; par opposition, la synnomie désigne la loi faite et appliquée ensemble. Voir par exemple Chevallard (2002b).

2. Quels manuels conseilleriez-vous à un enseignant débutant pour l'aider à enseigner la statistique ?

3. Plus généralement, quels autres ouvrages conseilleriez-vous à un enseignant débutant pour préparer son enseignement de statistique ?

Dans les réponses recueillies, un premier élément se réfère évidemment aux *manuels* : sur 25 enseignants à qui a été soumise la question 1 ci-dessus, 22 les ont mentionnés. Le fait de « se passer des manuels » est donc, sur notre échantillon, ultra-minoritaire. Nous dirons alors que « les manuels » – sinon tel manuel particulier – constituent ce qui est à la fois une condition de l'exercice de la profession et une de ses contraintes. Bien entendu, il resterait à s'interroger sur le travail que la profession développe, ou *pourrait* développer, autour de cette contrainte. Tenons-nous-en ici au petit collectif de professeurs sur lequel nous appuyons nos analyses : on peut y voir apparaître un certain travail consistant très simplement, en l'espèce, à valoriser le recours à tel ou tel manuel, ou au contraire à décrier tel ou tel autre. Dans les éléments de réponse recueillis, certains professeurs explicitent ainsi, à côté de leur pratique, leur appréciation : l'un d'eux par exemple indique avoir utilisé et le manuel de la collection *Itinéraires* (Belin), et le manuel de la collection *Fractale* (Bordas) ; mais il ne retient que *l'un* de ces deux manuels au moment de le conseiller à un enseignant débutant hypothétique. C'est à titre de conseil que, plus largement, quelques manuels déterminés sont cités. Un professeur en mentionne ainsi quatre ; en tout, ce sont huit manuels qui, finalement, sont conseillés. Mais l'un d'eux est présenté – par un professeur seulement, il est vrai – comme contenant des erreurs dans les activités et les travaux dirigés : le conseil est ainsi assorti d'une mise en garde. On peut penser, au demeurant, qu'il y a là une indication plus spécifique au domaine de la statistique. Étant donné les contenus des manuels, les « erreurs » évoquées ne peuvent être que vénielles. Si l'on peut penser que la nouveauté relative des contenus ne permet pas aux auteurs d'en assurer impeccablement l'exactitude, on doit conclure en même temps que les imperfections ainsi oubliées apparaissent – à travers du moins la mise en garde proférée par le professeur enquêté – de nature à perturber l'utilisateur potentiel, ce qui vraisemblablement ne serait pas le cas de façon aussi sensible en algèbre ou en analyse, par exemple.

Dans les réponses recueillies, cependant, un silence frappe : aucune mention n'est faite du programme *stricto sensu*, alors même que depuis plusieurs décennies l'habitude a été prise d'y intégrer d'assez nombreux commentaires relatifs à différentes contraintes de l'activité professorale. On a là une contrainte – sous forme d'un texte officiel – qui peut, certes, prêter à polémiques entre les instances compétentes de la profession – APMEP ou syndicats de professeurs – et le ministère au moment de son élaboration [68], mais auquel on ne peut plus toucher une fois sa publication intervenue, même s'il est loisible à la profession de murmurer indéfiniment contre lui. Ce « travail » de critique rampante ne parvient guère à tirer d'une contrainte légale des conditions renouvelées d'exercice du métier. De fait, dans l'enquête à laquelle nous nous référons ici, le programme est purement et simplement ignoré ! Sans doute doit-on en principe le respecter, mais il n'est en rien un point d'appui, une source dont l'exploitation critique nourrirait le travail du professeur, tant au plan des organisations de savoir qu'au plan des organisations didactiques [69]. Cet effet d'hystérésis culturelle s'atténue à proportion que l'on s'éloigne du programme pour aller vers des documents moins contraignants, regardés davantage comme des conditions éventuellement exploitables de l'activité du professeur. En tout premier lieu, sans doute, il faut citer ici les documents d'accompagnement des programmes (dont on sait que, s'agissant de la statistique en seconde, ils sont relativement substantiels) : 6 des 25 professeurs y font explicitement référence (de manière précise dans cinq cas, en évoquant de façon un peu vague des « documents fournis par l'Éducation nationale » dans un sixième cas). Notons, que dans l'un des cinq cas, le professeur indique qu'il travaille avec les documents d'accompagnement de la classe de seconde mais aussi des classes de première S et de terminale S. On a là un type de travail qui fait « bouger » une contrainte en créant par là des conditions jugées – par ce professeur – plus favorables au travail professoral, et dont l'appropriation par la profession enrichirait la panoplie des outils du travail collectif sur l'ensemble des contraintes exerçant leur emprise sur l'activité des professeurs. Le travail qu'ils ont accompli sur l'enseignement de la statistique (et sur la statistique elle-même) conduit certains des professeurs interrogés à mentionner d'autres ressources documentaires, qu'ils ressentent sans doute comme plus proches d'eux et moins contraignantes : publications de l'APMEP (deux mentions), des IREM (une mention), d'un fabricant de calculatrices (une mention), mais aussi sites Internet (six mentions, dont une d'un site académique et une du site de l'IUFM de l'académie d'Aix-Marseille). Les réponses formulées laissent entrevoir un usage erratique de ces sources, ce qui semble consonant avec le sentiment d'absence avérée de contraintes formelles. Un professeur qui mentionne

[68] Nous avons vu les dirigeants et animateurs de l'APMEP le faire avec vigueur à propos de l'actuel programme de seconde (voir notre chapitre 3).

[69] Pour un exemple de pratique qui fait des programmes (et des documents qui les accompagnent) un élément clé du travail praxéologique proposé aux professeurs, on peut se reporter au séminaire animé par Yves Chevallard à l'intention des élèves professeurs de mathématiques de deuxième année à l'IUFM d'Aix-Marseille : voir http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/filieres/mat/index.html.

l'Internet, par exemple, se contente en vérité d'en dire ceci : « J'ai trouvé un document sur Internet (adéquation à une loi équirépartie). » De même, l'unique professeur qui se réfère aux IREM le fait à propos d'une seule publication [70]. Ce qui limite surtout ce travail pour desserrer, un tant soit peu, la contrainte exercée de fait par les manuels sur l'activité des professeurs, c'est évidemment le mode d'exploitation concret, par chaque professeur, des références évoquées. Dans un métier où chacun peut avoir sa manière propre, ce qui convient à l'un pourra être réputé ne pas convenir à l'autre, en sorte que le travail *collectif* pour modifier les conditions du travail professoral apparaît *a priori* sans grande force du fait de l'existence d'exploitations singulières, réputées en principe incommensurables entre elles. C'est pourquoi la deuxième question rappelée plus haut et proposée aux professeurs enquêtés ne va nullement de soi. C'est pourquoi aussi, vraisemblablement, les réponses à cette question mettent davantage en avant une autre catégorie de ressources documentaires, sur laquelle existe un relatif consensus dans la profession : les ouvrages scolaires ou universitaires de niveau *plus élevé*, dans lesquels certains thèmes du programme de seconde peuvent se trouver abordés parfois d'un point de vue différent, éventuellement peu adéquat, mais qui, dans la culture majoritaire de la profession, sont regardés globalement comme plutôt incontestables. Il en va ainsi en particulier des manuels visant les préparations aux BTS et DUT. À cet égard, il est frappant de constater que leur mention n'apparaît que deux fois en réponse à la première de nos trois questions [71], alors que les enquêtés sont plus nombreux à *conseiller* de tels ouvrages « à un enseignant débutant pour l'aider à enseigner la statistique ». Il est vrai que la question pousse certains professeurs à parler de procédés personnels qu'ils ne mentionnent pas facilement dans d'autres contextes – par exemple celui de la première de nos trois questions. C'est ainsi que l'un des professeurs limite la portée du conseil qu'il donne en le faisant apparaître comme une simple confidence personnelle, laquelle se justifie ainsi d'être faite à titre de suggestion : « J'ai étudié les statistiques, confie-t-il donc, dans les bouquins de BTS et de fac. » À tel autre, cette même perspective ne paraît pas déraisonnable et, bien qu'il ne l'ait pas forcément pratiquée lui-même, il la suggère non sans concision : « Peut-être un manuel de ES ou des manuels de BTS plus poussés en statistique. » Avec le recours à des ouvrages « de BTS », on tient, nous semble-t-il, un peu plus qu'un germe de réponse

[70] Il s'agit de la brochure signée de Philippe Dutarte et Christian Kern et intitulée *Simulation et statistique en Seconde* (IREM de Paris Nord, 2000).

[71] L'un des enquêtés dit avoir utilisé un manuel de statistique de « BTS Info-gestion ». Un autre précise qu'il a exploité un ouvrage intitulé *Statistique et Probabilités*, dont l'auteur est Hubert Egon et qui a été publié chez Hachette en 1992 ; il s'agit en fait d'un manuel pour les BTS et DUT industriels.

collective à l'interrogation à propos de contraintes rencontrées par les professeurs pour accroître leur familiarité avec un domaine dont nous avons assez dit que leur formation ne les rapproche guère. Bien entendu, à cette esquisse de dynamique collective se mêlent des éléments ambigus, qui nous rappellent que le travail sur les contraintes se fait lui-même sous contraintes : la référence, dans la citation précédente, à la série ES, comme la référence plus générale aux formations visant un BTS, qu'il relève du secteur tertiaire ou du secteur industriel, signalent le risque non disparu d'une minoration de l'enseignement de la statistique en tant que savoir « général », pour tous, dès lors que cette matière serait regardée à nouveau trop fortement comme un savoir « spécial », approprié à tel ou tel choix d'orientation dans les études secondaires et supérieures. Sans aller beaucoup plus loin sur ce point, observons toutefois que le pire n'est pas certain, et qu'il n'est pas impossible, notamment, que le caractère de fleuron de l'enseignement secondaire reconnu aux classes de BTS ainsi que le travail accompli par certains auteurs de manuels sur le texte du savoir à y enseigner ne donnent à celui-ci une autorité en quelque sorte transcendante par rapport aux spécificités des formations qu'il nourrit [72]. Ces remarques permettent maintenant de situer de manière un peu plus juste – c'est-à-dire forcément nuancée quant à la possibilité de dépasser un état qui paraît indéfiniment germinatif – un autre type de ressources auquel font référence les professeurs : la catégorie des ouvrages « noosphériens » qui, contrairement aux manuels de BTS, ne semblent pas avoir de statut clair dans la vision professorale du monde scolaire et universitaire. On retrouve alors, devant les réponses recueillies, le sentiment qu'on a surtout affaire, en ce cas, à l'appropriation singulière par tel ou tel professeur d'un outil que tel autre professeur ne regardera pas aisément comme utile à son faire propre. C'est ainsi qu'un professeur, dont nous croyons pouvoir dire que son attitude conjugue ouverture et humilité, ose seul sortir des catégories relativement sûres des ouvrages de BTS et autres manuels pour conseiller à un enseignant débutant – non sans raison, pensons-nous – l'ouvrage d'André Massoni intitulé *Initiation aux statistiques descriptives avec Excel* (2001). Dans un autre contexte, celui de la réponse à la première de nos trois questions, un unique professeur est la source de toutes les références à des ouvrages qui ne sont pas des manuels : il mentionne non seulement la brochure de l'IREM de Paris Nord déjà évoquée, mais encore deux ouvrages (en français)

[72] Mentionnons à cet égard un ouvrage récemment paru, destiné aux formations de BTS et DUT industriels, et fruit du travail de trois enseignants (dont un docteur en didactique des mathématiques) de l'IUT de Tours : Chauvat, Chollet & Bouteiller (2005).

d'Arthur Engel [73], à quoi il ajoute un ouvrage québécois, dû à Sabin Lessard et Ernest Monga, intitulé *Statistique : concepts et méthodes*, publié en 1993 à Montréal [74]. Deux autres ouvrages sont encore signalés en réponse à la troisième de nos questions. Pour l'un d'eux, l'information donnée par le professeur interrogé est lacunaire – il semble qu'il s'agisse d'un manuel de BTS. L'autre est proposé par un professeur qui, par ses activités, est proche de l'inspection pédagogique régionale de l'académie : il s'agit des *Itinéraires en statistiques et probabilités* publiés en 2000 par les éditions Ellipses [75], qui le présentent comme devant en particulier « apporter des réponses aux questions que se posent les enseignants des lycées, soucieux de "rafraîchir" leurs connaissances dans ces domaines » que sont « la statistique descriptive, les problèmes de dénombrement, les probabilités, la statistique inductive (estimation, échantillonnage, tests d'hypothèses…), la simulation ».

Le tableau que l'on peut brosser ainsi suscite un sentiment contradictoire. Si, comme nous l'avons suggéré, nous regardons les réponses recueillies comme des contributions potentielles à une ébauche de réponse *de la profession*, on ne peut que se réjouir de voir émerger un ensemble de suggestions sans doute parcellaires mais déjà suggestives quant au travail que la profession pourrait accomplir sur les contraintes attachées au texte du savoir à enseigner, à sa constitution, à sa validation, à son évolution. Une autre vision des choses, toutefois, est sans doute plus proche de la réalité actuelle. Tout se passe comme si chaque professeur se constituait un petit trésor dont, en règle générale, il aurait seul connaissance du contenu [76]. Ces pratiques idionomiques imposent une limitation intrinsèque : dès lors que l'on sort du texte du savoir dont le programme officiel donne une description souvent avare de détails, chacun ignore ce que l'autre connaît, peut connaître, a oublié ou ignore entièrement, en sorte qu'aucune communication ne peut avoir lieu sur ces sujets qui ne soit pas parasitée par le doute, le soupçon, et un certain embarras [77]. Il ne suffit pas, pour coopérer dans une action collective, que chacun ait certaines connaissances ou cherche à les acquérir. Encore faut-il que

[73] Le premier de ces ouvrages (Engel, 1975) a déjà été mentionné. Le second s'intitule *Les certitudes du hasard* : il est paru chez Aléas à Lyon en 1990.

[74] Par les Presses de l'Université de Montréal et Masson.

[75] Les auteurs en sont Hubert Carnec, Jean-Michel Dagoury, René Séroux et Marc Thomas.

[76] Il y a bien entendu des exceptions. C'est ainsi que le professeur qui mentionne les *Itinéraires en statistiques et de probabilités* note qu'il n'est pas certain du titre de cet ouvrage car, dit-il, il vient « de le passer à un collègue ». Mais on a signalé déjà que ce professeur n'est pas que professeur, ce qui motive peut-être chez lui un souci plus vif du collectif.

[77] Voir la section 2 de notre chapitre 4.

chacun sache que les autres ont telles connaissances – celles-là, ou d'autres – ou cherchent à les acquérir, ce qui suppose une interconnaissance fine dont le meilleur ressort, au demeurant, est de s'instruire ensemble. Or si cette dernière condition se réalise *grosso modo* dans les cursus scolaires et universitaires, elle cesse largement d'être satisfaite sitôt passée l'entrée dans le métier : désormais, tel professeur ne saura plus rien du trésor de tel autre, qui peut d'ailleurs être quasiment vide ; et, s'il advient qu'il obtienne quelque information à ce propos (« Moi, j'ai bossé les stats dans des bouquins de BTS »), il ignorera tout de même ce que sont les connaissances disponibles ou mobilisables chez ce collègue. Le défaut d'interconnaissance en matière de connaissances est sans doute le plus lourd handicap dans une perspective de professionnalisation du métier de professeur. Nous observerons donc maintenant la manière dont des professeurs peuvent eux-mêmes éprouver ce manque et tenter d'y remédier. Nous le ferons en examinant les réponses des enquêtés à une autre de nos questions :

> Quels conseils donneriez-vous à un enseignant débutant n'ayant pas fait de statistique durant ses études et qui aurait à l'enseigner au lycée ?

Du seul fait qu'on s'y réfère à « un enseignant débutant n'ayant pas fait de statistique durant ses études », répondre à cette question suppose, implicitement mais de manière peu évitable, d'assumer le problème de l'interconnaissance des connaissances disponibles ou non (ou, comme ici, à se rendre disponibles ou non). Une première attitude consiste pourtant à refuser le problème en le supposant résolu, précisément par l'intervention normative, à vertu synnomique, du cursus des études supérieures, lesquelles donneraient à chacun, *ipso facto*, un stock adéquat de connaissances disponibles. Ce postulat, qui rend évidemment superflu le souci d'interconnaissance empirique fine (en me connaissant moi-même, je connais les autres), est énoncé par exemple dans cette réponse péremptoire d'une enquêtée :

> J'espère qu'actuellement il n'existe plus d'enseignant débutant n'ayant pas fait de statistique durant ses études !

Ici, à travers sa dénégation même, la contrainte de la culture commune (et reconnue telle dans la communauté professionnelle) est, au fond, subtilement assumée. D'autres réponses sont en revanche des dénégations en acte de l'existence même d'une telle contrainte, ce qui, à l'évidence, n'est pas favorable à un travail sur cette contrainte visant à changer les conditions d'exercice de la profession. Ainsi en va-t-il avec cette formulation, dont l'auteur paraît être resté sourd à une partie de la question posée :

> Faire travailler les élèves sur des activités en fonction de leur intérêt et de leurs goûts pour les motiver à faire un travail de recherche personnel.

Un sentiment très voisin prévaut devant cette autre réponse [78] :

> Faire des exemples concernant les élèves. Bien préparer à l'avance sinon beaucoup de temps perdu. Faire rentrer les données « dans » la calculatrice en avance par les élèves. Attention aux problèmes dans les tableaux des calculatrices (fréquences supérieures à 100).

Un autre professeur ne refuse pas complètement le problème, mais en reste au niveau d'un vague principe avant de rabattre la question sur l'acte d'enseigner lui-même :

> Pour lui : ne pas limiter ses connaissances à celles qu'il doit donner aux élèves. Avec les élèves : utiliser calculatrices et ordinateurs par exemple pour faire des simulations.

Mais d'autres réponses montrent une plus grande lucidité quant au problème soulevé, telle la suivante, qui exprime crûment la réalité de la profession d'aujourd'hui :

> Difficile d'autant plus que sur les 14 enseignants en maths au lycée, personne ne semble en mesure d'apprécier les statistiques : on nous a dit de le faire, alors on le fait…

Ce sentiment d'anomie trouve au sein de la profession, nous l'avons dit, une solution classique, du fait de la prégnance d'un sentiment encore plus vif, celui de l'idionomie, dont un professeur se fait le porte-parole de façon on ne peut plus concise :

> Faire comme moi.

Cette réponse expose sans pudeur, on le voit, le lien paradoxal entre comportement idionomique et nécessité de l'interconnaissance (pour « faire comme lui »), interconnaissance que l'idionomie rend pourtant a peu près impossible ! Cependant une forte minorité de professeurs interrogés font entendre – quand, à leur insu, ainsi que nous le faisons, on les prend comme porte-parole *in partibus* de la profession – une réponse qui, quoique déclinée en propositions multiples, est marquée par la recherche spontanée d'une certaine synnomie professionnelle. Plusieurs d'entre eux, d'abord, recherchent cette loi commune dans un cursus de formation existant, même s'il est *a priori* organisé à d'autres fins. Ainsi un professeur écrit-il :

> Retourner à l'université pour suivre un cours de statistique afin de dominer le sujet, surtout ne pas se contenter des manuels.

Perspective en règle générale rarement évoquée, un autre professeur conseille d'« aller au cours de sciences économiques en première et terminale ». Tout semble se passer comme si,

---

[78] Les « fréquences supérieures à 100 » *(sic)* que le professeur enquêté mentionne entre parenthèses sont la source d'un dysfonctionnement d'un certain modèle de calculatrice auquel nous avons été amené à faire allusion dans la section 2 du présent chapitre.

au-delà de l'univers usuellement fréquenté, existait un lieu où le savoir statistique trouve son unité, sa norme, laquelle pourrait retomber sur les professeurs de mathématiques, pour autant qu'ils consentent d'une manière ou d'une autre à s'y soumettre un tant soit peu – fût-ce par exemple en assistant à un enseignement de SES. Une façon de faire alternative, certes un peu solitaire, consiste bien entendu à s'instruire dans des ouvrages judicieusement choisis. Un professeur conseille ainsi de « lire des manuels de ES ou de BTS », un autre de « consulter des ouvrages post-bac qui traitent du sujet à un niveau modeste au début », celui par exemple du « BTS industriel spécialités B et C », un autre encore, de « trouver un bon manuel de BTS ou DUT sur la question », un autre, enfin, d'« utiliser des manuels de DUT ou BTS ». On voit ici, à nouveau, la récurrence de cette solution qu'avance spontanément ce que nous oserons appeler pour une fois *la profession* : le recours à des manuels de BTS et DUT. Cette solution, pourtant, a ses défauts, nous le savons : dès lors qu'elle est mise en œuvre solitairement et qu'aucune pierre de touche ne permet de s'assurer d'un partage effectif au sein de la profession d'une culture efficacement commune, elle participe de l'idionomie et du solipsisme. Une stratégie plus douce est envisagée encore, celle d'une formation en quelque sorte *in situ*, dans le cadre même de l'activité professionnelle, ce qu'exprime bien la réponse suivante :

> Être modeste dans le contenu et de se former avant d'enseigner les statistiques et ne pas hésiter à poser à des « anciens » des questions précises. S'inspirer des manuels, tout en restant en accord avec le programme et en gardant sa propre sensibilité mathématique.

Mais cette stratégie de base, vraisemblablement la plus pratiquée dans le meilleur des cas, semble insuffisante au moment de prodiguer un conseil. Sans écarter donc cette modalité de formation, et vraisemblablement parce qu'ils tiennent certaines propositions plus ambitieuses – retourner à l'université… – pour peu réalistes, d'autres professeurs vont prôner ce qui leur apparaît comme le plus propre à créer de la synnomie, même si le rendement n'en est pas impressionnant : le stage de formation continue. L'un d'eux note ainsi sobrement : « Pour les stats descriptives un manuel suffit, pour l'échantillonnage (et « la technologie ») il faut un vrai stage. » Un autre, dont nous avons dit l'attention à ses collègues dans une perspective quasi officielle, note :

> Ne pas paniquer : c'est ainsi pour la plupart des enseignants. Discuter avec ses collègues de leur pratique ; le livret d'accompagnement des programmes ainsi que le CD sont très riches et éclairants. S'inscrire à un stage de formation continue.

On passe ainsi de la formation dans l'exercice même de la profession à une formation à petite distance de celle-ci, distance qu'il paraît à plusieurs des professeurs interrogés indispensable d'assumer, comme y invite sans façon tel professeur enquêté (qui, non seulement conseille de « suivre un stage », mais encore mentionne nommément tel formateur dont l'apport lui semble particulièrement bien inspiré), ou tel autre encore, qui conseille sans ambages « de s'inscrire rapidement à un stage de formation continue ».

4. Un fait social total

Le travail synnomique que révèle l'analyse des réponses des professeurs interrogés est un fait permanent, dont les résultats ne prennent cependant du relief que dans une assez longue durée. D'une façon générale, les effets du travail mené sur les contraintes et les conditions de la diffusion scolaire ou extrascolaire des praxéologies n'a que très rarement l'illusoire netteté d'une décision inscrite dans un texte officiel ! En particulier, il n'est pas toujours facile de voir ce qui change et ce qui doit être regardé – au moins provisoirement – comme un invariant. Pour illustrer ces remarques tout en nous acheminant vers notre conclusion, nous nous appuierons ici sur deux enquêtes que nous avons réalisées auprès des élèves professeurs de mathématiques de deuxième année de la promotion 2004-2005 de l'IUFM d'Aix Marseille. On a vu plus haut l'un des professeurs enquêtés simplifier le problème de la connaissance adéquate de la statistique en se refusant à imaginer que les jeunes professeurs d'aujourd'hui n'aient pas tous reçu, désormais, une formation idoine en ce domaine. Le problème de l'idonéité des connaissances ainsi soulevé à propos de la statistique ne concerne sans doute pas que la statistique, comme le savent bien les formateurs qui, en première année d'IUFM, assurent la préparation au CAPES de mathématiques. Mais la situation est sans doute plus notablement insuffisante en ce qui concerne la statistique. Dans l'enquête à laquelle nous avons procédé figurait la question suivante :

> Avez-vous eu une formation en statistique durant votre cursus ? Précisez.

Sur 41 réponses obtenues, 19 sont purement négatives : « Non », « Non, jamais », « Jamais » sont quelques-unes des formulations adoptées par les enquêtés ! Plusieurs autres disent n'avoir en ce domaine que les connaissances acquises au lycée : un professeur stagiaire indique ainsi qu'il maîtrise « seulement les exigences du lycée » ; un de ses camarades, qui lui fait écho, regrette vivement cette situation. Il répond :

> Pratiquement aucune, et je le déplore ! (Seulement au lycée, mais en quantité très limitée.)

Un autre encore n'est pas plus positif, qui écrit :

> Pas au-delà du bac, sauf lors de l'enseignement en classe de DECF/DPECF (mais il s'agissait plus de probabilités que de statistiques proprement dites).

Quelque peu oublieux sans doute, un professeur stagiaire précise sans façon :

> Durant mes études (collège, lycée, prépas, université), je n'ai jamais eu de formation en statistique. J'ai découvert ce domaine à l'IUFM.

Ils sont plusieurs, sur ce modèle, à ne mentionner que l'apport de la deuxième année d'IUFM. L'un d'eux écrit ainsi : « Pas après le lycée, si on omet la formation PCL2 à l'IUFM. » Un autre, de même [79] : « Cette année durant les séminaires, jamais durant ma scolarité. » Et un autre encore : « Oui, durant le séminaire. » En fait, quelques-uns seulement peuvent faire état d'un rencontre avec la statistique entre le lycée et la préparation au CAPES. Deux des enquêtés indiquent ainsi qu'ils ont suivi un cours de statistique en DEUG – dans un cas, il s'agissait du DEUG MASS. Un autre professeur stagiaire, plus prolixe, écrit : « En DEUG : la même formation qu'au CAPES mais en un tout petit peu poussé. » Il ajoute toutefois : « Cela restait assez simple. » De fait, il semble que la préparation au CAPES ait apporté peu en la matière [80], à l'instar des années passées à l'université ou en classes préparatoires. À la question posée, quelques enquêtés, il est vrai, se contentent de répondre laconiquement, sans

[79] Les références au(x) séminaire(s), ci-après, désignent le « séminaire du mardi matin », déjà plusieurs fois mentionné. Voir notre chapitre 5. Notons que le sigle PCL2 désigne, à l'IUFM d'Aix-Marseille, ceux qui, partout ailleurs, sont étiquetés PLC2.

[80] Le rapport relatif au CAPES de mathématiques 2004 souligne, au reste, une attitude sélective des candidats face à l'éventail des sujets proposés. Le président du jury écrit ainsi (Moussa, 2004, p. 72) : « L'évolution des sujets doit suivre celle des programmes ; cependant, le choix proposé aux candidats a pour effet un délaissement de certaines parties des programmes "mal-aimées" par les candidats comme elles le sont parfois aussi, il faut le dire, par les membres du jury. » Gageons que la statistique (et les probabilités) sont ainsi évitées plus souvent qu'à leur tour. Le rapport sur l'agrégation externe de mathématiques 2004 est plus direct (Moisan, 2004, p. 53) : « Parmi les notions insuffisamment maîtrisées figurent celles du programme de statistique. Seuls les très bons candidats savent expliquer clairement ce qu'est un test en statistique et peu arrivent à tester une hypothèse à partir d'un exemple précis. Les problèmes concrets liés à l'estimation de paramètres inconnus sont rarement abordés bien qu'ils soient souvent à la base de la modélisation à partir de données. » Le même document précise alors : « Le jury, constatant la croissance du nombre de candidats qui ignorent tout ou partie de la statistique, a été vigilant quant au contrôle de cette connaissance. »

commentaire explicite dans un sens ou dans l'autre [81]. Mais d'autres réponses témoignent d'une frustration qui s'exprime de façon plus ou moins marquée [82]. Si l'on compte seulement les professeurs stagiaires qui disent n'avoir pas eu de formation en statistique entre le lycée et la deuxième année d'IUFM, donc sans compter ceux qui disent avoir fait un peu de statistique et qui ne s'en trouvent pas satisfaits, et en ignorant *a fortiori* ceux qui déclarent sans autre commentaire en avoir fait, on arrive à 27 professeurs stagiaires sur 41, soit environ deux professeurs stagiaires sur trois. On touche du doigt la permanence d'une des contraintes les plus évidentes dans la diffusion scolaire des connaissances de statistique : la formation à la statistique des professeurs d'aujourd'hui ne saurait être encore considérée comme une affaire gagnée ! Le « front » du problème a, sur quelques décennies, peu évolué.

À côté de cela, dans le même temps, d'autres lignes de force bougent. Une autre des questions proposées aux professeurs stagiaires était rédigée ainsi :

> En quoi la statistique est-elle à vos yeux un domaine des mathématiques ? En quoi ne l'est-elle pas ?

À cette question, les réponses apportées sont massivement *positives*. Sur les 42 professeurs stagiaires interrogés, six n'ont pas répondu et l'un s'est contenté d'écrire un point d'interrogation. Plutôt qu'une réticence, nous sommes portée à voir dans cette attitude une conséquence de la nature de la question soulevée : tout étudiant, tout ex-étudiant se sent légitime à parler de ses études, à brosser à gros traits ou en détail ce qu'il y a fait et ce qu'il n'y a pas fait. Ici, cependant, la question est autre : dans l'échelle des niveaux de détermination, elle se situe à l'échelon du *domaine d'études*, niveau auquel, nous l'avons dit, le professeur n'est pas accoutumé à évoluer. Au demeurant, les réponses en témoignent autant que les non-réponses : la plupart sont partielles, parcellaires, mentionnent un aspect ou un autre du travail statistique, sans appréhension globale structurée, mais pourtant *toujours* en confirmation de l'appartenance de la statistique aux mathématiques. L'argument principal mais non unique est le fait que le travail statistique suppose des outils mathématiques – notamment des outils de calcul et des outils graphiques. L'argumentaire est cependant divers,

---

[81] « Oui, un module de statistique en maîtrise » ; « Oui, UV à l'université » ; « Oui un module de statistique en maîtrise » ; « Oui en maîtrise : une UV de statistiques inférentielles ; à l'IUFM » ; « Oui, intro aux probas à l'X ».

[82] « Très peu : en maîtrise (enseignement optionnel) » ; « Une brève apparition en module probabilité de maîtrise puis un peu en prépa CAPES » ; « Oui en université mais ce fut fort peu » ; « Oui mais peu de théorie sur laquelle j'aimerais m'appuyer » ; « Un peu en maîtrise de mathématiques et en prépa CAPES » ; « Non, ou bien je ne m'en souviens plus, à part de la statistique à l'agrégation qui n'a rien à voir (les modèles sont très complexes) ».

et ouvert. Un enquêté dit ainsi que la statistique relève bien de mathématiques « parce qu'elle permet d'introduire les probabilités ». Un autre écrit même : « Elle est liée à la probabilité par la mesure de Lebesgue sur un espace *X* de mesure 1 ». Il conclut qu'elle se situe « donc dans le champ des mathématiques ». Si certains voient la preuve de ce qu'ils avancent dans la présence, en statistique, d'éléments indubitablement mathématiques – « elle s'appuie, souligne un professeur stagiaire, sur une théorie mathématique précise (et pas simple) » –, d'autres prennent pour critère ce qu'elle permet de faire. Un enquêté argumente par exemple en ces termes : « Elle l'est dans la mesure où c'est une théorie axiomatisée qui peut modéliser différents phénomènes. » Un autre, davantage prolixe, note :

> La statistique est un domaine à part entière des mathématiques dans le sens où elle permet le traitement et l'analyse des données, et l'interprétation de celle-ci. C'est le domaine des mathématiques qui développe le plus l'esprit critique et l'éducation citoyenne.

Très libéral quant à l'extension de l'empire mathématique, un autre professeur stagiaire indique : « C'est entièrement un domaine des maths, car elle permet de développer une analyse critique des données recensées. » Un autre, plus nuancé, est le seul qui, en vérité, marque une légère restriction à l'inscription de la statistique dans le champ des mathématiques. Il écrit :

> Elle est propice à la réalisation de travaux sur l'argumentation et par là même à l'éducation à la citoyenneté. Elle me semble un peu à la « frontière » des mathématiques au niveau du lycée, à cause du manque de justifications théoriques.

On pourrait, bien sûr, multiplier les exemples. Mais la conclusion est certaine : ces jeunes professeurs ne doutent pas que la statistique, bien que liée de façon quasi organique au monde extramathématique, soit partie intégrante des mathématiques. Cette conclusion est, certes, celle d'un collectif de professeurs débutants ayant suivi ensemble, dans l'année où ils sont interrogés, une formation qui les a conduits à travailler leur rapport à la statistique et aux mathématiques. Toujours est-il que l'attitude à peu près consensuelle que révèle notre enquête est tout à fait confirmée par les réponses apportées à une autre de nos questions :

> Vous paraît-il légitime que ce soit le professeur de mathématiques qui enseigne la statistique ? Sinon, quel(s) enseignant(s) devrai(en)t prendre en charge l'enseignement de la statistique ?

Sans le savoir *a priori* – les réponses sont individuelles –, ces professeurs stagiaires abondent dans un même sens. Vingt-deux d'entre eux se contentent de répondre par un mot : « Oui. » Plusieurs autres font des réponses presque aussi concises : « Oui, c'est légitime » (ils sont quatre à s'exprimer ainsi) ; « C'est légitime ! » ; « Tout à fait » (souligné). Sobrement, un autre enquêté rétorque : « Qui d'autre ? » Les autres réponses sont tout aussi positives ; mais, sans doute sensibles à la deuxième partie de la question (à laquelle ils n'ont pas formellement à répondre), leurs auteurs notent que l'enseignement de la statistique pourrait donner lieu à collaborations avec d'autres professeurs, ces collaborations pouvant même prendre la forme d'un partage de l'enseignement de la statistique, comme il en va pour un professeur stagiaire qui formule ainsi sa réponse :

> En partie, oui, pour mettre en place les outils mathématiques utilisés en statistique. Mais on pourrait envisager qu'un professeur de SES ou d'ECJS prenne en charge la statistique.

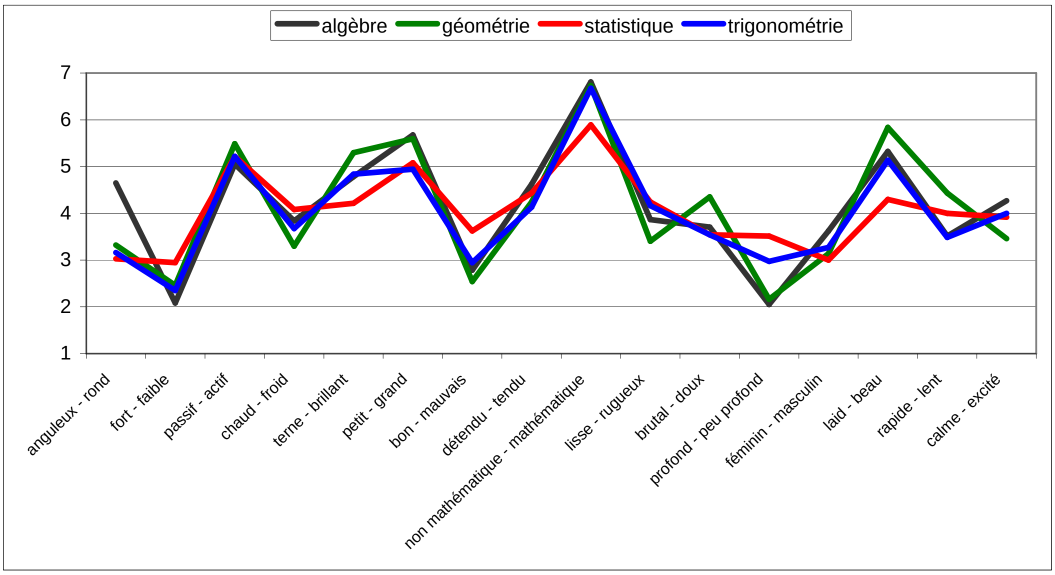
C'est sans doute là le point de vue le plus « avancé » sur la question : on voit pourtant qu'il réserve au professeur de mathématiques un rôle apparemment inaliénable. En même temps, si l'on peut donc tenir que, dans ce collectif potentiel, l'accord est ultra-majoritaire sur le fait que le professeur de mathématiques doit accepter d'enseigner la statistique, si un nombre important de réponses évoquent des collaborations avec le professeur d'histoire-géographie ou d'« économie », on doit noter aussi que le partage n'est à aucun moment envisagé avec ces disciplines – qui sont au moins *consommatrices* de statistique – que sont les sciences expérimentales, et en particulier la physique. On bute là sur une contrainte que nous ne ferons que signaler en passant [83], mais sur laquelle le travail reste très largement à faire, parce que les conditions qu'elle engendre sont sans doute surdéterminées par l'histoire pluriséculaire des relations, faites d'intimité et de rivalité, entre physique et mathématiques. On voit ainsi un mouvement s'amorcer pour, tout à la fois, recevoir la statistique dans la classe de mathématiques, et envisager de la partager avec d'autres disciplines établies dans le champ scolaire. La chose mérite d'autant plus d'être soulignée que de telles évolutions sont électives, et se produisent alors même que d'autres données n'évoluent guère.

La statistique, donc, aurait sa place dans le champ des mathématiques, ou, plus exactement, dans la classe de mathématiques, même si les jeunes professeurs que nous avons interrogés reconnaissent avoir dans ce domaine une formation encore inadéquate. Mais quelle place réserve-t-on à la statistique parmi l'ensemble des domaines mathématiques enseignés ? Pour atteindre à une plus grande vérité dans l'exploration de ce que ces jeunes professeurs portent en eux – parfois sans en être nettement conscients –, nous avons recouru au dispositif du différenciateur sémantique [84] et recueilli les scores attribués par 41 professeurs stagiaires, sur

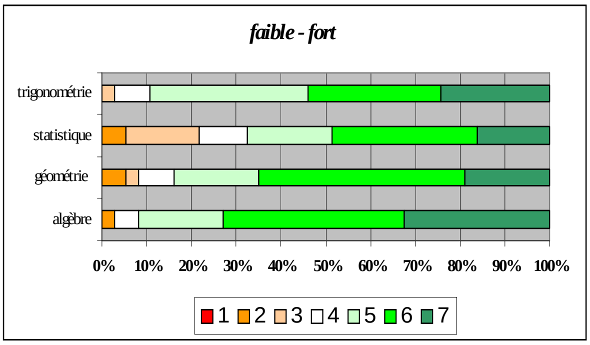
[83] Voir notre chapitre 4, ainsi que Chevallard & Wozniak (2003).

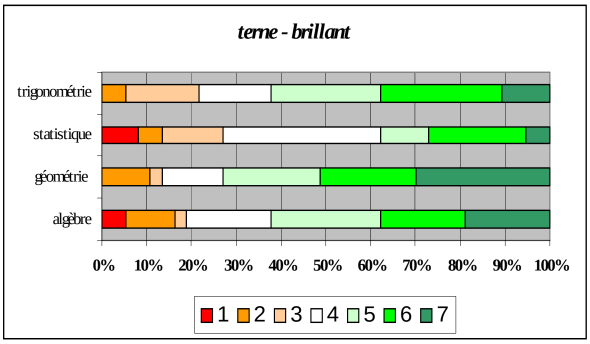
[84] La technique du différenciateur sémantique (en anglais, *semantic differential*) est due au psychologue Charles Osgood (1957). Elle est aujourd'hui utilisée dans de très nombreux domaines des sciences humaines.

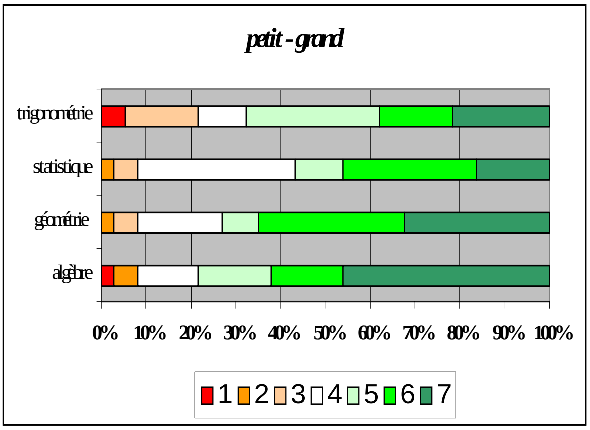
une liste de 16 échelles de 1 à 7, à quatre mots : *algèbre*, *géométrie*, *statistique*, *trigonométrie*. Sur les 41 réponses recueillies, 4 se sont révélées inexploitables par suite d'oublis, de répétitions, etc. Sur le graphique suivant, on a porté le score moyen sur chacun des 16 axes pour chacun des quatre mots soumis aux professeurs stagiaires.

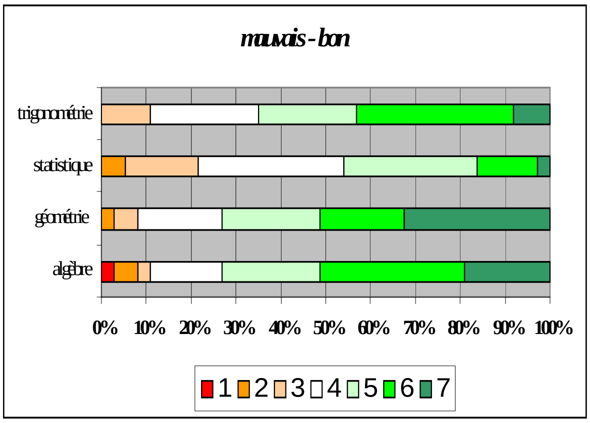


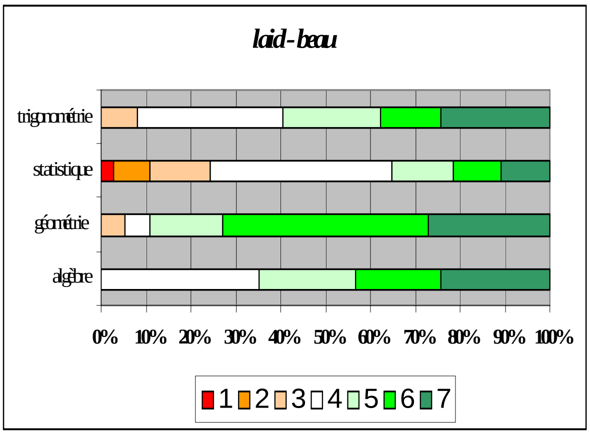
Le premier fait à souligner est sans doute que les courbes de profil affectent une allure largement commune : en allant de gauche à droite on voit par exemple que les quatre domaines envisagés sont forts plutôt que faibles, actifs plutôt que passifs, grands plutôt que petits, bons plutôt que mauvais, mathématiques plutôt que non mathématiques, profonds plutôt que peu profonds et beaux plutôt que laids. Si l'on regarde maintenant le profil de la statistique, on voit cependant que, bien que semblable aux autres, il apparaît plus écrasé vers la moyenne, comme une partie des mathématiques qui aurait moins de relief que les autres, peut-être parce qu'on en est moins familier. Une hiérarchie existe, ou plutôt des hiérarchies existent suivant les axes qu'on considère. Sur l'axe faible-fort (voir ci-après), si la trigonométrie rivalise avec l'algèbre, la statistique ne fait guère le poids, même si elle n'est pas ridicule. Notons la position de la géométrie qui, comme on le verra sur d'autres axes, voit son statut évoluer – elle n'est plus la plus forte ! L'axe terne-brillant redonne un avantage à la géométrie mais est cruelle pour la statistique. Celle-ci, toutefois, se défend honorablement sur l'axe petit-grand, mais marque à nouveau sa difficulté d'être sur l'axe mauvais-bon, où la géométrie conserve son privilège traditionnel.

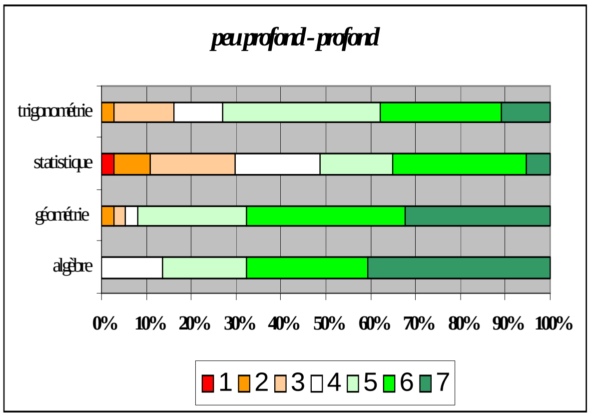




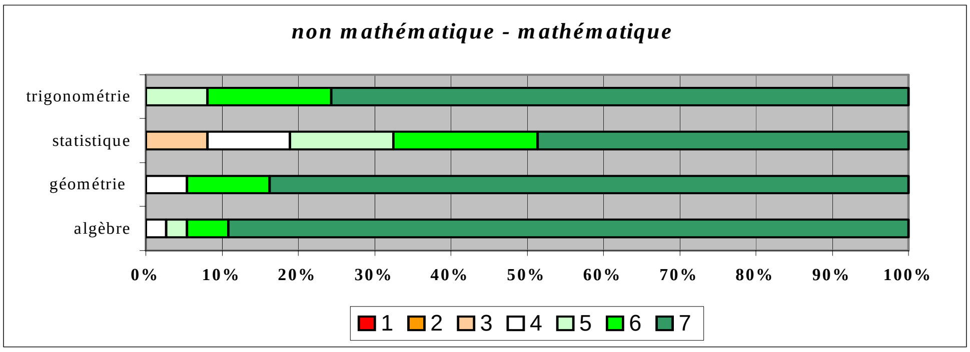




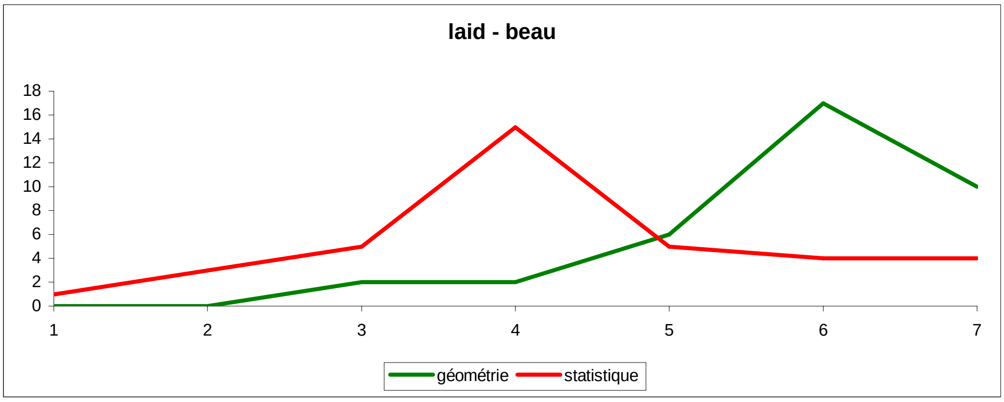




L'axe laid-beau apparaît fortement différenciateur : la géométrie est bonne mais elle est encore plus belle qu'elle n'est bonne, et le jugement porté sur la statistique à cet égard n'en apparaît que plus net. Sur l'axe peu profond-profond, la statistique n'est pas absolument démunie, mais elle ne se compare pas aux trois autres domaines, notamment à la géométrie. L'axe non mathématique-mathématique (ci-après) est lui aussi éclairant, mais d'une lumière moins crue : les quatre domaines se révèlent, si l'on peut dire, fortement mathématiques, et la statistique, à cet égard n'est pas mal pourvue, même si elle ne peut rivaliser avec ses trois « rivales ».



Ainsi se dessine un paysage plus complexe que celui auquel nous avions eu accès jusqu'ici. La statistique est « mathématique » : là-dessus, il n'y a pas de doute – même si elle l'est un peu moins que les autres domaines considérés. En revanche, elle est sensiblement moins brillante ; disons-le : elle est quelque peu terne ! Elle n'est pas bien bonne non plus, et surtout – ce sont là des considérations inhabituelles qui peuvent surprendre mais qu'il faut savoir entendre –, elle est moins *belle* et moins *profonde*. On touche là à des contraintes « cachées » – parfois comme un secret de Polichinelle – mais qui pèsent silencieusement sur l'activité du professeur et, plus généralement, sur celle d'une partie de la noosphère. Jetons un seul coup d'œil sur les courbes d'effectifs ci-dessous, relatives à l'échelle laid-beau. Nous y voyons l'opposition franche de deux histoires très différentes : la cote d'amour de la géométrie [85] s'est construite depuis plus de deux mille ans, et si, aujourd'hui, son astre pâlit un peu, on lui accorde encore très généreusement des qualités sans doute fort peu mathématiques mais néanmoins très agissantes pour expliquer la place qui lui a été conservée dans le curriculum.



La géométrie, donc, est belle, et elle est aussi profonde. La statistique n'est pas belle, et il reste donc encore à lui gagner l'attention, la bienveillance, l'intérêt sans lesquels l'effort de diffusion a tant de mal à parvenir à ses fins.

[85] Il s'agit en l'espèce de la géométrie à la façon d'Euclide : hypothético-déductive, « synthétique », et non pas « analytique ».

À propos de deux études récentes, on a souligné l'élargissement de perspective que prônent spontanément plusieurs de ceux qui se sont penchés sur l'enseignement de la statistique dans une perspective de développement [86]. La réalité que révèle l'analyse didactique quand elle s'appuie sur les outils de la théorie anthropologique du didactique va pourtant bien au-delà d'un abord simplement plus ouvert au plan épistémologique et scientifique, tel que nous en avons rendu compte plus haut. Comme le montre en effet l'ensemble du travail accompli jusqu'ici, le système des contraintes et des conditions qui affectent l'enseignement de la statistique – et qu'il ne faut jamais renoncer à prendre en compte, même quand il semble qu'aucune instance sociale n'a la capacité de prendre en charge le travail qu'elles appellent –, ce système, donc, s'étage sur *l'ensemble* des niveaux de l'échelle de détermination didactique [87]. C'est *a priori* à tout ce complexe de conditions et de contraintes que l'on doit se référer dans l'analyse didactique et c'est lui que doit viser le travail dont cette analyse parvient à montrer la pertinence et l'utilité. Sans prétendre résumer l'ensemble des déterminants mis au jour jusqu'ici, nous illustrerons par quelques exemples indicatifs, en partie conjecturaux, l'épaisseur du complexe de contraintes et conditions sur lequel nous n'avons pas cessé de travailler. Nous avons insisté sur le niveau de la civilisation [88]. Revenons-y un instant pour opposer deux attitudes vis-à-vis de la vérité : l'une qui suppose celle-ci toujours déjà acquise, détenue par au moins certaines autorités vers lesquelles il suffirait, si l'on peut dire, de se tourner pour en obtenir l'énoncé ; l'autre, qui regarde la vérité comme étant toujours à établir, ou, quand on croit en détenir un énoncé « approché », toujours

---

[86] Outre les deux études commentées plus haut, mentionnons à titre d'exemple les travaux du statisticien David S. Moore (http://www.stat.purdue.edu/~dsmoore/). Et notons ici, à propos de l'enseignement de la statistique, les recommandations faites conjointement par l'*American Statistical Association (ASA)* et la *Mathematical Association of America (MAA)*, telles que les formule Moore (1997) : "1. *Emphasize the elements of statistical thinking:* (a) the need for data, (b) the importance of data production, (c) the omnipresence of variability, (d) the measuring and modeling of variability. 2. *Incorporate more data and concepts, fewer recipes and derivations. Wherever possible, automate computations and graphics.* An introductory course should: (a) rely heavily on *real* (not merely realistic) data, (b) emphasize *statistical* concepts, e.g., causation vs. association, experimental vs. observational and longitudinal vs. cross-sectional studies, (c) rely on computers rather than computational recipes, (d) treat formal derivations as secondary in importance. 3. *Foster active learning*, through the following alternatives to lecturing: (a) group problem solving and discussion, (b) laboratory exercises, (c) demonstrations based on class-generated data (d) written and oral presentations, (e) projects, either group or individual."

[87] Voir notre chapitre 4.

[88] Voir notre chapitre 4.

à confirmer par des études indéfiniment recommencées. À cet égard, il serait faux et inopérant d'opposer une civilisation – identifiée de façon claire et distincte – à une autre. C'est au cœur même de chaque culture que ces rapports à la vérité coexistent, et cela, parfois, d'une façon qu'on peut dire schizophrénique. Il est clair cependant que la statistique telle que nous avons tenté de l'appréhender a partie liée avec la seconde attitude, anti-autoritaire et anti-dogmatique. Si, en sens inverse, on s'en tient, sur la plupart des questions, au point de vue énoncé par telle autorité supposée – autorité qui, dans nos sociétés individualistes, n'est souvent rien d'autre que… soi-même –, on validera sans les interroger tout un ensemble d'opinions conformes à la *doxa* de son milieu de vie – ou, au contraire, qui en prennent le contre-pied, comme autant de paradoxes assumant une fonction de distinction par rapport à l'opinion commune. Ce n'est pas sans doute que la statistique ne puisse s'acclimater à une culture de l'opinion faite, qui se défie du monde ouvert de la vérité à chercher et préfère le monde clos de l'énoncé toujours déjà validé. Mais la mise en compatibilité conduit, en ce cas, à une statistique de la *recette* qui, bien qu'elle ait été depuis longtemps dénoncée [89], continue de sévir ici et là. Dans un article ironiquement intitulé « The Earth is Round ($p < .05$) », dans lequel il critique vivement l'emploi des tests d'hypothèses en psychologie, l'auteur, Jacob Cohen, écrit ainsi [90] :

> What's wrong with [null hypothesis significance testing]? Well, among many other things, it does not tell us what we want to know, and we so much want to know what we want to know that, out of desperation, we nevertheless believe that it does!

Aucune feinte naïveté ne saurait délivrer l'enseignement de la statistique de cette emprise du dogmatisme établi et du débat vite tranché. Dès le plus humble niveau, le travail statistique suppose une prise de partie en la matière. Enseigner la statistique, à quelque niveau que ce soit, c'est, d'une manière ou d'une autre, prendre sa place dans un débat de civilisation qui dépasse chacun de ses protagonistes. Dans l'opposition civilisationnelle entre vérité faite et vérité toujours à faire, la statistique n'est certes pas la seule concernée : elle est embarquée avec tous les savoirs humains. De ce point de vue, l'idée de sauver électivement l'enseignement de la statistique apparaît également naïve. Le travail sur au moins certains

[89] Voir par exemple les *Commentaries on Significance Testing* que l'on trouve sur le site de l'Université de l'Indiana (http://www.indiana.edu/~stigtsts/index.html#contents).

[90] Cohen (1994) : voir http://www.indiana.edu/~stigtsts/quotsagn.htm. Ce que nous voulons connaître, précise l'auteur, c'est $P(H_0/D)$, la probabilité que l'hypothèse nulle soit vraie sachant les « données » D ; ce que nous calculons, c'est $P(D/H_0)$, la probabilité de D sachant que l'hypothèse nulle est vraie ; la tentation est forte, voire irrésistible, de confondre ce que l'on souhaite avoir et ce que l'on a.

types de conditions et de contraintes ne peut être que très large et suppose en conséquence des collectifs démultipliés. Même si certains ressentent la chose comme une blessure narcissique, la profession ne peut intervenir seule de manière suffisamment avertie et efficace sur certaines au moins des contraintes qui, pourtant, ont une action spécifique sur l'enseignement de tel ou tel domaine mathématique.

Il existe, bien entendu, des niveaux de contraintes où l'action de la profession est la plus directement indispensable. Ainsi en va-t-il avec le travail nécessaire sur des conditions depuis longtemps installées dans la classe de mathématiques, qui rendent celle-ci hostile à l'établissement de relations organiques avec divers environnements, dans l'établissement même et, plus encore, à l'extérieur de l'établissement. On sait par exemple qu'une transposition didactique de la statistique qui se veut vigilante au double point de vue épistémologique et didactique suppose qu'on puisse, dans des modalités sans doute diverses et dans lesquelles nous n'entrerons pas ici, disposer réellement de données statistiques authentiques, pour poser et étudier sans le réduire le problème de la variabilité, qui est à la racine même du travail statistique. Or la satisfaction de ce type de besoin, qui se réalise de façon plus ou moins routinière, bien que sans doute imparfaite, dans d'autres disciplines scolaires – en histoire-géographie et en sciences économiques et sociales par exemple – suppose qu'on accepte de voir la classe de mathématiques ne pas exister *toute seule*, mais comme institution spécifique au sein de tout un ensemble d'institutions de la société. L'évolution sur ce point se heurte au principe de fermeture épistémologique selon lequel tous les matériaux du travail de la classe devraient provenir du travail de la classe. Ce phénomène général, sur lequel l'analyse didactique peut nous éclairer [91], n'épargne pas la classe de mathématiques : dans le cas qui nous occupe ici, il a pris récemment la forme du recours à des données simulées, au prix de l'écrasement de la variabilité. On saisit ainsi la solidarité qui existe entre l'épistémologie autarcique à base empiriste qui guette constamment l'enseignement des sciences mathématiques et physiques, et le déséquilibre dans l'enseignement de la statistique entre recours à des données réelles et recours à la simulation – déséquilibre corrélé avec la minoration de la variabilité. C'est désigner là, bien entendu, un travail spécifique à entreprendre, dans lequel les professeurs ne peuvent réussir sans nouer des alliances dans le combat à mener, rompant ainsi avec l'isolationnisme traditionnel de la classe de mathématiques. Un certain nombre de ces alliances, souvent sporadiques mais

[91] Sur ce problème, qui a partie liée avec l'empirisme, voir Chevallard (1989), pp. 68-69.

significatives et utiles, se sont d'ores et déjà nouées [92]. Mais le combat que nous évoquons n'est en rien un combat qui, visant à créer dans la classe certaines conditions jugées favorables, se déroulerait pourtant tout entier hors de la classe. En réalité, on ne peut espérer changer les conditions de l'enseignement de la statistique sans changer solidairement les contenus – au sens large – de cet enseignement. On ne peut guère, ainsi, envisager que, pour se former à la statistique en vue de l'enseigner, les professeurs aient besoin de se pencher sur les questions mentionnées plus haut – Qu'est-ce que la statistique ? Quel est son objet ? Sous quelle forme la pensée statistique est-elle apparue ? Quelle est la différence entre « statistiques » et « statistique » ? Quels types de problèmes essaie-t-elle de résoudre ?… – et que, dans le même temps, ces questions restent à la porte des classes, au lieu d'être elles-mêmes travaillées *dans la classe avec les élèves*. La solidarité des différents niveaux de conditions et des contraintes appelle une prise en compte globale. L'enseignement de la statistique, comme tout enseignement, est un fait social total.

[92] Voir ainsi Escoufier (2000), pp. 129-131.

Bibliographie

Allouche, J.-P., & Mendès France, M. (2005). Nombres normaux : sur les traces du hasard en mathématiques. *Les Dossiers de La Recherche, 20*, 36-40.

APMEP (1999a). Les nouveaux programmes. Extraits du communiqué de presse ministériel du 14 janvier 1999. *BGV, 85*, 8.

APMEP (1999b). Texte APMEP du 28/05/99 concernant les projets de programme de mathématiques de 2de pour la rentrée 2000. *BGV, 87*, 9-12.

APMEP (1999c). Commentaires de la Commission Inter-IREM « Statistique et Probabilités » sur la partie « Statistique » du projet de programme de mathématiques en Seconde. *Supplément au BGV n^{o} 87*, 5.

Armatte, M. (1991). Une discipline dans tous ses états : la statistique à travers ses traités (1800-1914). *Revue de synthèse, IV(2)*, 161-206.

Armatte, M. (2001). Maurice Fréchet statisticien, enquêteur et agitateur public. *Revue d'histoire des mathématiques, 7(1)*, 7-65.

Artaud, M. (1989). *Conditions, contraintes et discours apologétique dans l'émergence de l'enseignement des mathématiques à l'âge classique*. DEA de l'Université Claude Bernard Lyon 1, Lyon, France.

Association Pénombre (1999). *Chiffres en folie. Petit abécédaire de l'usage des nombres dans le débat public et les médias*. Paris : La Découverte.

Avignon, F., *et al.* (2000). *Statistique de seconde « clés en main » pour la rentrée 2000*. Grenoble : APMEP. [http://www.apmep.asso.fr/Stat2ndGR.pdf]

Bastien, R. (2003). Quelques notions de statistique à connaître par l'enseignant pour sa pratique de classe. *Les revues pédagogiques de la Mission laïque française. Activités mathématiques et scientifiques, AMS 53*.
[http://www.mission-laique.asso.fr/enseignants/pdf/math51/am51p5.pdf]

Bédarida, F. (1977). Statistique et société en Angleterre au XIXe siècle. *Pour une histoire de la statistique*, tome 1 (pp. 493-508). Paris : Economica.

Bertillon, L.-A. (1857). *Conclusions statistiques contre les détracteurs de la vaccine, précédées d'un essai sur la méthode statistique appliquée à l'étude de l'homme.* Paris : Librairie de Victor Masson.
[http://visualiseur.bnf.fr/Visualiseur?Destination=Gallica&O=NUMM-81502]

Borel, É. (1961). *Probabilité et certitude*. Paris : PUF.

Bouvier, J. (1977). François Simiand, la statistique ou les sciences humaines. *Pour une histoire de la statistique*, tome 1 (pp. 431-445). Paris : Economica.

Bouvier, J.-P., *et al*. (2000). *Maths 2e*. Paris : Belin.

Brousseau, G. (1996). Les statistiques dans la formation des enseignants. *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, tome II (pp. 205-212). Paris : IREM de Paris VII.

Calot, G. (1964). *Cours de statistique descriptive*. Paris : Dunod.

Chauvat, G., Chollet, A., & Bouteiller, Y. (2005). *Mathématiques BTS/DUT. Probabilités et statistique*. Paris : Dunod.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x, 19*, 45-75.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. (2e éd. révisée). Grenoble : La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (2001a). Structures et fonctions. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (Eds), *Actes de la 11e École d'Été de Didactique des Mathématiques* (pp. 3-22). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2001b). Les mathématiques et le monde : dépasser l'horreur instrumentale. *Quadrature*, *41*, 25-40.

Chevallard, Y. (2002a). Organiser l'étude. 3. Écologie & régulation. *Actes de la XIe école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 41-56). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2002b). Nouveaux dispositifs didactiques au collège et au lycée : raisons d'être, fonctions, devenir. *Actes des Journées de la commission inter-IREM Didactique* (pp. 1-26). Dijon : IREM.

Chevallard, Y. (2004a). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. In J.-L. Hennequin (Ed.), *Actes de la 3e Université d'été Animath*.
[http://www.animath.fr/UE/UE04/chevallard.pdf]

Chevallard, Y. (2004b). Pour une nouvelle épistémologie scolaire. Propos recueillis par Odile Chenevez. *Cahiers pédagogiques*, *427*, 34-36.

Chevallard, Y. (2005). Didactique et formation des enseignants. In B. David (Ed.), *Impulsions 4* (pp. 215-231). Lyon : INRP.

Chevallard, Y., & Bosch, M. (2001). Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oubliée. *Petit x, 55*, 5-32.

Chevallard, Y., & Wozniak, F. (2003). Enseigner la statistique au secondaire. Entre genre prochain et différence spécifique, *Actes de la XII^e^ école d'été de didactique des mathématiques (Corps, 20-29 août 2003)*. (À paraître.)

Chevalley, C. (1995). *Pascal. Contingence et probabilités*. PUF : Paris.

Colomb, J., & Marsenach, J. (Eds), (2000). *L'évaluateur en révolution*. Paris : INRP.

Coste, R. (1999). Enseigner les statistiques en seconde. Une expérience dans l'académie de Versailles. *Bulletin de l'APMEP*, *425*, 732-736.

Cuenat, J., & Dedron, P. (1968). *Cours de statistique élémentaire*. Paris : Magnard.

Darmois, G. (1934). *Statistique et applications* (5^e^ éd. 1957). Paris : Armand Colin.

Deheuvels, P. (1990). *La probabilité, le hasard et la certitude*. Paris : PUF.

Delahaye, J.-P. (1997). *Le fascinant nombre π*. Paris : Pour la science.

Deledicq, A., *et al.* (2000). *Maths 2^de^*. Collection Indice. Paris : Bordas.

Deltheil, R. (1924). Bibliographie. – Analyses et index. 1^o^ Sciences mathématiques. *Revue générale des sciences pures et appliquées*, tome 35 (p. 518).
[http://visualiseur.bnf.fr/Visualiseur?Destination=Gallica&O=NUMM-17099]

Desrosières, A., Mairesse J., & Volle, M. (1977). Les temps forts de la statistique française depuis un siècle. *Pour une histoire de la statistique,* tome 1 (pp. 509-517). Paris : Economica.

Desrosières, A. (1985). Histoires de formes : statistiques des sciences sociales avant 1940. *Revue française de sociologie, XXVI*, 277-310.

Desrosières, A. (1993). *La politique des grands nombres*. Paris : La découverte.

Dodge, Y. (2003). *Premiers pas en statistique*. Paris : Springer.

Droesbeke, J.-J., & Tassi, P. (1990). *Histoire de la statistique*. Paris : PUF.

Dufossé, C. (1999a). Nos questions. Lettre adressée à Monsieur Dacunha-Castelle, Conseiller du Ministre, le 26/07/99. *Supplément au BGV n^o 87*, 6.

Dufossé, C. (1999b). Les réponses obtenues. Compte rendu des réponses obtenues de Monsieur Dacunha-Castelle (par téléphone, le 26/07/99). *Supplément au BGV n^o 87*, 6.

Dufossé, C. (1999c). En passant par la Lorraine... *BGV*, *89*, 1.

Dufossé, C. (1999d). À Monsieur Claude Allègre, Ministre de l'Éducation Nationale, de la Recherche et de la Technologie. *BGV*, *89*, 4.

Dufossé, C. (1999e). Rencontre entre le bureau national de l'APMEP et Monsieur Dacunha-Castelle, Conseiller spécial du Ministre de l'Éducation Nationale. *BGV*, *90*, 18-19.

Edwards, D., & Hamsen, M. (2001). *Guide to Mathematical Modelling* (2^e éd.). New York : Palgrave.

Engel, A. (1975). *L'enseignement des probabilités et de la statistique*. Paris : Cédic.

Escoufier, Y. (2000). La formation à la statistique. In Académie des Sciences, *La statistique* (pp. 128-136). Paris : Éditions TEC & DOC.

Fourgeaud, C. & Fuchs, A. (1967). *Statistique*. Paris : Dunod.

Fréchet, M. (1955). *Les mathématiques et le concret*. Paris : PUF.

Fréchet, M. (2004). Les mathématiques ne sont pas qu'une discipline de service. *Bulletin de l'APMEP*, *452*, 307-308.

Gasquet-More, S. (1999). *Plus vite que son nombre. Déchiffrer l'information*. Paris : Seuil.

Gaudillière, J.-P. (2002). *Inventer la biomédecine. La France, l'Amérique et la production des savoirs du vivant (1945-1965)*. Paris : La Découverte.

Gauthier, C., Girard, G., Gerll, D., Thiercé, C., & Warusfel, A. (1974). *Analyse/Probabilités. 1re CDE*. Paris : Hachette.

Girault, M.(1967). *Éléments de méthodologie statistique*. Paris : Dunod.

Gnedenko, B. V., & Khintchine, A. Ia. (1969). *Introduction à la théorie des probabilités*. Paris : Dunod.

Grattan-Guinness, I. (1997). *The Fontana History of the Mathematical Sciences : the Rainbow of Mathematics*. Londres : Fontana Press.

Groupe Chadule (1974). *Initiation aux méthodes statistiques en géographie*. Paris : Masson.

GTD de mathématiques (2000). *Bilan de la mise en œuvre anticipée durant l'année scolaire 1999-2000 du programme de mathématiques de la classe de seconde (applicable à la rentrée 2000)*. Paris : CNDP. [http://www.cndp.fr/textes_officiels/lycee/maths/pdf/CSEMA001.pdf]

Guerber, L., & Hennequin P.-L. (1967). *Initiation à la statistique*. Paris : Association des professeurs de mathématiques de l'Enseignement Public.

Hadamard, J.(1949). *Leçons de géométrie élémentaire. II. Géométrie dans l'espace* (8e éd.). Paris : Armand Colin.

Hayoun, M. (2002). La méthode de Monte Carlo Metropolis. *École « Simulation Numérique en Matière Condensée » (Paris, 29-31 mai 2002)*. [http://www.ccr.jussieu.fr/jsnum/Old/MC_Metropolis.pdf]

Hecht, J. (1977). L'idée de dénombrement jusqu'à la Révolution. *Pour une histoire de la statistique*, tome 1 (pp. 21-83).Paris : Economica.

Hobbes, T. (1660). *The Leviathan*.
[http://darkwing.uoregon.edu/~rbear/hobbes/leviathan.html]

Hodges, J. L., Krech, D., & Crutchfield, R. S. (1979). *StatLab. Introduction empirique à la statistique*. Paris : Economica.

Huet, S (1989). *Court traité de docimologie normal(ienn)e*.
[http://s.huet.free.fr/paideia/diaphorai/docim.htm]

Itard, J. (1961). *Les livres arithmétiques d'Euclide*. Paris : Hermann.

Kahane, J.-P. (1988). Mathématiques comme discipline de service. *Bulletin de l'APMEP*, *363,* 193-211.

Kahane, J.-P. (2002a). EM 2000 Mathématiques, quel avenir ? *ZDM 2002*, *34(4)*, 127-131.

Kahane, J.-P. (Ed.), (2002b). *L'enseignement des sciences mathématiques.* Paris : Odile Jacob & CNDP.

Kahane, J.-P. (2004). Est-il bien utile d'enseigner les mathématiques ? *Cahiers pédagogiques, 427*, 11-13.

Klatzmann, J. (1996). *Attention, statistiques ! Comment en déjouer les pièges*. Paris : La Découverte.

Koyré, A. (1971). *Études d'histoire de la pensée philosophique*. Paris : Gallimard.

Le Bras, H. (2002). *L'adieu aux masses : démocratie et politique*. La Tour d'Aigues : Éditions de l'Aube.

Lebossé, C., Hémery, C., & Faure, P. (1967). *Géométrie et statistique. Classe de première D*. Paris : Nathan.

Lechopier, N. (2002). *La distinction soin/recherche dans la genèse de la loi Huriet*. Mémoire de DEA de l'Université Paris I-Sorbonne, Paris, France.

Lejeune, M.(2004). *Statistique. La théorie et ses applications*. Paris : Springer.

Le Van-Lemesle, L. (1994). Levasseur, Émile (1828-1911). Professeur d'Économie politique et de législation industrielle (1871-1907). In C. Fontanon, & A. Grelon (Eds), *Les professeurs du Conservatoire national des arts et métiers. Dictionnaire biographique 1794-1955* (pp. 105-115). Paris : INRP.

Le Van-Lemesle, L. (2004). *Le Juste ou le Riche. L'enseignement de l'économie politique, 1815-1950.* Paris : Ministère de l'Économie, des Finances et de l'Industrie.

Levasseur, É. (1883). *Résumé historique de l'enseignement de l'économie politique et de la statistique à l'occasion du 40^e^ anniversaire de la fondation de la société d'économie politique.* Paris : Librairie Guillaumin et C^ie^.
[http://visualiseur.bnf.fr/CadresFenetre?O=NUMM-75354&M=pageseule&Y=Image]

Lévy, M. L. (1979). *Comprendre les statistiques*. Paris : Éditions du Seuil.

Lévy-Leblond, J.-M. (1982). Physique et mathématiques. In R. Apéry *et al.* (Eds), *Penser les mathématiques* (pp. 195-211). Paris : Seuil.

Lloyd, G. E. R. (1990). *Magie, raison et expérience : origines et développement de la science grecque*. Paris : Flammarion.

Malaval, J., *et al*. (2000). *Math 2^e^*. Collection Hyperbole. Paris : Nathan.

Markovitch, S. (2002). *Probabilités. Une approche expérimentale*. Paris : Hachette.

Massoni, A. (2001). *Initiation aux statistiques descriptives avec Excel*. Paris : Vuibert.

McGee, V. E. (1975). *Principes de statistiques*. Paris : Vuibert.

McIntosh, D. M. (1967). *Statistics for the Teacher* (2nd éd.). Oxford : Pergamon Press.

Ménard, C. (1977). Trois formes de résistance aux statistiques. *Pour une histoire de la statistique*, tome 1 (pp. 417-431). Paris : Economica.

Meusnier, N. (2004). Sur l'histoire de l'enseignement des probabilités et des statistiques. In É. Barbin, & J.-P. Lamarche (Eds), *Histoire de probabilités et de statistiques* (pp. 237-273). Paris : Ellipses.

Ministère de l'Éducation nationale (1999). Programme de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique. *BOEN*, *HS6*. Paris : CNDP.
[http://www.education.gouv.fr/bo/1999/hs6/default.htm]

Ministère de l'Éducation nationale (2000a). *Document d'accompagnement des programmes de Mathématiques* - *classe de seconde*. Paris : CNDP.
[http://www.cndp.fr/archivage/valid/14963/14963-8208-9261.pdf]

Ministère de l'Éducation nationale (2000b). Programme de mathématiques des classes de première série littéraire & scientifique. *BOEN*, *HS7*. Paris : CNDP.
[http://www.education.gouv.fr/bo/2000/hs7/vol5mathsc.htm]

Ministère de l'Éducation nationale (2000c). Programme de mathématiques des classes de première série économique et sociale. *BOEN*, *HS*8. Paris : CNDP.
[http://www.education.gouv.fr/bo/2000/hs8/math.htm]

Ministère de l'Éducation nationale (2001a). *Document d'accompagnement de programme* - *Mathématiques* - *classe de première des séries générales*. Paris : CNDP.
[http://www.cndp.fr/archivage/valid/35165/35165-6099-5919.pdf]

Ministère de l'Éducation nationale (2001b). Programme de l'enseignement des mathématiques dans le cycle terminal de la série littéraire. *BOEN*, *HS*3. Paris : CNDP.
[http://www.education.gouv.fr/bo/2001/hs3/default.htm]

Ministère de l'Éducation nationale (2001c). Programme de l'enseignement des mathématiques en classe terminale des séries économique et sociale & scientifique. *BOEN*, *HS4*. Paris : CNDP. [http://www.education.gouv.fr/bo/2001/hs4/default.htm]

Ministère de l'Éducation nationale (2002). *Document d'accompagnement de programme - Mathématiques - Cycle terminal de la série littéraire (option facultative)*. Paris : CNDP. [http://www.cndp.fr/archivage/valid/36227/36227-6098-5918.pdf]

Ministère de l'Éducation nationale (2003). *Enseigner au collège. Mathématiques. Programmes et accompagnement.* Paris : CNDP.
[http://www.cndp.fr/archivage/valid/54412/54412-9698-12059.pdf]

Misset, L., *et al*. (2000). *Maths Seconde*. Collection Déclic. Paris : Hachette.

Moisan, J. (2004). *Rapport de jury de concours. Agrégation de mathématiques. Concours externe*. [ftp://trf.education.gouv.fr/pub/edutel/siac/siac2/jury/2004/agreg_ext/maths.pdf]

Moore, D.S. (1997). New pedagogy and new content: the case of statistics. *International Statistical Review, 65*, 123–165.
[http://www.stat.purdue.edu/~dsmoore/articles/PedagogyContent.pdf]

Moreux, T.(1926). *Pour comprendre l'algèbre*. Paris : Doin.

Morrisson, C. (1987). L'enseignement des statistiques en France du milieu du XIXe siècle à 1960. In J. Affichard (Ed.), *Pour une histoire de la statistique*, tome 2 (pp. 811-823). Paris : Economica.

Mouchot, C.(1983). *Statistique et économétrie*. Paris : Economica.

Moussa, J. (2004). *CAPES externe CAFEP-CAPES de mathématiques*. Paris : CNDP.
[ftp://trf.education.gouv.fr/pub/edutel/siac/siac2/jury/2004/capes_ext/maths.pdf]

Muller, C. (1973). *Initiation aux méthodes de la statistique linguistique*. Paris : Hachette.

Muller, C., & Pottier, B. (Eds), (1966). *Statistique et analyse linguistique*. Paris : PUF.

Papelier, G. (1955). *Précis de mécanique*. Paris : Vuibert.

Parzysz, B. (1999). Propositions de l'APMEP pour l'enseignement de la statistique en classe de Seconde. *Supplément au BGV n° 87*, 4.

Perreau Guimaraes, M., Ycart, B., & Robert, C. (2001). Formation en ligne à la statistique médicale. *Proceedings AIM 2001*.
[http://www.math-info.univ-paris5.fr/~ycart/publis/publis.html]

Piéron, H. (1963). *Examens et docimologie*. Paris : PUF.

Poirier, H. (2001). L'échec des maths à l'école : à qui la faute ? *Sciences & vie, 1008,* 36-52.

Pombourcq, P. (2000). *Les statistiques dans le programme de seconde à la rentrée 2000*. Gap : Éditions Louis Jean.

Pressat, R. (1987). L'enseignement de la statistique en France à ses débuts (*ca*. 1850-1939). *Journal de la Société de statistique de Paris, 128(1),* 18-29.

Raoult, J.-P. (1975). *Structures statistiques*. Paris : PUF.

Reeb, G., & Fuchs, A. (1967). *Statistiques commentées*. Paris : Gauthier-Villlars.

Reuchlin, M. (1976). *Précis de statistique*. Paris : PUF.

Rittaud, B.(2004). L'ordinateur à rude épreuve. *La Recherche, 381*, 28-33

Robert, C. (1995). *L'empereur et la girafe. Initiation à la statistique*. Paris : Diderot éditeur.

Robert, C. (1996). À propos de l'enseignement de la statistique en collège et au lycée. *Bulletin de l'APMEP, 404,* 428-432.

Robert, C. (1999). À propos de l'introduction de l'enseignement de la statistique dans les lycées. *Bulletin de l'APMEP, 425*, 725-731.

Robert, C (2003). *Contes et décomptes de la statistique. Une initiation par l'exemple*. Paris : Vuibert.

Rosenfeld, F. (1997). Histoire des Sociétés de Statistique en France. *Actes de la 51e session de l'Institut International de Statistique (Istanbul)*, Volume 2 (pp. 527-530) . [http://www.sfds.asso.fr/presenta/c_pres01.htm]

Rouan, O., & Régnier, J.-C. (2004). Vers l'élaboration d'un module de formation continue des enseignants du secondaire en statistique. *Communication aux XXXVIe Journées de la Société française de statistique (24-28 mai, Montpellier)*. [http://www.sfds.asso.fr/groupes/jsmontpellier04/11_ROUAN_REGNIER2004.pdf]

Roy, R. (1937). L'enseignement économique en France. L'enseignement de la statistique. In *Cinquantenaire de la Revue d'économie politique 1887-1937*. Paris : Sirey.

Rude, N., & Retel, O. (2000). *Statistique en psychologie*. Paris : In Press Éditions.

Shaw, G. B. (1909). *The Doctor's Dilemma. Preface on Doctors*. [http://www.gutenberg.org/dirs/etext04/dcprf10.txt]

Schlacther, D. (1986). *De l'analyse à la prévision*. Paris : Ellipses.

Schwartz, D. (1994). *Le jeu de la science et du hasard*. Paris : Flammarion.

Schwartz, D. (2000). Statistique et citoyenneté – l'enseignement de la statistique dans les collèges et lycées. In Académie des Sciences, *La statistique* (pp. 137-139). Paris : Éditions TEC & DOC.

Souvay, P. (2002). *Statistique et qualité. Principes fondamentaux*. Saint-Denis : AFNOR.

Souvay, P. (2002). *Statistique et qualité. Applications pratiques*. Saint-Denis : AFNOR.

Spence, I. (2000). The invention and use of statistical charts. *Journal de la Société Française de Statistique*, *141*, 77-81. [http://www.psych.utoronto.ca/~spence/Spence_2000.pdf]

Stevens, S. S. (1946). On the theory of scales of measurement. *Science*, *103*, 677-680.

Tarot, C. (1999). *De Durkheim à Mauss, l'invention du symbolique*. Paris : Éditions La Découverte & Syros.

Terracher, P.-H., *et al*. (2000). *Math 2de*. Collection Pyramide. Paris : Hachette.

Théron, P., Couturier, M., & Boursin, J.-L. (1970). *Mathématiques 1re C, D, E,* tome 2. Paris : Bordas.

Valleron, A.-J. (2001). *Probabilités et statistique*. Paris : Masson.

Valmalette, M. (1933). *Le dessin géométrique normalisé à l'école primaire. Livre du maître à l'usage des élèves maîtres et des maîtres*. Paris : Vuibert.

Verger, J., (Ed.) (1986). *Histoire des Universités en France*. Toulouse : Privat.

Volle, M. (1984). *Le métier de statisticien*. Paris : Economica.

Wozniak, F. (2000). *Les mathématiques du repérage dans la scolarité obligatoire*. DEA de l'Université Claude Bernard Lyon 1, Lyon, France.